ANALIZA I
24 listopada 2014
Semestr zimowy
Kolokwium próbne

Javier de Lucas

Zadanie 1. Udowodnij, że zbiór $A = \{2^k + 1 | k \in \mathbb{N}\}$ jest przeliczalny.

Taki zbiór ma nieskończenie wiele elementów. Więc, A jest przeliczalny wtedy i tylko wtedy gdy istnieje bijekcja $\phi : A \to \mathbb{N}$. Zdefiniujemy

$$\begin{array}{rccc} \phi: & A & \to & \mathbb{N} \\ & p & \mapsto & \log_2(p-1) \end{array}$$

Widać, że ϕ jest dobrze zdefiniowany. Jeżeli $p \in A$, o możemy udowodnić, że $\phi(p) \in \mathbb{N}$, Właśnie,

$$\phi(p) = \log_2(2^k + 1 - 1) = \log_2 2^k = k \in \mathbb{N}.$$

Funkcja ϕ jest injekcją:

$$\phi(p_1) = \phi(p_2) \Rightarrow \log_2(p_1-1) = \log_2(p_2-1) \to 2^{\log_2(p_1-1)} = 2^{\log_2(p_2-1)} \Rightarrow p_1-1 = p_2-1 \Rightarrow p_2 = p_1.$$

Funkcja ϕ jest surjekcją. Możemy udowodnić, że jeżeli $k \in \mathbb{N}$ to $\exists p \in A$ taki, że $\phi(p)$. Właśnie,

$$k \in \mathbb{N} \Rightarrow k = f(2^k + 1), \; p = 2^k + 1 \in A.$$

Zatem ϕ jest bijekcją i A jest przeliczalny.

Zadanie 2. Oblicz granicę ciągu rekurencyjnego

$$x_0 > 0, \qquad x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{2x_n}, \qquad n = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

Rozwiązanie: Widać. że $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ to ciąg liczb dodatnich. Własnie z indukcji widać, że dla $n = 0$ mamy $x_0 > 0$. Dodatkowo, jeżeli $x_n > 0$, to z relacji rekurencyjnej

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{2x_n} > 0 \Rightarrow x_{n+1} > 0.$$

Więc, z indukcji wynika, że $x_n > 0$ dla $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$.

Jeżeli $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę, to dla pewnego n mamy, że

$$x_{n+1} \simeq x_n \Leftrightarrow x_n \simeq \frac{1 + x_n}{2x_n} \Leftrightarrow 2x_n^2 - x_n - 1 = 0 \Leftrightarrow x_n \simeq \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2(-1)}}{4}$$
$$\Leftrightarrow x_n \simeq \frac{1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow \left(x_n \simeq 1 \vee x_n \simeq -\frac{1}{2}\right)$$

Skoro $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ to ciąg liczb dodatnich, to jeżeli $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę, to taka granica równa się 1.

Aby udowodnić czy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę spróbujemy zobaczyć czy ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest monotoniczny i ograniczony. Natomiast

$$x_{n+1} - 1 = \frac{1+x_n}{2x_n} - 1 = \frac{1-x_n}{2x_n}.$$

To oznacza, że jeżeli $x_n > 1$ to $x_{n+1} < 1$ i odwrotnie. Więc, x_n to nie ciąg monotoniczny!!!

Aby zbadać taki ciąg korzystamy z następującego wyniku:

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to b \Leftrightarrow (\{p_n := x_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}} \to b \ i \ \{o_n := x_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}} \to b)\,.$$

Zbadamy podciągi liczb parzystych $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i liczb nieparzystych $\{o_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ciągu $\{x_n\}$. Faktycznie, takie ciągi mają taką samą relacją rekurencyjną:

$$x_{n+2} = \frac{1+x_{n+1}}{2x_{n+1}} = \frac{1+\frac{1+x_n}{2x_n}}{2\frac{1+x_n}{2x_n}} = \frac{3x_n+1}{2+2x_n}.$$

czyli

$$p_{n+1} = \frac{3p_n+1}{2+2p_n} \qquad o_{n+1} = \frac{3o_n+1}{2+2o_n}.$$

Widać teraz, że taki ciąg jest ograniczony przez 1

$$p_{n+1} - 1 = \frac{3p_n+1-2-2p_n}{2+2p_n} = \frac{p_n-1}{2+2p_n}$$

Z tego wynika z indukcji, że jeżeli $p_0 > 1$ to $p_n > 1$ dla $n > 0$. Jednoczesniej, jeżeli $p_0 < 1$ to $p_n < 1$ dla $n > 0$. Więc, jeżeli $p_0 > 1$, to $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony z dół przez 1 i $p_0 < 1$, to $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony z góry przez 1.

Dodatkowo,

$$p_{n+1} - p_n = \frac{3p_n+1}{2+p_n} - p_n = -\frac{2(p_n-1)(p_n+1/2)}{2+2x_n}.$$

Więc, jeżeli $p_0 > 1$ to $p_n > 1$ dla każdego n i $p_{n+1} - p_n < 0$ i $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest malejący i ma wtedy granicę. Z powyższego wzoru, kiedy $p_n \simeq p_{n+1}$ to $p_n \simeq 1$. Czyli granica to 1.

Natomiast, jeżeli $p_0 < 1$ to $p_n < 1$ dla każdego n i $p_{n+1} - p_n > 0$ i $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący i ma wtedy granicę. Z powyższego wzoru, kiedy $p_n \simeq p_{n+1}$ to $p_n \simeq 1$. Czyli granica to 1.

Więc, ciąg $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny. Skoro $\{o_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ma taką samą relację rekurencyjną, to tez dązy do 1.

Skoro $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{o_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mają taką samą granicę, to $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dązy do 1. $\square$

Zadanie 3. Oblicz granice:

- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{(n+2)(n+4)(n+5)} - \sqrt[3]{n(n+1)(n+3)}$,
- $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$,
- $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{2n^2+5}$,
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$.

Zadanie 4. Sprawdź, czy następujące zbiory są domknięty czy otwarty:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2n+1}{n+1}, \frac{n^2+4n+1}{n^2+1}\right[\qquad B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left]-\frac{2n+1}{n+1}, \frac{n^2+4n+1}{n^2+1}\right[.$$

Zadanie 5. Udowodnij za pomocą definicji Cauchyego, że

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x+1}{2x+1} = \frac{7}{5}.$$

Rozwiązanie: Musimy udowodnić, że

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0,\ 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - \frac{7}{5} \right| < \epsilon.$$

Mamy, że

$$\left| \frac{x^2+x+1}{2x+1} - \frac{7}{5} \right| = \left| \frac{5x^2+5x+5-14x-7}{5(2x+1)} \right| = \left| \frac{5x^2-9x-2}{5(2x+1)} \right|.$$

Skoro

$$5x^2 - 9x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \, lub \; x = -\frac{1}{5},$$

to

$$\left| \frac{x^2+x+1}{2x+1} - \frac{7}{5} \right| = \frac{|x-2||x+1/5|}{|2x+1|}$$

dla $\delta < 1$ je.zeli to $|x-2| < \delta$ to $3 > x > 1$ i $2x+1 > 1$. Więc,

$$\left| \frac{x^2+x+1}{2x+1} - \frac{7}{5} \right| = \frac{|x-2||x+1/5|}{|2x+1|} < |x-2||x+1/5| < 4|x-2| = 4|x-2| < 4\delta.$$

Jeżeli $\delta < \epsilon/4$ to

$$\left|\frac{x^2+x+1}{2x+1} - \frac{7}{5}\right| < \epsilon.$$

$\square$