**ANALIZA I**
**20 stycznia 2015**
**Semestr zimowy**
**Lista XVII**

# Kryterium zbieżności I

**Javier de Lucas**

**Zadanie 1.** Zbadać przebieg zmienności funkcji:

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}, \quad f(x) = \frac{2x+1}{x-4} \quad , f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2},$$

$$f(x) = \frac{x^2-6x+13}{x-3}, \quad f(x) = 4x - \operatorname{tg}(x), x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

*Rozwiązanie*: Zbadamy funkcję

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} = \frac{x^2+4}{2x}.$$

Zamin zaczynamy, warto zauważyć, że funkcja $f$ jest nieparzysta, czyli $f(-x) = -f(x)$. To będzie nam pomagał, aby ustalić właściwości funkcji.

**Dziedzina:**

Najpierw, ustalamy dziedzina. Funkcja $f$ jest dobrze określona wtedy i tylko wtedy gdy mianownik nie zeruje się, czyli dla $x \neq 0$. Zatem $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

**Miejscia zerowe:** Funkcja nie ma miejsc zerowych ponieważ $f(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $x^2 + 2 = 0$, ale $x^2 + 2 \neq 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.

**Monotoniczność i punkty krytyczne:** Sprawdzamy pochodną funkcji:

$$\frac{df}{dx} = \frac{2x2x - (x^2+4)2}{4x^2} = \frac{2x^2-8}{4x^2} = \frac{x^2-4}{2x^2}.$$

Aby sprawdzić monotoniczność, sprawdzamy znak tej pochodnej. Mamy, że funkcja $f$ jest rosnąca kiedy $df/dx > 0$, czy dla

$$x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow |x| > 2$$

i funkcja $f$ jest malejąca kiedy $df/dx < 0$, czyli dla

$$x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow |x| < 2.$$

Punkty krytyczne to są punkty gdzie pierwsza pochodna się zeruje. W naszym przypadku pochodna zeruje się gdy $x^2 - 4 = 0$. Więc, mamy dwa punkty krytyczne $x = -2$ i $x = 2$.

Funkcja $f$ rośnie przed punktem $x = -2$ i maleje po $x = -2$. To oznacza, że $x = -2$ to maksimum lokalne. W tym punkcie $f(-2) = -2$.

Funkcja $f$ maleje przed punktem $x = 2$ i rośnie po punkcie $x = 2$. Zatem $x = 2$ to minimum lokalne. Ponadto, skoro funkcja jest nieparzysta, jeżeli funkcja ma minimum lokalne w $x = 2$, to ma mieć maksimum lokalne w $x = -2$. W tym punkcie $f(2) = 2$.

**Wypukłość, wklęsłość i punkty przegięcia:**

Aby zbadać wypukłość, wklęsłość i punkty przegięcia musimy obliczyć drugą pochodną:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{2x2x^2 - (x^2 - 4)4x}{4x^4} = \frac{4}{x^3}.$$

Funkcja jest wypukła kiedy prosta styczna do wykresu jest poniższej wykresu. Kiedy funkcja jest dwa razy różniczkowalna, to funkcja jest wypukła kiedy druga pochodna jest dodatnia. W naszym przypadku, druga pochodna jest dodatnia dla $x > 0$, i $f$ jest wtedy wypukła dla $x \in ]0, +\infty[$.

Funkcja jest wklęsłakiedy prosta styczna do wykresu jest powyższej wykresu. Kiedy funkcja jest dwa razy różniczkowalna, to funkcja jest wklęsła kiedy druga pochodna jest ujemna. W naszym przypadku, druga pochodna jest ujemna dla $x < 0$, i $f$ jest wtedy wklęsła a dla $x \in ] - \infty, 0[$.

Punkt przegięcia to punkt taki, że funkcja jest wypukła przed punktem i wklęsła pożniej lub odwrotnie. Jeżeli funkcja jest różniczkowalna trzeciego stopnia, to taki punkt $x_0$ spełniający, że $f''(x_0) = 0$ i $f'''(x_0) \neq 0$, jest punktem przegięcia. Natomiast, to nie warunek konieczny, tylko wystarczający. Jeżeli funkcja jest różniczkowalna trzeciego stopnia, każdy punkt przegięcia spełnia, że $f''(x_0) = 0$, ale to tylko warunek konieczny.

