Analiza Matematyczna
Ćwiczenia

J. de Lucas

Zadanie 1. Obliczyć granice następujących funkcji

$a)$	$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x+y)^2}$	$b)$	$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$
$c)$	$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^4y^4)^{\frac{2}{x^2y^2}}$	$d)$	$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^3-y^3}$
$e)$	$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$	$f)$	$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{2x^6+y^3}$
$g)$	$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2)\cos(y^2)}{x^2+y^4}$	$h)$	$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)(x-y)}{x^3-y^3+xy^2-yx^2}$
$i)$	$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2)\cos(y^2)}{x^2+y^4}$	$j)$	$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{x^2+y^2-\sqrt[3]{x^2+y^2+xy}}}{(x^2+y^2)^{1/3}}$
$k)$	$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^6}{x+y^3}$	$l)$	$\lim_{(x,y)\to(3,2)} \frac{12x-4x^2-24xy+8x^2y+15xy-5x^2y^2-3xy^3+x^2y^3}{90x-30x^2-93xy+31x^2y+30xy^2-10x^2y^2-3xy^3+x^2y^3}$
$m)$	$\lim_{(x,y)\to(\pi,\pi)} x\sin\left(\frac{x+y}{4}\right)$	$n)$	$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy-y^2}{x^2+y^2}$

Rozwiązania:

Najpierw, można zauważyć, że funkcja

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x+y)^2}$$

jest zdefiniowana na $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Właśnie,

$$x^2y^2+(x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2y^2 = 0 \ i \ (x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -y \ iy^2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ i \ y = 0.$$

Więc, mamy $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$. Musimy sprawdzić granicę funkcji f w punkcie $(0,0)$. Chociaż, $(0,0)$ nie należy do A, ten punkt jest punktem skupienia zbioru A i możemy skorzystać z definicji Cauchy'ego granicy funkcji $f : A \to \mathbb{R}$ w punkcie skupienia p_0 zbioru A:

$$\lim_{p\to p_0} f(p) = b \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, [\forall p \in A, |p-p_0| < p \Rightarrow |f(p)-b| < \epsilon].$$

Wprowadzamy zmianę do współrzędnych biegunowych, czyli $x = r\cos\theta$ i $y = r\sin\theta$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x+y)^2} = \lim_{r\to0} \frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta+(\cos\theta+\sin\theta)^2r^2}$$
$$= \lim_{r\to0} \frac{r^2\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta\sin^2\theta+(\cos\theta+\sin\theta)^2} = 0.$$

Funkcja

$$f(x,y) = \frac{3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

jest definiowana na $\mathbb{R} - \{(0,0)\}$. Aby obliczyć granicę w punkcie $(0,0)$, wprowadzamy zmianę do współrzędnych biegunowych, czyli $x = r\cos\theta$ i $y = r\sin\theta$. Więc,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y^3}{x^2y^2+(x+y)^2} = \lim_{r\to0} \frac{3r^5\cos^2\theta\sin^3\theta}{r^4(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2} = \lim_{r\to0} 3r\cos^2\theta\sin^3\theta = 0.$$

Funkcja

$$f(x,y) = (1+x^4y^4)^{\frac{2}{x^2y^2}}$$

jest zdefiniowna na zbiorze $A \equiv \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \mid xy = 0\}$. Więc, mamy funkcję postaci $f : A \to \mathbb{R}$. Musimy sprawdzić granicę funkcji f w punkcie $(0,0)$. Chociaż $(0,0)$ nie należy do A, jest punktem skupienia zbioru A i możemy skorzystać z definicji Cauchy'ego, czyli dany punkt skupienia p_0 zbioru A, to

$$\lim_{p\to p_0} f(p) = b \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, [\forall p \in A, |p-p_0| < p \to |f(p)-b| < \epsilon].$$

Wprowadzamy zmianę do współrzędnych biegunowych, czyli $x = r\cos\theta$ i $y = r\sin\theta$. Sprawdzamy granicę w punktach należących do dziedziny funkcji, czyli dla $\theta \in (0, 2\pi) - \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ i dla dowolnego $r > 0$. Wtedy,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1 + x^4y^4)^{\frac{2}{x^2y^2}} = \lim_{r\to 0}(1 + r^8\cos^4\theta\sin^4\theta)^{\frac{2}{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}}.$$

