ANALIZA I
9 stycznia 2015
Semestr zimowy
II Kolokwium próbne

Javier de Lucas

Zadanie 1. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+2, & \text{gdy } x\le 0,\\ c\cos x+d, & \text{gdy } 0<x\le\frac{\pi}{2},\\ dp^{\cos x}+p-1, & \text{gdy } x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Dobrać parametry c,d,p tak, żeby ta funkcja była różniczkowalna na $\mathbb{R}$.

Zadanie 2. Oblicz granice:

- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\sinh(x)+x^8}{x^4\sin^3(x)}$, gdzie $\sinh(x)=(e^x-e^{-x})/2$,
- $\lim_{x\to-\pi/2}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x+3\sin x+1}$,
- $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$, $a,b>0$.

Zadanie 3. Udowodnij, że

$$e^x<\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+x/2}, \qquad x>0, n>0.$$

Zadanie 4. W trójkąt o podstawie a i wysokości h wpisano prostokąt w ten sposób, że jeden z boków prostokąta leży na danej podstawie trójkąta, a dwa pozostałe wierzchołki prostokąta leża na pozostałych boków trójkąta. Zbadać przebieg zmienności pola S tego prostokąta.

Zadanie 5. Oblicz szereg Taylora funkcji $(1+x)^{5/2}$ do czwartego rzędu (włącznie) z resztą Lagrange wokół $x_0=0$.