



ANALIZA I
21 października 2014
Semestr zimowy
Lista V



Granice ciągów
Javier de Lucas

Zadanie 1. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n}{n+1}, & u_n &= \frac{n^2-1}{3-n^2}, \\ u_n &= \frac{(2n-1)^2}{(4n-1)(3n+2)}, & u_n &= \frac{3}{n} - \frac{10}{\sqrt{n}}, \\ u_n &= \left(\frac{5n-2}{3n-1}\right)^3, & u_n &= \frac{(-1)^n}{2n-1}, \\ u_n &= \frac{2n+(-1)^n}{2n-1}, & u_n &= \frac{2-5n-10n^2}{3n+15}, \\ u_n &= \frac{\sqrt{1+2n^2}-\sqrt{1+4n^2}}{n}, & u_n &= \frac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2}, \\ u_n &= \frac{n}{\sqrt[3]{8n^3-n^2-n}}. \end{aligned}$$

Zadanie 2. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym: $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$,
 $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$, $u_n = 3n - \sqrt{9n^2+6n-15}$, $u_n = \sqrt[3]{n^3+4n^2} - n$.

Zadanie 3. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym: $u_n = \frac{4^{n-1}-5}{2^{2n-7}}$,
 $u_n = \frac{53^{2n}-1}{49^{n+7}}$, $u_n = \frac{2^{n+1}-3^{n+2}}{3^{n+2}}$, $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}-1}$.

Zadanie 4. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (typowe na trzy ciągi):

$$u_n = \sqrt[n]{3^n+2^n}, \quad u_n = \sqrt[n]{10^{100}} - \sqrt[n]{\frac{1}{10^{100}}}, \quad u_n = \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}.$$

Zadanie 5. Niech $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $x \in [-1, 1]$, $n \in \mathbb{N}_+$. Znaleźć $T_1(x)$. Posługując się tożsamością trygonometryczną $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2 \cos A \cos B$ pokazać, że $T_2(x) = 2x^2 - 1$ oraz, że $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$.

Zadanie 6. Oblicz granicę ciągu określonego rekurencyjnie: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$.

Zadanie 7. Zbadać zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie: $x_0 > 0$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$.

Zadanie 8. Znaleźć granicę ciągu danego wzorem rekurencyjnym: $a_{n+1} = \frac{6}{2a_n+1}$, $a_0 > 0$.