Rownanie drugiego rzędu o stałych współczynnikach.

Będziemy rozpatrywać równania postaci

$$C_2y'' + C_1y' + C_0y = 0, \quad C_2, C_1, C_0 \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Aby rozwiązać, postępujemy następująco. Napiszemy, że $D = d/dx$. Wtedy

$$C_2D^2y + C_1Dy + C_0y = 0$$

$$\Rightarrow (C_2D^2 + C_1D + C_0\underset{\text{identyczność}}{I})y = 0$$

D można rozumieć jako operator liniowy na przestrzeni liniowej funkcji gładkich i Id jako funkcja liniowa zespolonych (identyczność na tej przestrzeni)

$$D: (C^\infty(\mathbb{R}), \mathbb{C}) \to (C^\infty(\mathbb{R}), \mathbb{C})$$
$$f \longmapsto \frac{d}{dt}$$

To $(C_2D^2 + C_1D + C_0I)$ można rozumieć jako odwzorowanie liniowe. Rozwiązania równania (1) to elementy rzeczywiste jądra tego odwzorowania. Teraz, dane wielomian

$$(C_2x^2 + C_1x + C_0) = 0$$

mamy pierwiastki λ_1, λ_2.

Mamy trzy przypadki

a) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$(C_2 x^2 + C_1 x + C_0) = C_2 (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$$

czyli

$$(C_2 D^2 + C_1 D + Id) = C_2 (D-\lambda_1 Id)(D-\lambda_2 Id)$$

Wtedy $\ker((C_2 D^2 + C_1 D + Id) = \ker(D-\lambda_1 Id) \oplus \ker(D-\lambda_2 Id)$

$\ker(D-\lambda_1 Id) = \mu_1 e^{\lambda_1 t} \quad \mu_1 \in \mathbb{C}$

$\ker(D-\lambda_2 Id) = \mu_2 e^{\lambda_2 t} \quad \mu_2 \in \mathbb{C}$

Interesują nas rozwiązania rzeczywiste.
Więc po prostu możemy założyć, że $\mu_1 \in \mathbb{R}$, $\mu_2 \in \mathbb{R}$

Ogólne rozwiązanie

$$\boxed{y = \mu_1 e^{\lambda_1 t} + \mu_2 e^{\lambda_2 t} \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}}$$

b) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C}$

Prawie tak samo jak wcześniej.

III

$$(C_2 D^2 + C_1 D + C_0 \,\mathrm{Id}) = C_2 (D - \lambda_1 \mathrm{Id})(D - \lambda_2 \mathrm{Id})$$

(UWAGA: często Id nie pisze się)

Normalnie pisze się

$$(C_2 D^2 + C_1 D + C_0) = C_2 (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)$$

Jak wcześniej

$$\ker(C_2 D^2 + C_1 D + C_0) = \ker(D - \lambda_1) \oplus \ker(D - \lambda_2)$$

Więc,

$$\ker(D - \lambda_1) \Rightarrow \mu_1 e^{\lambda_1 t} \qquad C_1 \in \mathbb{C} \qquad (2)$$

$$\ker(D - \lambda_2) \Rightarrow \mu_2 e^{\lambda_2 t} \qquad C_2 \in \mathbb{C}$$

Natomiast, teraz $e^{\lambda_1 t}$ i $e^{\lambda_2 t}$ to funkcje zespolone!! Aby to rozwiązać, trzeba zauważyć, że

$$\lambda_1 = \frac{-C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4 C_2 C_0}}{2 C_2} \in \mathbb{C}$$

$$\lambda_2 = \frac{-C_1 \mp \sqrt{C_1^2 - 4 C_1 C_0}}{2 C_2} \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_1^R + i \lambda_1^I \in \mathbb{R} \\ \lambda_2 = \lambda_1^R - i \lambda_1^I \\ \lambda_1 = \overline{\lambda_2} \end{cases}$$