Skoro $\lim_{r\to 0} r^8\cos^4\theta\sin^4\theta = 0$, powyższa granica jest granicą typu liczby e. Wówczas,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1 + x^4y^4)^{\frac{2}{x^2y^2}} = \lim_{r\to 0}\left[(1 + r^8\cos^4\theta\sin^4\theta)^{\frac{1}{r^8\cos^4\theta\sin^4\theta}}\right]^{\frac{2r^8\cos^4\theta\sin^4\theta}{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}}.$$

i

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1 + x^4y^4)^{\frac{2}{x^2y^2}} = e^{\lim_{r\to 0}\frac{2r^8\cos^4\theta\sin^4\theta}{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}} = 1.$$

Przeanalizujemy funkcję

$$f(x, y) = \frac{xy - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Skoro $x^2 + y^2 = 0$ wtedy i tylko wtedy $x = y = 0$, funkcja ta jest zdefiniowana na zbiorze $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. W tym przykładzie, skorzystamy z tego, że

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = b \Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x, y), \exists \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x, y)$$

i

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x, y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x, y).$$

Takie granice nazywają się granicami iteracyjnymi. Trzeba pamiętać, że ich istnienie jest warunkiem koniecznym (ale nie wystarczającym), aby zgwarantować, że istnieje granica funkcji f w punkcie (x_0, y_0). Ogólnie, korzysta się z tego wyniku, aby sprawdzić, że granice iteracyjne nie istnieją, albo nie są równe i z tego powodu, nie istnieje granica funkcji. W naszym przypadku,

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y\to y_0} -1 = -1.$$

Zadanie 2. Zbadać ciągłość następujących funkcji

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{x}, & \text{dla } x \neq 0, \\ y, & \text{dla } x = 0, \end{cases}$

b) $f(x, y) = \frac{\cos(xy)}{x^2+y^2+1},$

c) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\left[\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right], & \text{dla } (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{dla } (x, y) = 0 \end{cases}$

d) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy}, & \text{dla } xy \neq 0, \\ 1, & \text{dla } xy = 0, \end{cases}$

e) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\log(1+|xy|)}{|xy|} & \text{dla } xy \neq 0, \\ 1, & \text{dla } xy = 0, \end{cases}$

Rozwiązanie: Poza punktami (x, y) gdzie $xy = 0$, funkcja jest ciągła. Właśnie, jest ilorazem dwóch funkcji ciągłych, takich, że mianownik nie zeruje się.

Zobaczymy co się dzieję, gdy (x_0, y_0) jest takie, że $x_0y_0 = 0$. Skoro $g(x, y) = |xy|$ jest funkcją ciągłą, kiedy $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ takie, że $x_0y_0 = 0$, to $g(x_n, y_n) \to 0$ (definicja Heiniego ciągłości funkcji), to

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\log(1 + |xy|)}{|xy|} = \lim_{|xy|\to 0} \frac{\log(1 + |xy|)}{|xy|} = 1.$$

Zadanie 3. Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu pierwszego następujących funkcji

a) $f(x, y, z) = xy^3z^2 - y \sin x$,
b) $f(x, y) = x\sqrt{y} - e^x \log y$,
c) $f(x, y) = \text{ch}x - \text{sh}x$, gdzie $\text{ch}x = (e^x + e^{-x})/2$, i $\text{sh}x = (e^x - e^{-x})/2$,
d) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{dla } (x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{dla } (x, y) = 0 \end{cases}$,
e) $f(x, y, z) = x^{yz}$,

Zadanie 4. Czy funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ różniczkowalna w punkcie (x, y) musi być C^1 w tym punkcie?

Zadanie 5. Udowodnij, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ różniczkowalna w punkcie (x, y) musi być C^0 w tym punkcie.

Zadanie 6. Obliczyć pochodne kierunkowe funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{dla } (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{dla } (x, y) = 0, \end{cases}$$

w kierunku wektora $v = (a, b)$ w punkcie $(0, 0)$.

Zadanie 7. Zbadaj różniczkowalność funkcji $f(x, y) = |xy| \sin(xy)$.

