ANALIZA I
11 stycznia 2015
Semestr zimowy
Lista XIV

Funkcje pierwotne i Reguła de L'Hôspitala

Javier de Lucas

Zadanie 1. Korzystając ze znajomości pochodnych, znaleźć funkcję pierwotną dla następujących funkcji (nie mamy jeszcze symbolu $\int$) x^a, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$, x^2, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x}$, $\cos x$, $\frac{1}{\cos^2 x}$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{1}{1+x^2}$, $\sinh x$, $\frac{1}{\cosh(x)}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Zadanie 2. Korzystając z własności pochodnych, znaleźć funkcję pierwotną dla następujących funkcji: $f(x) = 5x^2 - 6x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}$, $f(x) = \frac{(x^2-1)^3}{x}$, $h(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}}$.

Zadanie 3. Korzystając ze wzoru na pochodną funkcji złożonej policzyć funkcję pierwotną dla następujących funkcji: $f(x) = \sqrt{3x+1}$, $f(x) = \sqrt{a+bx}$, $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$, $f(x) = \frac{x}{3-5x^2}$, $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[5]{x^3+1}}$, $f(x) = xe^{-x^2}$, $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$, $f(x) = \cos x e^{\sin x}$, $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$, $f(x) = \frac{x^2}{\cos^2(x^3+1)}$.

Zadanie 4. Obliczyć granice $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$, $\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-e^{-x})^2}{x^2\cos x}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{\ln x}}{x^c}$ dla $a, c > 0$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin x - \cos x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{2x-1}$, $\lim_{x\to\alpha} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2\alpha}\right)\left(e^{\sin\alpha} - e^{\sin x}\right)$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\ln x}{x}$, $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}\right)$, $\lim_{x\to+\infty}(\pi - 2\operatorname{arctg} x)\ln x$, $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\ln(1-x)$.

Rozwiązanie: Ogólnie, będziemy obliczyli te granice korzystając z reguła L'Hôspitala. Ta reguła, w jednej z ich wersji, ustala, że jeżeli $f : (c, x_0] \to \mathbb{R}$ i $g : (c, x_0] \to \mathbb{R}$ są funkcjami różniczkowalnymi na (c, x_0) i po lewej stronie w x_0 i $g'(x) \neq 0$ dla $(c, x_0]$ i

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to x_0^+} g(x) = 0$$

lub

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to x_0^+} g(x) = \pm\infty,$$

to jeżeli istnieje granica

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

wtedy

$$\lim_{x\to x_1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ważne pamiętać, że jeżeli nie istnieje $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, to nie można powiedzieć nic ani o wartości ani o istnieniu granicy

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Istnieją różne wersje tego wyniku. Na przykład, istnieje podobny wynika dla przydział $[x_0, c)$ i $(a, c) \ni x_0$. Chociaż ustaliliśmy kikla warunków dla funkcji f, g, np. $g'(x_0) \neq 0$, można napisać inne wersje reguły L'Hôspitala których nie wymagają wielu z poprzednich warunków.

Obliczmy granicę:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

Licznik $f(x) = e^x - e^{-x}$ i mianownik $g(x) = x$ spełniają wszystkie warunki na $(-\epsilon, \epsilon) \ni 0$. Dodatkowo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1} = 2 \overset{\text{L'H}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1} = 2.$$

Opiszmy inną wersję reguły L'Hôspitala. Jeżeli $f : [x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ i $g : [x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ są funkcjami różniczkowalnymi na $[x_0, +\infty)$ i po prawej stronie w x_0 i $g'(x) \neq 0$ dla $[x_0, +\infty)$ i

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$$

lub

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} g(x) = \pm\infty$$

to jeżeli istnieje granica

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

to

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ważne pamiętać, że jeżeli nie istnieje $\lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, to nie można powiedzieć nic ani o wartości ani o istnieniu granicy

$$b)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Istnieją różne podobne wersje tego wyniku. Na przykład, dla $(-\infty, x_0]$. Obliczmy teraz następującą granicę:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Licznik $f(x) = \ln(x)$ i mianownik $g(x) = \sqrt{x^2-1}$ spełniają wszystkie warunki dla $[2,+\infty)$. Dodatkowo,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{x/\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} = 0.$$

