ANALIZA I
24 listopada 2014
Semestr zimowy
Kolokwium próbne

Javier de Lucas

Uwagi organizacyjne: każde zadanie rozwiązujemy na osobnej kartce. Każde zadanie należy podpisać imieniem i nazwiskiem własnym oraz prowadzącego ćwiczenia. Na wszelki wypadek prosimy też o podanie numeru grupy. Prosimy o sprawdzenie, czy telefon komórkowy jest wyłączony a kalkulator i inne pomoce naukowe (np. tablice matematyczne) schowane. W razie wątpliwości prosimy o kontakt z asystentem.

Zadanie 1. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność:

$$\binom{2n}{n} \geqslant \frac{4^n}{2\sqrt{n}}. \tag{1.1}$$

Rozwiązanie: Korzystamy z indukcji. Dla $n = 1$ mamy, że

$$\binom{2n}{n} = \frac{2!}{1!1!} = 2, \qquad \frac{4^n}{2\sqrt{n}} = \frac{4}{2} = 2.$$

Więc, wyraz (1.1) jest poprawny dla $n = 1$. Teraz załózmy, że (1.1) jest poprawny dla n i udowodnijmy, że (1.1) spełnia się dla $n+1$. Czyli spróbujemy udowodnić, że

$$\binom{2n}{n} \geqslant \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \Rightarrow \binom{2n+2}{n+1} \geqslant \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}.$$

Mamy, że

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 n!n!} = \binom{2n}{n}\frac{2(2n+1)}{n+1}.$$

Z hipotezy indukcyjnej

$$\binom{2n}{n}\frac{2(2n+1)}{n+1} \geqslant \frac{4^n}{2\sqrt{n}}\frac{2(2n+1)}{n+1}$$

Możemy to napisać troche inaczej, aby to będzie podobne do wzoru (1.1) dla $n+1$:

$$\frac{4^n}{2\sqrt{n}}\frac{2(2n+1)}{n+1} = \frac{4^n}{2\sqrt{n}}\frac{2(2n+1)}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} = \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}\frac{2(2n+1)}{4\sqrt{n(n+1)}} = \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}\frac{(2n+1)}{2\sqrt{n(n+1)}}.$$

Skoro $2ab \leqslant a^2 + b^2$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, to $2\sqrt{n(n+1)} \leqslant n + n + 1$ i

$$\binom{2n}{n}\frac{2(2n+1)}{n+1} \geqslant \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}\frac{(2n+1)}{2\sqrt{n(n+1)}} \geqslant \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}\frac{(2n+1)}{(n+n+1)} = \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}.$$

Z indukcji otrzymamy, że (1.1) jest poprawny dla $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ $\square$

Zadanie 2. Zbadaj zbieżność ciągów i znajdź ich granice jeśli istnieją:

1. $a_n = \left(1 + \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n}\right)^n$
2. $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$
3. $a_n = \sqrt{n^4 - n^3} - n^2$
4. $a_n = \frac{\cos^3 n^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{2n}$
5. $a_n = \sqrt[n]{1 + 2^n/n^2 + 3^n/n^3 + \ldots + k^n/n^k}$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+$
6. $a_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$

Rozwiązanie: a) Wybierając podciąg $\{a_{4k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ mamy, że $\lim_{k\to+\infty} a_{4k} = 1$. Natomiast, dla $n = 4k+1$ mamy, że $\lim_{k\to+\infty} a_{4k+1} = e$. Jeżeli granica $\lim_{n\to+\infty} a_n$ istnieje, granice wszystkich podcigów istnieją i są takie same. Skoro my udowodniliśmy, że istnieją dwa podciągi i mają różne granice, to ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nie ma granicy.

b)Mamy, że $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = e$ i $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq e$. Więc, mamy granicę ilorazu ciągu ograniczoneego przez ciąg dążacy do zera. Zatem

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Też można obliczyć tą granicę za pomocą Stolza. Skoro mianownik to ciąg rosnący, dązy do $+\infty$ i

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1/(n+1)!}{n+1-n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = 0.$$

c)Trywialna $+\infty$.

d) Widać, że

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos^3 n^n}{n!}, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$$

to granice ciągu ograniczonego, $b_n = \cos^3 n^n$ lub $c_n = (-1)^n$ przez ciąg dążący do $+\infty$. Więc,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos^3 n^n}{n!} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{2n} = 0.$$