Więc rozwiązania rzeczywiste w postaci (2) spełniają

$$y = \mu_1 e^{\lambda_1 t} + \mu_2 e^{\lambda_2 t} = \overline{y} = \overline{\mu_1} e^{\overline{\lambda_1} t} + \overline{\mu_2} e^{\overline{\lambda_2} t}$$

$$= \overline{\mu_1} e^{\lambda_2 t} + \overline{\mu_2} e^{\lambda_1 t}$$

$$\Rightarrow \mu_2 = \overline{\mu_1} \Rightarrow y = \mu_1 e^{\lambda_1 t} + \overline{\mu_1} e^{\overline{\lambda_1 t}} =$$

$$y = 2\,\mathrm{Re}(\mu_1 e^{\lambda_1 t})$$

Teraz

$$y = 2\,\mathrm{Re}\left(\mu_1 e^{(\lambda_1^R + i\lambda_1^I)t}\right) = \mu_1 e^{(\lambda_1^R + i\lambda_1^I)t} + \bar{\mu}_1 e^{(\lambda_1^R - i\lambda_1^I)t}$$

$$= e^{\lambda_1^R t}\left(\mu_1 e^{i\lambda_1^I t} + \bar{\mu}_1 e^{-i\lambda_1^I t}\right) \qquad \mu_1 = \mu_1^R + i\mu_1^I$$

$$= e^{\lambda_1^R t}\left(\mu_1^R(e^{i\lambda_1^I t} + e^{-i\lambda_1^I t}) + i\mu_1^I(e^{i\lambda_1^I t} - e^{-i\lambda_1^I t})\right)$$

$$= e^{\lambda_1^R t}\left[2\mu_1^R \cos(\lambda_1^I t) \mp 2\mu_1^I \sin(\lambda_1^I t)\right]$$

To można napisać

$$\boxed{y = A_1 e^{\lambda_1^R t} \cos \lambda_1^I t + A_2 e^{\lambda_1^R t} \sin \lambda_1^I t.}$$

III Trzeci przypadek

$$C_2 D^2 + C_1 D + C_0 = C_2 (D - \lambda)^2.$$

Więc $\ker (D-\lambda)^2 = \langle e^{\lambda t}, t e^{\lambda t} \rangle$.

$$\boxed{y = \mu_1 e^{\lambda t} + \mu_2 t e^{\lambda t}.}$$

Rozwiązać równanie $2y'' - 5y' - 3y = 0$

Takie równanie można napisać w postaci

$$\left(2\frac{d^2}{dt^2} - 5\frac{d}{dt} - 3\right)y = 0$$

Piszemy $d/dx = D$, więc powyższy wzór można napisać

$$(2D^2 - 5D - 3)y = 0 \Rightarrow$$

Aby to rozwiązać, obliczymy pierwiastki wielomianu

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

gdzie zastąpiliśmy D przez x. Z tego wynika, że

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2\cdot 2} \begin{array}{l} \nearrow x = 3 \\ \searrow x = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Wówczas,

$$2x^2 - 5x - 3 = 2(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

Z tego

$$(2D^2 - 5D - 3)y = 2(D-3)\left(D+\frac{1}{2}\right)y = 0$$

$$\ker(D-3)\left(D+\frac{1}{2}\right) = \ker(D-3) \oplus \ker\left(D+\frac{1}{2}\right)$$

VI

Kiedy wszystkie pierwiastki są rzeczewisty i różny, wtedy rozwiązanie ma postać

$$y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{\frac{-1}{2}t}$$

pierwszy pierwiastek drugi pierwiastek

Rozwiązać równanie $4y'' + 12y' + 9y = 0$

Takie równanie możemy napisać w postaci

$$4\frac{d^2y}{dt^2} + 12\frac{dy}{dt} + 9y = (4D^2 + 12D + 9)y = 0$$

Gdzie znowu $D = \frac{d}{dt}$. Obliczmy pierwiastki wielomianu

$$(4x^2 + 12x + 9) = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 12(+9)}}{2 \cdot 4} \quad x = -\frac{3}{2}, \quad x = -\frac{3}{2}.$$

$$(4D^2 + 12 + 9)y = \left(D + \frac{3}{2}\right)^{2=\alpha} y = 0.$$

w tym przypadku. rozwiązanie to

$$y = \lambda_1 e^{\frac{3}{2}t} + \lambda_2 t e^{\frac{3}{2}t}$$

Rozwiązać

VIII

$$y'' + 4y' + 13y = 0$$

$$(D^2 + 4D + 13)y = 0$$

Pierwiastki wielomianu $x^2 + 4x + 13 = 0$ to

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 52}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = -2 \pm 3i$$

W tym przypadku, rozwiązanie ma postać

$$y = C_1 e^{-2x} \cos 3x + C_2 e^{-2x} \sin 3x. \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$