W naszym przypadku, funkcja $f$ jest równiczkonalna trzeciego stopnia w swojej dziedzinej, ale nie ma punktów przegięcia.

**Asymptoty:**

Mamy trzy rodzaje asymptot.

**Asymptoty pionowe;**

Mamy asymptoty pionowe w punkcie $x_0$ kiedy $\lim_{x\to x_0^+} f = \pm\infty$ i $\lim_{x\to x_0^-} f = \pm\infty$. Czaszami mówi się, że mamy asymptotę po prawie stronej kiedy $\lim_{x\to x_0^+} f = \pm\infty$ i po lewej stronej kiedy $\lim_{x\to x_0^-} f = \pm\infty$. Asymptot trzeba szukach w punktach gdzie $f$ dązy do niskończoności, np. w punktach gdzie $f$ jest ilorazem dwóch funkcji i mianownik zeruje się.

W naszym przypadku mamy, że

$$\lim_{x\to 0^+} f = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} f = -\infty.$$

Zatem, mamy asymptotę pionową w punkcie $x = 0$.

**Asymptoty poziome:**
Mamy asymptoty poziome $y = c$ dla $x \to +\infty$ kiedy

$$\lim_{x\to+\infty} f = c \in \mathbb{R}$$

i mamy asymptoty poziome $y = c$ dla $x \to -\infty$ kiedy

$$\lim_{x\to-\infty} f = c \in \mathbb{R}.$$

W naszym przypadku mamy, że

$$\lim_{x\to+\infty} f = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f = -\infty.$$

Więc, nie mamy takich asymptot.
**Asymptoty ukośne:**
Mówimy, że funkcje $f$ ma asymptotę ukośną $y = ax + b$ dla $x \to +\infty$ gdy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) - xa = b \in \mathbb{R}.$$

Podobnie, mówimy, że funkcje $f$ ma asymptotę ukośną $y = ax + b$ dla $x \to -\infty$ gdy

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) - xa = b \in \mathbb{R}.$$

Widać, że w naszym przypadku

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

i

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4}{2x^2} - \frac{1}{2}x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4-x^2}{2x^2} = 0.$$

Zatem mamy asymptotę ukośną $y = x$ dla $x \to +\infty$.

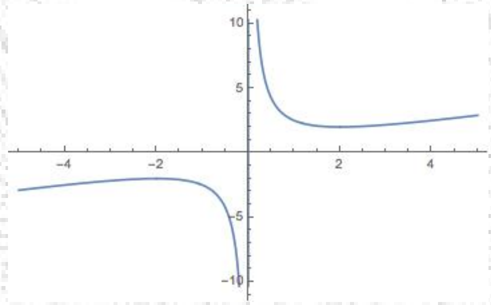
Podobnie

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

i

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-\frac{1}{2}x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4}{2x^2}-\frac{1}{2}x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4-x^2}{2x^2}=0.$$

Więc mamy asymptotę ukośną $y=x$. Rysunek funkcji wygląda następująco




Zbadamy funkcję

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}=1-\frac{6x}{x^2+3x+2}.$$

**Dziedzina:**

Najpierw, ustalamy dziedzina. Funkcja $f$ jest dobrze określona wtedy i tylko wtedy gdy mianownik nie zeruje się, czyli dla $x^2+3x+2\neq 0$. Skoro $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$, to $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,-2\}$.

**Miejscia zerowe:** Funkcja nie ma miejsc zerowych ponieważ $f(x)=0$ wtedy i tylko wtedy gdy $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)=0$. Więc, $x=2$ i $x=1$ są miejscami zerowymi funkcji $f$.

**Monotoniczność i punkty krytyczne:** Sprawdzamy pochodną funkcji:

$$\frac{df}{dx}=-\frac{6(x^2+3x+2)-6x(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2}=\frac{6(x^2-2)}{(x^2+3x+2)^2}.$$

Aby sprawdzić monotoniczność, sprawdzamy znak tej pochodnej. Mamy, że funkcja $f$ jest rosnąca kiedy $df/dx>0$, czy dla

$$x^2-2>0\Leftrightarrow|x|>\sqrt{2}$$

i funkcja $f$ jest malejąca kiedy $df/dx<0$, czyli dla

$$x^2-2<0\Leftrightarrow|x|<\sqrt{2}.$$

Punkty krytyczne to są punkty gdzie pierwsza pochodna się zeruje. W naszym przypadku pochodna zeruje się gdy $x^2 - 2 = 0$. Więc, mamy dwa punkty krytyczne $x = -\sqrt{2}$ i $x = \sqrt{2}$.