Od tego momentu, zakładamy, że wszsytkie warunki pewnego typu reguły L'Hôspitala spełniają się i po prostu obliczymy wszsytkie granice.

$$c)\ \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - e^{-x})^2}{x^2\cos x} = \left[\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x\sqrt{\cos x}}\right]^2 \stackrel{\mathrm{L'H}}{=} \left[\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\sqrt{\cos x} - x\cos^{-1/2} x \sin x/2}\right]^2 = 4.$$

Warto zauważyć, że można zmienić kolejność pierwiastku i granicy ponieważ potenga do kwadratu jest funkcją ciągłą. W następnym przypadku, reguła L'Hôspitala nie pomoże rozwiązać granicę

$$d)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{a^{\ln x}}{x^c} \stackrel{\mathrm{L'H}}{=} \frac{a^{\ln x}\ln(a)}{cx^c}$$

i to ostatnie wyrażenie jest prawie to samo co wcześniej. Aby rozwiązać taką granicę, robimy tak. Skoro $\ln y$ to ciągła funkcja, to zdefiniujemy

$$A \equiv \ln \lim_{x\to+\infty} \frac{a^{\ln x}}{x^c} = \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{a^{\ln x}}{x^c} = \lim_{x\to+\infty} \ln x \ln a - c\ln x = \lim_{x\to+\infty} \ln x(\ln a - c)$$

Jeżeli $\ln a = c$ to $A = 0$. Dla $\ln a > c$ to $A = +\infty$ i jeżeli $\ln a < c$ to $A = -\infty$. Skoro

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{\ln x}}{x^c} = e^A$$

i $h(x) = e^x$ to funkcja rosnąca, to

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{\ln x}}{x^c} = 1,\ \text{dla } a = e^c, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{a^{\ln x}}{x^c} = +\infty,\ \text{dla } a > e^c.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{\ln x}}{x^c} = 0,\ \text{dla } a < e^c.$$

Kolejna granica można rozwiązać bez reguły L'Hôspitala:

$$e)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin x - \cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos x(\sin x - \cos x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} = \sqrt{2}.$$

W następnym pryzpadku mamy:

$$f)\ \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

Z ciekawości można powiedzieć, że w tym przypadku nie można zastosować reguły L'Hôspitala dana na początku ponieważ pochodna mianownika zeruje się w punkcie $x = 0$. Natomiast, istnieją inne regułe, np. jeżeli $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, dla $x_0 \in (a, b)$, są taki, że f i g są różniczkowalne do rzędu n (pochonde są skończone) i $f(a) = f^{1)}(a) = \ldots = f^{n-1)} = g(a) = g^{1)}(a) = \ldots = g^{n-1)}(a) = 0$, $g^{n)}(a) \neq 0$ i $g(x) \neq 0$ dla $x \in (a, b)\backslash\{0\}$, to

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{n)}(x)}{g^{n)}(x)},$$

gdzie przyponminamy, że $f^{n)}$ to pochodna rzędu n funkcji f. W ogólności te warunki prawie zawsze sią spełniają. Jedynym kluczowym warunekiem jest istnienie granicy pochodnych licznika i mianownika. W rzeczewistości można wtedy zastosować jak w tym przypadku regułę L' Hôpitala rekurencyjnie.

$$g)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{2x - 1} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x \sin\frac{1}{x} - 2\cos\frac{1}{x}}{2} = \lim_{x\to+\infty} x \sin\frac{1}{x} - 1$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} - 1 \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \cos\frac{1}{x} - 1 = 0.$$

Aby obliczyć

$$h)\ \lim_{x\to\alpha} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2\alpha}\right)\left(e^{\sin\alpha - e^{\sin x}}\right)$$

zauważamy, że

$$\lim_{x\to\alpha}(e^{\sin\alpha - e^{\sin x}}) = e^{\sin\alpha - e^{\sin\alpha}} > 0, \qquad \lim_{x\to\alpha^+} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2\alpha}\right) = -\infty, \qquad \lim_{x\to\alpha^-} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2\alpha}\right) = +\infty.$$

Korzystając z tego

$$\lim_{x\to\alpha^+} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2\alpha}\right)(e^{\sin\alpha - e^{\sin x}}) = -\infty, \quad \lim_{x\to\alpha^-} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2\alpha}\right)(e^{\sin\alpha - e^{\sin x}}) = +\infty.$$

Zatem,

$$\lim_{x\to\alpha} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2\alpha}\right)(e^{\sin\alpha - e^{\sin x}})$$

nie istnieje ponieważ granice po prawej i po lewej stronie są różne.