Korzystając z tego

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\cos^3 n^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{2n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\cos^3 n^n}{n!} + \lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{2n} = 0.$$

Można też obliczyć tą granicę za pomocą twierdzenia trzych ciągów:

$$-\frac{1}{n!} - \frac{1}{2n} \leq \left(\frac{\cos^3 n^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{2n}\right) \leq \frac{1}{n!} + \frac{1}{2n}$$

Wtedy,

$$0 = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n!} - \frac{1}{2n} \leq \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\cos^3 n^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{2n}\right) \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n} = 0.$$

e) Mamy, że

$$\frac{l^n}{n^l} \leq \frac{(l+1)^n}{n^{l+1}} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{l}\right)^n \geq n \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{l} \geq \sqrt[n]{n}.$$

Skoro $\sqrt[n]{n}$ dąży do 1, to istnieje n_0 taki, że ostatnia nierówność spełnia się dla wszsystkich $l = 1, \ldots, k$ i $n > n_0$. Korzystając z tego

$$1 < \frac{2^n}{n^2} < \frac{3^n}{n^3} < \ldots < \frac{k^n}{n^k}.$$

Zatem,

$$\sqrt[n]{k^n/n^k} \leq \sqrt[n]{1 + 2^n/n^2 + 3^n/n^3 + \ldots + k^n/n^k} \leq \sqrt[n]{kk^n/n^k} = k\sqrt[n]{k/n^k}.$$

Z twierdzenia trzych ciągów

$$\lim_{n\to+\infty} k\sqrt[n]{1/n^k} \leq \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1 + 2^n/n^2 + 3^n/n^3 + \ldots + k^n/n^k} \leq \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{kk^n/n^k} = \lim_{n\to+\infty} k\sqrt[n]{k/n^k}.$$

Zatem

$$k \leq \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1 + 2^n/n^2 + 3^n/n^3 + \ldots + k^n/n^k} \leq k.$$

i

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1 + 2^n/n^2 + 3^n/n^3 + \ldots + k^n/n^k} = k.$$

□

Zadanie 3. Zbadaj zbieżność ciągu zadanego rekurencyjnie wzorem

$$x_1 = a, \ \ x_{n+1} = \frac{3}{4x_n + 1}, \qquad a > 0.$$

Zadanie 4. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^2$ z metryką

$$d(x, y) := \begin{cases} \|x - y\| & \operatorname{sgn} x_1 = \operatorname{sgn} y_1 \\ \|x\| + \|y\| & \operatorname{sgn} x_1 \neq \operatorname{sgn} y_1, \end{cases}$$

gdzie $\|x - y\| = d_e(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ jest metryką euklidesową. Opisać kule i odcinki w tej metryce.

Rozwiązanie: Kula o środek x i promień r to zbiór

$$K(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 | d(x, y) < r\}.$$

Możemy podzielić tą kulę w dwóch częściach: K_1 to zbiór punktów kuli $K(x, r)$ takich, że $\operatorname{sgn} x_1 = \operatorname{sgn} y_1$ i K_2 to zbiór punktów kuli takich, że $\operatorname{sgn} x_1 \neq \operatorname{sgn} y_1$. Jeżeli T_x to zbiór punktów takich $y \in \mathbb{R}^2$, że $\operatorname{sgn} x_1 = \operatorname{sgn} y_1 \neq 0$ i $K_e(x, r)$ to zwykła kula euklidesowa, mamy, że

$$K(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 | d(x, y) < r\} = K_1 \cup K_2 = (K_e(x, r) \cap T_x) \cup K_2.$$

Dla $\operatorname{sgn} x_1 = \operatorname{sgn} y_1 = 0$

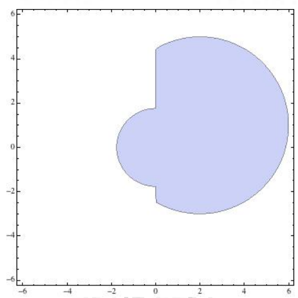
$$K(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 | d(x, y) < r\} = K_1 \cup K_2 = [x_2, y_2]_e \cap T_x) \cup K_2,$$

gdzie $[x_2, y_2]_e$ to zwykły odcinek euklidesowy.