Funkcja $f$ rośnie przed punktem $x = -\sqrt{2}$ i maleje po $x = -\sqrt{2}$. To oznacza, że $x = -\sqrt{2}$ to maksimum lokalne. W tym punkcie $f(-\sqrt{2}) = (4 + 3\sqrt{2})/(4 - 3\sqrt{2})$.

Funkcja $f$ maleje przed punktem $x = \sqrt{2}$ i rośnie po punkcie $x = \sqrt{2}$. Zatem $x = \sqrt{2}$ to minimum lokalne. W tym punkcie $f(2) = (4 - 3\sqrt{2})/(4 + 3\sqrt{2})$.

**Wypukłość, wklęsłość i punkty przegięcia:**

Aby zbadać wypukłość, wklęsłość i punkty przegięcia musimy obliczyć drugą pochodną:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = \frac{(x+1)-(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{3}{(x-2)(x+1)}.$$

Funkcja jest wypukła kiedy prosta styczna do wykresu jest poniższej wykresu. Kiedy funkcja jest dwa razy różniczkowalna, to funkcja jest wypukła kiedy druga pochodna jest dodatnia. W naszym przypadku, druga pochodna jest dodatnia dla $(x-2)(x+1) > 0$, i $f$ jest wtedy wypukła dla $x \in ]-\infty, -1[ \cup ]2, +\infty[$.

Funkcja jest wklęsłakiedy prosta styczna do wykresu jest powyższej wykresu. Kiedy funkcja jest dwa razy różniczkowalna, to funkcja jest wklęsła kiedy druga pochodna jest ujemna. W naszym przypadku, druga pochodna jest ujemna dla $(x-2)(x+1) < 0$, i $f$ jest wtedy wklęsła a dla $x \in ]-1, 2[$.

Punkt przegięcia to punkt taki, że funkcja jest wypukła przed punktem i wklęsła pożniej lub odwrotnie. Jeżeli funkcja jest różniczkowalna trzeciego stopnia, to taki punkt $x_0$ spełniający, że $f''(x_0) = 0$ i $f'''(x_0) \neq 0$, jest punktem przegięcia. Natomiast, to nie warunek konieczny, tylko wystarczający.

W naszym przypadku, mamy, że druga pochonda zeruje się dla $x = 2$ i $x = 1$. NAtomiast, $x = 1$ ni należy do dziedziny, więc odpada. Natomiast druga pochodna zmienia znak wokół $x = 2$, gdzie zeruje się. Wówczas, jedyne punkt przegięcia to $x = 2$.

**Asymptoty:**

Mamy trzy rodzaje asymptot.

**Asymptoty pionowe;**

Mamy asymptoty pionowe w punkcie $x_0$ kiedy $\lim_{x\to x_0^+} f = \pm\infty$ i $\lim_{x\to x_0^-} f = \pm\infty$. Czaszami mówi się, że mamy asymptotę po prawie stronej kiedy $\lim_{x\to x_0^+} f = \pm\infty$ i po lewej stronej kiedy $\lim_{x\to x_0^-} f = \pm\infty$. Asymptot trzeba szukach w punktach gdzie $f$ dązy do niskończoności, np. w punktach gdzie $f$ jest ilorazem dwóch funkcji i mianownik zeruje się.

W naszym przypadku mamy, że

$$\lim_{x\to 2^+} f = +\infty, \qquad \lim_{x\to 2^-} f = -\infty.$$

Zatem, mamy asymptotę pionową $x = 2$.

Ponadto mamy, że
$$\lim_{x\to 0^+} f = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} f = -\infty.$$
Zatem, mamy asymptotę pionową $x = 0$.

**Asymptoty poziome:**

Mamy asymptoty poziome $y = c$ dla $x \to +\infty$ kiedy
$$\lim_{x\to +\infty} f = c \in \mathbb{R}$$
i mamy asymptoty poziome $y = c$ dla $x \to -\infty$ kiedy
$$\lim_{x\to -\infty} f = c \in \mathbb{R}.$$

W naszym przypadku mamy, że
$$\lim_{x\to +\infty} f = 1, \qquad \lim_{x\to -\infty} f = 1.$$
Więc, mamy asymptotę $y = 1$ dla $x \to +\infty$ i dla $x \to -\infty$.