Zadanie 8. Zbadaj różniczkowalność funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{dla } (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{dla } (x, y) = 0. \end{cases}$$

Zadanie 9. Sprawdź, że funkcja

$$f_n = \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

spełnia, że

$$x\frac{\partial f_n}{\partial x} + y\frac{\partial f_n}{\partial y} = nf_n$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Rozwiązania: Mamy, że

$$x\frac{\partial f_n}{\partial x} = x\sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k} kx^{k-1}y^{n-k}$$

i

$$y\frac{\partial f_n}{\partial y} = y\sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k} (n-k)x^{k-1}y^{n-k-1}.$$

Wówczas

$$x\frac{\partial f_n}{\partial x} + y\frac{\partial f_n}{\partial y} = x\sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k} kx^{k-1}y^{n-k} + y\sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k} (n-k)x^k y^{n-k-1} =$$

$$k\sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + (n-k)\sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = n\sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = nf_n.$$

Zadanie 10. Sprawdzić, że funkcja $f(x^2+y^2+z^2)$ spełnia, że

$$x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}=x\frac{\partial f}{\partial z}-z\frac{\partial f}{\partial x}=z\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Rozwiązanie: Niech f' będzie df/dt, gdzie $t=x^2+y^2+z^2$, to

$$x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}=xf'2y-yf'2x=0$$

i

$$x\frac{\partial f}{\partial z}-z\frac{\partial f}{\partial x}=xf'2z-zf'2x=0$$

i

$$z\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial z}=zf'2y-yf'2z=0.$$

Zadanie 11. Zbadaj różniczkowalność funkcji

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{dla } (x,y)\neq 0,\\ 0, & \text{dla } (x,y)=0.\end{cases}$$

Zadanie 12. Dana funkcja $f(x,y)=|xy|$, czy spełnia, że

$$[D_{(h_x,h_y)}f](x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h_x+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)h_y.$$

Zadanie 13. Dana funkcja $f\in C^2(\mathbb{R})$, napisać wyrażenia

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

we współrzędnych walcowych $\{r,\phi,z\}$, gdzie

$$x=r\cos(\phi),\qquad y=r\sin(\phi),\quad z=z,$$

we współrzędnych sferycznych $\{r,\phi,\theta\}$, gdzie

$$x=r\cos(\phi)\sin(\theta),\qquad y=r\sin(\phi)\sin(\theta),\quad z=r\cos(\theta)$$

we współrzędnych eliptycznych $\{r,\phi,\theta\}$, gdzie

$$x=a\,r\cos(\phi)\sin(\theta),\qquad y=b\,r\sin(\phi)\sin(\theta),\quad z=c\,r\cos(\theta)$$

i $a,b,c>0$.

Zadanie 14. Obliczyć

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

dla funkcji

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{dla } (x,y)\neq 0,\\ 0, & \text{dla } (x,y)=0.\end{cases}.$$

Zadanie 15. Czy istnieje funkcja $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ taka, że $\partial f/\partial x=2x^5-6$ i $\partial f/\partial y=2y+5$?

Rozwiązanie: Dana $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, to

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Jeżeli taki warunek się spełnia, to dana funkcja $\partial f/\partial x(x,y) = f_x(x,y)$, to

$$f(x,y) = \int f_x(x,y)dx + \phi(y),$$

gdzie trzeba całkować $f_x(x,y)$ tylko jako funkcję zależną od x i gdzie $\phi(y)$ to pewna funkcja zależna od y. Teraz,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \phi'(y) + \frac{\partial}{\partial y}\int f_x(x,y)dx = f_y.$$

Stąd,

$$\phi'(y) = f_y - \frac{\partial}{\partial y}\int f_x(x,y)dx.$$

Można zauważyć, że właśnie prawa strona zależy tylko od y:

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi'(y) = \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int f_x(x,y)dx = 0.$$

Więc,

$$\phi(y) = \int \left[f_y - \frac{\partial}{\partial y}\int f_x(x,y)dx \right] dy.$$

Ta metoda jest kluczowa, na przykład w termodynamice, gdzie prowadzi do tzw prawa stanu układu termodynamicznego z wartości, które można mierzyć w laboratorium.

