Seria zadań z Analizy

Zadanie 1. Zbadać punktową, niemal jednostajną i jednostajnązbieżność ciągów funkcyjnych:
(a) $f_n(x) := \frac{n^2x}{1+n^3x^2}$ $x \in \mathbb{R}$ (b) $f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $x \in \mathbb{R}$ (c) $f_n(x) := \frac{1}{x+n}$ $0 < x < \infty$ (d) $f_n(x) := \sqrt[n]{1+x^n}$ $0 < x < 2$ (e) $f_n(x) := \frac{x^2}{n^2+(x-n)^2}$, $x \in \mathbb{R}$, (f) $f_n(x) := \frac{n^2}{n^2+(x-n)^2}$, $x \in \mathbb{R}$; (g) $f_n(x) := \frac{nx^3}{1+nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$, (h) $f_n(x) := \frac{nx-(n+1)x^2}{n-(n-1)x}$, $x \in [0,1]$, (i) $f_n(x) := \frac{n^2-x^2}{n^2+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, (j) $f_n(x) := \frac{1}{1+(x-n)^2}$, $x \in \mathbb{R}$, (k) $f_n(x) := \log(e^x + \frac{1}{n})$, $x \in \mathbb{R}$, (l) $f_n(x) := nxe^{-n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, (m) $f_n(x) := \frac{nx^2+(n+1)x}{nx+1}$, $x \in [0,1]$.

Zadanie 2. Zbadać zbieżność (punktową, jednostajną, niemal jednostajną) szeregu funkcyjnego:
(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2x}{n^7+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+nx^2}}{x+n^2}$, $x \in]0,\infty[$;
(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{1+n^5x^2}$, $x \in [0,\infty[$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$, $x \in [0,\infty[$;

Zadanie 3. Rozwijając funkcje podcałkowe w szereg wykazać że: (a) $\int_0^\infty \frac{xdx}{e^x-1} = \frac{\pi^2}{6}$ wsk.$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (b) $\int_0^\infty \log(1+e^{-x})dx = \frac{\pi^2}{12}$
(c) $\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos(kx)dx = \frac{\pi}{k!}$ $k = 1, 2, 3, ...$

Zadanie 4. Zbadać różniczkowalność odwzorowań i znaleźć pochodną (jeśli istnieje):
(a) $C[0,1] \ni f \mapsto f(1) + f(1/2)^2 \in \mathbb{R}$; (b) $C[0,1] \ni f \mapsto T(f) \in C[0,1]$: $(Tf)(x) := \int_0^x (1 + f^2(t))dt$; (d) $C[0,1] \ni f \mapsto \int_0^1 f(t)^3 dt \in \mathbb{R}$; (e) $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Zadanie 5. W obszarze $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ 0 < y < x\}$ wprowadzamy współrzędne $u(x,y) := x + y$, $v(x,y) := xy$. Zapisać wyrażenie

$$\mathcal{A}(f) := \frac{2}{(x-y)^2} \left(\frac{1}{2} (\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}) + \frac{1}{x-y} (\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)$$

w zmiennych (u,v).

Zadanie 6. Niech $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia równanie Laplace'a: $\Delta f = 0$ oraz $u, v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy C^2 spełniają równania: $u_x = v_y \ \ u_y = -v_x$. Wykazać, że $g(x,y) := f(u(x,y), v(x,y))$ spełnia równanie Laplace'a.

Zadanie 7. Wyznaczyć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem:

a) $f(x,y) = \sin(x+y) + 6\sin(x) + \sin(y)$

b) $f(x,y) = 17\sin(x+y) + 10\sin(x) + 17\sin(y)$

Zadanie 8. Wyznaczyć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : X \to \mathbb{R}$:

a) $X = \mathbb{R}^n_+$, $f(x) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n + \frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \ldots \frac{n}{x_n}$

b) $X = \mathbb{R}^n$, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$-dany, $f(x) = \dfrac{\sum_{i=1}^n a_i x_i}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}$

Zadanie 9. Znaleźć odległość punktu $(0, 0, 0)$ od powierzchni określonej równaniem $z = \dfrac{1}{xy}$.

Zadanie 10. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : X \to \mathbb{R}$:

a) $X = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$

b) $X = \mathbb{R}^3_+$, $f(x, y, z) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{x}{y}\right)\left(1 + \dfrac{y}{z}\right)(1 + z)$

Zadanie 11. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto z(x, y)$, zdefiniowanej niejawnie równaniem

a) $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)z^3 + xyz^2 + z - 2 = 0$

b) $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)z^3 + xyz^2 + 1 = 0$

c) $3z^3 - 7\cos(x + y) + \dfrac{20x}{x^2 + 1} = 0$

Zadanie 12. Znaleźć pochodną odwzorowania $(u(x, y), v(x, y))$ w punkcie $(x, y, u, v) = (1, 2, 3, 4)$ niejawnie danego równaniami $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y, u, v) = 0$ gdzie

$$F(x, y, u, v) = (x + y + u + v - 10, x^2 + y^2 + u^2 + v^2 - 30).$$