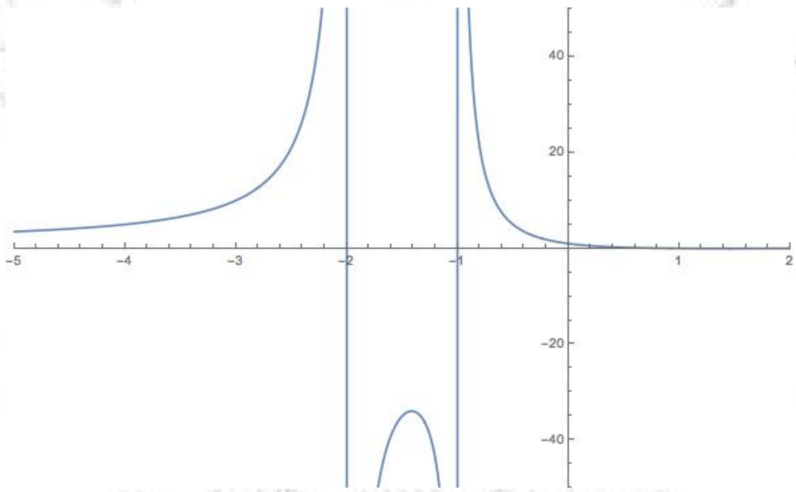
**Asymptoty ukośne:**

Mówimy, że funkcje $f$ ma asymptotę ukośną $y = ax + b$ dla $x \to +\infty$ gdy
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) - xa = b \in \mathbb{R}.$$
Podobnie, mówimy, że funkcje $f$ ma asymptotę ukośną $y = ax + b$ dla $x \to -\infty$ gdy
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) - xa = b \in \mathbb{R}.$$
Widać, że w naszym przypadku
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x^2 + 3x + 2)} = 0.$$
Zatem nie mamy asymptoty ukośnej dla $x \to +\infty$.

Podobnie
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x^2 + 3x + 2)} = 0.$$
Wówczas, nie mamy asymptot ukośnych dla $x \to -\infty$.

**ANALIZA I**
**20 stycznia 2015**
**Semestr zimowy**
**Lista XVII**

Rysunek funkcji wygląda następująco



**ANALIZA I**
**20 stycznia 2015**
**Semestr zimowy**
**Lista XVII**

---

$\square$

**Zadanie 2.** Zbadać przebieg zmienności funkcji: $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$, $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{2}{3}}$, $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{2-x}}$

**Zadanie 3.** Zbadać przebieg zmienności funkcji : $f(x) = \cos^2 x + 2\sin^2 x$, $f(x) = \sin x \cos 2x$, $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$.

**Zadanie 4.** Zbadać przebieg zmienności funkcji : $f(x) = x^2 \ln x$, $f(x) = \frac{1}{\ln x}$, $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $f(x) = \ln(\sin x)$, $f(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$, $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$, $f(x) = e^{\mathrm{tg}(x)}$, $f(x) = \mathrm{arctg}(\ln x)$.

**Zadanie 5.** Zbadać przebieg funkcji oraz jednostajną ciągłość jeżeli $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$.

**Zadanie 6.** Znaleźć ekstrema funkcji: $f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_+$.
*Rozwiązanie*: Kiedy funkcja jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$, ekstrema można znaleźć w punktach gdzie pierwsza pochodna zeruje się. Skoro podana funkcja jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$, sprawdzamy pierwszą pochodną:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} e^{-x} \Rightarrow \frac{df}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} e^{-x} - \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} e^{-x}.$$

Zatem

$$\frac{df}{dx} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i}{i!} e^{-x} - \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} e^{-x} = -\frac{x^n}{n!} e^{-x}.$$

Jedyny punkt krytyczny to $x = 0$. Ponadto, $n$ jest parzysta, mamy, że $df/dx < 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Skoro pochodna nie zmienia znaku, $x = 0$ to nie ekstremum. Dla $n$ nieparzystej mamy, że dla $x < 0$ pochodna jest dodatnia $df/dx > 0$ i dla $x > 0$ pochodna jest ujemna. To oznacza, że taki punkt jest maksimum. $\square$

**Zadanie 7.** Znaleźć ekstremum funkcji $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$