Jeżeli $||x|| > r$ to K_2 jest pusty ponieważ dla każdego $y \notin T_x$ mamy, że $d(x, y) = ||x|| + ||y|| > r$. Jeżeli $||x|| < r$, to $d(x, y) = ||x|| + ||y|| < r$. Wtedy $y \in K_e(0, r - ||x||)$. Więc,

$$K(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 | d(x, y) < r\} = K_1 \cup K_2 = (K_e(x, r) \cap T_x) \cup (K_e(0, r - ||x||) \cap \bar{T}_x),$$

gdzie $\bar{T}_x$ to dopełnienia T_x.



Odcinek $[x, y]$ metryki d to zbiór punktów

$$[x, y] = \{z \in \mathbb{R}^2, d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\}.$$

• Napierw zakładamy, że $\mathrm{sgn}(x_1) = \mathrm{sgn}(y_1)$. Wówczas, d-odcinek to zwykły odcinek metryki euklidesowej, czyli to zbiór punktów między x i y. Taki odcinek nie zawiera elementów $z \notin T_x$ ponieważ wtedy

$$d(z, x) + d(z, y) = ||y|| + ||x|| + 2||z|| = ||y - x|| = d(x, y).$$

Ale $||y - x|| \leq ||y|| + ||z||$ więc, z powyższej równości 2||z||=0. Dodatkowo,

$$d(z, x) + d(z, x) = ||y|| + ||x|| = ||y - x|| = d(x, y)$$

wtedy i tylko wtedy gdy x i y są równoległe i mają różne kierunki. To się zdaża tylko dla $x_1 = y_1 = 0$. Ale wtedy z jest między x i y i nale zy do T_x.

• Jeżeli zakładamy, że $y \notin T_x$, to $d(x, y) = ||x|| + ||y||$, czyli

$$d(x, y) = ||x|| + ||y|| = d_e(x, 0) + d_e(0, y).$$

Wszystkie punkty z z x do 0, czyli $z \in [x, 0]_e$ gdzie $[a, b]_e$ to odcinek euklidesowy, spełniają $||x - z|| + ||z|| = ||x||$ i punkty z z y do 0, tj. $z \in [y, 0]_e$, spełniają, że $||y - z|| + ||z|| = ||y||$. Więc, takie punkty należą do tego odcinku $[x, y]$:

$$x \in [x, 0]_e \Rightarrow d(x, z) + d(z, y) = ||x - z|| + ||z|| + ||y|| = ||x|| + ||y|| = d(x, y)$$

albo

$$x \in [y, 0]_e \Rightarrow d(x, z) + d(z, y) = ||x|| + ||z|| + ||z - y|| = ||x|| + ||y|| = d(x, y).$$

Nie ma więcej punktów w $[x, y]$. Właśnie, dla dowolnego punktu $z \in T_x$:

$$d(x, z) + d(z, y) = ||x - z|| + ||z|| + ||y|| > ||x|| + ||y||.$$

Je zeli $T_x \notin z$ można cos podobnego otrzymać. □

Zadanie 5. Wykorzystując definicję Cauchy'ego granicy funkcji wykazać, że

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{8}{x-2}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}\right)=-1.$$

Rozwiązanie: Musimy udowodnić, że

$$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,0<|x-2|\Rightarrow|f(x)+1|<\epsilon,$$

gdzie

$$f(x)=\frac{8}{x-2}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}.$$

Więc, musimy ograniczyć

$$|f(x)+1|=\left|\frac{8}{x-2}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}+1\right|$$

za pomocą δ. Teraz, mamy, że

$$|f(x)+1|=\left|\frac{8}{x-2}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}+1\right|=\left|\frac{8-2\sqrt{2}(\sqrt{x}+\sqrt{2})+x-2}{x-2}\right|=\left|\frac{2-2\sqrt{2}\sqrt{x}+x}{x-2}\right|$$

i

$$|f(x)+1|=\left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2}{x-2}\right|=\left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}\right|=\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{x-2}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})^2}\right|\leq|x-2|$$

Wybierając $\delta=\epsilon$ to

$$|f(x)+1|\leq|x-2|<\delta=\epsilon.$$

wówczas, granica to -1. $\square$