ANALIZA I

5 i 9 grudnia 2014

Semestr zimowy

Lista XIII

Zastosowania pochodnych

Javier de Lucas

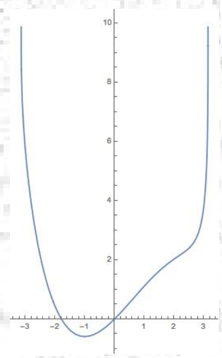
Zadanie 1. Dla funkcji $f(x) = \frac{x(x-3)(x-8)}{7}$, $x \in [2,9]$, znaleźć najmniejszą i największą wartość (rozwiązujemy badając monotoniczność funkcji, bo nie mamy jeszcze twierdzeń o drugiej pochodnej).

Zadanie 2. Dla $x \in [0, 2\pi]$ znaleźć przedziały, dla których funkcja $y(x) = x - 2\sin x$ jest rosnąca.

Zadanie 3. Suma obwodów kwadratu o boku a i koła o promieniu r wynosi 240. Ile wynosi r, jeżeli suma pól powierzchni osiaga wtedy minimum?

Zadanie 4. Krzywą definiujemy jako zbiór punktów (x, y), gdzie $x := t^2 + \sin(2t)$ a $y = t + \sin(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Znaleźć równanie stycznej do krzywej w punkcie, dla którego $t = 0$

Rozwiązanie: Nasza krzywa ma postać $(x(t), y(t))$. Właśnie wygląda następująco:



Lokalnie, możemy powiedzieć, że ta krzywa to jest wykres pewnej funkcji $y = y(x)$. Dla $t = 0$ mamy, że $x(0) = 0$ i $y(0) = 0$. Równanie stycznej do $y = y(x)$ w punkcie (x_0, y_0) ma postać

$$y - y_0 = \frac{dy}{dx}(x_0)(x - x_0)$$

W naszym przypadku $x_0 = x(0) = 0$ i $y_0 = y(0) = 0$. Więc, równanie prostej stycznej do krzywej to

$$y = \frac{dy}{dx}(0)x.$$

Aby obliczyć pochodną pamiętamy, ze

$$\frac{dy}{dx}(x(t)) = \frac{\frac{dy}{dt}(t)}{\frac{dx}{dt}(t)} = \frac{1 + \cos t}{2t + 2\cos 2t}.$$

Dla $t = 0$

$$\frac{dy}{dx}(x(t)) = \frac{2}{2} = 1.$$

Zatem, równanie stycznej do naszej krzywej dla $t = 0$ to

$$y = x.$$

□

Zadanie 5. Znaleźć wartości a, dla których prosta $9x - y = 14$ jest styczna do krzywej $y(x) = x^3 - 3x + a$ w punkcie $x = a$.

Zadanie 6. W koło o promieniu r wpisano prostokąt, Zbadać przebieg zmienności pola S tego prostokąta.

Zadanie 7. W półkole o promieniu r wpisano trójkąt równoramienny, którego wierzchołek leży w środku koła. Zbadać przebieg zmienności pola S tego trójkąta.

Zadanie 8. Pas do lądowania ma 2 km. Samolot ląduje na pasie. Odległość między hamującym samolotem a początkiem pasa opisuje wzór: $s = c + 100t - 4t^2$, gdzie t mierzymy w sekundach od momentu lądowania a c jest odległością miedzy punktem przyziemienia a początkiem pasa. Niech $c = 800m$. Znajdź odległość, jaką przebył samolot po 5. sekundach. Znajdź wzór na prędkość samolotu. Znajdź punkt P, w którym prędkość samolotu wynosiła 36 m/s. okaż, że jeżeli samolot wyląduje przed punktem P, to zatrzyma się przed końcem pasa startowego.

Zadanie 9. Wykazać, że dla dowolnego $x \in]-1, +\infty[$ spełniona jest równość:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}.$$

Rozwiązanie: Widać, że funkcja

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x},$$

jest ciągła dla $x \in]-1, +\infty[$.

Dodatkowo, ta funkcja jest różniczkowalna i ma pochodną

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{(1+x)^2+(1-x)^2} = 0.$$

Skoro $f'(x) = 0$ i funkcja jest stała dla $x \in]-1, +\infty[$. Dodatkowo, mamy, że

$$f(0) = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Zatem $f(x) = \pi/4$ dla $x \in]-1, +\infty[$. $\square$

Zadanie 10. Wiedząc, że $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, wyprowadzić wzory na pochodne funkcji odwrotnych do x^2, e^x, $\sin(x)$, $\operatorname{tg}(x)$, $\cosh(x)$, $\sinh(x)$, $\operatorname{tgh} x$.