W naszym przypadku, mamy, że

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x^5 - 6 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

i

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 5 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

Więc, nasza funkcja spełnia taki warunek i możemy obliczyć f.

$$f = \int (2x^5 - 6)dx + \phi(y) = x^6/3 - 6x + \phi(y).$$

Trzeba zauważyć, że nie pojawia się żadna stała po całkowaniu $2x^5 - 6$, bo możemy zakładać, że ta stała jest w $\phi(y)$. Więc,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \phi'(y) = 2y + 5 \Rightarrow \phi(y) = y^2 + 5y + k, \qquad k \in \mathbb{R},$$

i

$$f(x,y) = x^6/3 - 6x + y^2 + 5y + k.$$

Zadanie 16. Prawo stanu gazu doskonałego dla dowolnej ilości gazu przyjmuje postać: $PV = nRT$, gdzie P to ciśnienie gazu, V to objętość gazu, n to ilość moli, T to temperatura i R to stała gazowa. Wykaż, że

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T=cte} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P=cte} \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{V=cte} = -1.$$

Rozwiązanie: Mamy, że $P = nRT/V$ więc,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T=cte} = -\frac{nRT}{V^2}.$$

Ponadto, $V = nRT/P$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{T=cte} = \frac{nR}{P}$$

i skoro $T = PV/(nR)$, to

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{V=cte} = \frac{V}{nR}.$$

Wobec tego,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T=cte}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P=cte}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{V=cte} = -\frac{nRT}{V^2}\frac{nR}{P}\frac{V}{nR} = -\frac{nRT}{VP} = -1.$$

Zadanie 17. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji

$$f(x,y) = \cos x + \cos y - \cos(x+y).$$

Rozwiązanie:

Punktem krytycznym funkcji f nazywamy punkty gdzie zerują się pierwsze pochodne tej funkcji. Punkty krytyczne są rozwiązaniami układu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin x + \sin(x+y) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin y + \sin(x+y) = 0.$$

Funkcja jest okresowa dla obu zmiennych, czyli $f(x+2\pi k, y+2\pi k') = f(x,y)$ dla $k, k' \in \mathbb{Z}$. Więc, możemy zbadać jej punkty krytyczne w $[-\pi,\pi) \times [-\pi,\pi)$. Stąd,

$$\sin(x) = \sin(y) \Rightarrow y = x.$$

Więc,

$$\sin(x) - \sin(x+y) = 0 \Rightarrow \sin(x) = \sin(2x)$$

Z tego,

$$x = 2x \Rightarrow x = 0, y = 0, \qquad x = -\pi, y = -\pi,$$

albo

$$2x = \pm\pi - x \Rightarrow x = \pm\frac{1}{3}\pi \ i \ y = \pm\frac{1}{3}\pi.$$

Więc, mamy punkty krytyczne:

$$(2\pi k, 2\pi k'), \qquad (-\pi + 2\pi k, -\pi + 2\pi k'), \qquad (\pi/3 + 2\pi k, \pi/3 + 2\pi k').$$

Musimy zbadać drugie pochodne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(x) + \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ \cos(x+y) & -\cos(y) + \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

w punktach krytycznych. Czyli, dla $(0,0)$ i podobnych

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Więc, $D_2 < 0$ i to punkt siodła. Dla $(-\pi, -\pi)$ i podobnych

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Więc, $D_1 < 0, D_2 > 0$ i to minimum. Dla $(\pi/3, \pi/3)$ i podobnych

$$-\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix}$$

to maksimum $(D_1, D_2 > 0)$.

Zadanie 18. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}.$$

Zadanie 19. Znaleźć największe i najmniejsze wartości funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(x^2+y^2)/(x^2+y^2), & \text{dla } (x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{dla } (x,y) = 0, \end{cases}$$

na zbiorze $K = \{(x,y) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leqslant \pi/2\}$.

Dla tych, którzy nudzą się i chcą coś więcej...

Zadanie 20. Dana funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ typu C^1 taka, że $f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^n f(x_1, \ldots, x_n)$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$, udowodnij, że

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = nf.$$

Zadanie 21. Zbadać punkty krytyczne ciągłej funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takiej, że $f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = |\lambda| f(x_1, \ldots, x_n)$.

Zadanie 22. Zbadać punkty krytyczne ciągłej funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takiej, że $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = f(r\cos\theta', r\sin\theta')$ dla wszystkich $r, \theta, \theta' \in \mathbb{R}$ i $\partial f/\partial r > 0$.

Zadanie 23. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji

$$f(x,y) = x^4 + y^4.$$