Kolejne granice:

$$i) \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\ln x}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\ln x} = 0.$$

$$j) \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\ln x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1} -x = -1.$$

W następnym przypadku otrzymamy nieoznaczoność:

$$k) \lim_{x\to+\infty}(\pi - 2\operatorname{arctg} x)\ln x = 0\cdot\infty.$$

Aby to rozwiązać wysztarcza napisać funkcję inaczej i zastosować jakąś regułę L'Hôspitala:

$$\lim_{x\to+\infty}(\pi - 2\operatorname{arctg} x)\ln x = \lim_{x\to+\infty}\frac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{1/\ln x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{1+x^2}}{-1/(x\ln^2 x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x\ln^2 x}{1+x^2}.$$

Zatem z L'Hôspitala

$$\lim_{x\to+\infty}(\pi - 2\operatorname{arctg} x)\ln x \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x + 2\ln x}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x} + \frac{2}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = 0.$$

Mamy, że

$$l) \lim_{x\to 1^-}(1-x)\ln(1-x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{1-x}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{(1-x)^2}} = \lim_{x\to 1^-} 1-x = 0.$$

□

Zadanie 5. Obliczyć granice: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$, $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sin x}\right)$, $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$, $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Rozwiązanie: Obliczymy pierwszą granicę:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)=\infty-\infty.$$

Otrzymamy nieoznaczoność. Skoro ta granica nie ma postać $f(x)/g(x)$ nie można zastosować reguły L'Hôspitala. Z tego powodu, wprowadzamy granicę do takiej postaci:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}\right).$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}\right) &\overset{\mathrm{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin x\cos x-2x\cos^2 x+2x^2\cos x\sin x}{2x\sin^2 x+2x^2\sin x\cos x}\right)\\
&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x^2)\sin 2x-2x\cos^2 x}{2x\sin^2 x+x^2\sin 2x}\right)\\
&\overset{\mathrm{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin 2x+2(1+x^2)\cos 2x-2\cos^2 x+2x\sin 2x}{2\sin^2 x+2x\sin 2x+2x\sin 2x+2x^2\cos 2x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{4x\sin 2x+(1+2x^2)\cos 2x-1}{1+4x\sin 2x+(2x^2-1)\cos 2x}\\
&\overset{\mathrm{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(1-2x)\sin 2x+6x\cos 2x}{(3-2x^2)\sin 2x+6x\cos 2x}\\
&\overset{\mathrm{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{-(-12x-2)\sin 2x+(8-4x)\cos 2x}{-16x\sin 2x+(12-4x^2)\cos 2x}\right)=\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

W następnym przypadku nie trzeba korzystać z L'Hôspitala:

$$b)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{x+1}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{1+x}=-\frac{1}{2}.$$

Natomiast, w następnej granicy warto korzystać z L'Hôspitala rekurencyjnie:

$$c)\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x^3}{x^3\sin x}\overset{\mathrm{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-3x^2}{3x^2\sin x+x^3\cos x}$$
$$\overset{\mathrm{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-6x}{6x\sin x+6x^2\cos x-x^3\sin x}$$
$$\overset{\mathrm{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x-6}{6\sin x+18x\cos x-9x^2\sin x-x^3\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x-6}{(6-9x^2)\sin x+x(18+x^2)\cos x}$$

Widać, że

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-\cos x-6}{(6-9x^2)\sin x+x(18+x^2)\cos x}=+\infty,$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{-\cos x-6}{(6-9x^2)\sin x+x(18+x^2)\cos x}=-\infty.$$

Zatem

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sin x}\right)$$

Nie istnieje.

W naszym przypadku:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=1^\infty.$$

Aby obliczyć taką granicę, korzystamy, że $\ln y$ to ciągła funkcja:

$$\ln\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\operatorname{tg} x}{x}\overset{\mathrm{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\operatorname{tg} x}\left[\frac{x}{\cos^2 x}-\operatorname{tg} x\right]\frac{1}{x^2}}{2x}.$$

$$\ln\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}\left[\frac{x}{\cos x}-\sin x\right]\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\cos x}-\sin x}{2x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x/2}{x^2\sin 2x}.$$

Zatem

$$\ln\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\overset{\mathrm{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2x\sin 2x+2x^2\cos 2x}.\overset{\mathrm{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{(2-4x^2)\sin 2x+8x\cos 2x}.$$

Wówczas

$$\ln \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{4\cos 2x}{(12-8x^2)\cos 2x - 24x\sin 2x} = \frac{1}{3}$$

i

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{3}}.$$

□

Zadanie 6. Obliczyć granice:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3},\qquad \lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1},\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x-1}{x(a-1)}\right)^{\frac{1}{x}},\quad a>0, a\neq 1.$$

Rozwiązanie:

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}\text{L'H}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{6x} = -\frac{1}{6}.$$

$$b)\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{1+\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}\frac{2x(1+x^2)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2}}{1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{4x}{(x^2+1)^2+(x^2-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{4x}{2x^2+2} = 1.$$

Aby obliczyć granicę

$$c)\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x-1}{x(a-1)}\right)^{\frac{1}{x}}$$

korzystamy z tego, że lny to funkcja ciągła i

$$\ln\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x-1}{x(a-1)}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{a^x-1}{x(a-1)}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x-1}{x(a-1)}\right)$$

Zatem,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x-1}{x(a-1)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left[\ln\left(\frac{a^x-1}{x}\right)-\ln(a-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x-1}{x}\right)$$
$$\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{a^x-1}-\frac{1}{x}=\ln a.$$

Wówczas,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x-1}{x(a-1)}\right)^{\frac{1}{x}}=a.$$

□

Zadanie 7. Czy mozna zastosować regułe de l'Hospitala do obliczenia następujących granic?

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{2x+\sin x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sin(2x)+1}{(2x+\sin(2x))(\sin x+3)^2},\quad \lim_{x\to0^+}\left(2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right)^x.$$

Rozwiązanie:Możemy przypominać, że reguła L'Hôspitala ustala, że pod pewnymi warunkami można obliczyć granicę

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

pod warunkiwm, że istnieje granica

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Jednoczesnie, jeżeli ta granica nie istnieje, to nie możemy obliczyć pierwotnej granicy za pomocą reguły L'Hôspitala.

Natomiast, w pierwszym przypadku mamy, że

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos x}{2+\cos x}$$

nie istnieje. Więc, nie możemy korzystać z reguły L'Hôspitala, aby oblizcyć

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{2x+\sin x}$$

Natomiast, możemy obliczyć tą granicę inaczej:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{2x+\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sin x/x}{2+\sin x/x}=\frac{1}{2}.$$

W drugim przypadku, mamy podobne wynik. Dana granica

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sin(2x)+1}{(2x+\sin(2x))(\sin x+3)^2}$$

otrzymamy, że

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+2\cos(2x)}{(2+2\cos(2x))(\sin x+3)^2+(2x+\sin(2x))2(\sin x+3)\cos x}$$

nie istnieje. Właśnie, dla $x=k\pi$ mamy

$$A=\lim_{k\to+\infty}\frac{2+2}{(2+2)9+(2k\pi)2(+3)(-1)^k}=0$$

Właśnie, dla $x=\pi/2+2k\pi$ mamy

$$A=\lim_{k\to+\infty}\frac{2+2}{(2+2)4^2}=0$$

$\square$

Zadanie 8. Udowodnić, że prawdziwa jest nierówność (Jensen dla $f(x)=\frac{1}{x}$):
$\frac{n^2}{x_1+\cdots+x_n}\leq\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n},\quad x_1,\ldots,x_n>0$