ANALIZA I
20 stycznia 2015
Semestr zimowy
Lista XVIII

Kryterium zbieżności I

Javier de Lucas

Zadanie 1. Policz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Rozwiązanie: Mamy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= \lim_{k\to+\infty} \left[\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right] = \lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = 1.$$

□

Zadanie 2. Policz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{7n+7n^2}$.

Rozwiązanie: Mamy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{7n^2+7n} = \frac{5}{7} \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2+n} = \frac{5}{7} \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Korzystając z poprzedniego zadania

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{7n^2+7n} = \frac{5}{7}.$$

Szereg $\sum_n a_n$ mówi się, że jest teleskopowy gdy ma postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+b)}, \qquad b \in \mathbb{N}.$$

Te szeregi sumują się podobnie. Na przykład

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3} \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)$$
$$= \frac{1}{3} \lim_{k\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} \ldots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right)$$
$$= \frac{1}{3} \lim_{k\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right) = \frac{11}{18}.$$

□

Zadanie 3. Policz $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$.

Rozwiązanie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$$
$$= \lim_{k\to+\infty} \ln\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdots\frac{k\cdot(k+2)}{(k+1)^2}\right)$$
$$= \lim_{k\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{2}\frac{(k+2)}{(k+1)}\right)$$
$$= -\ln 2 + \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+2)}{(k+1)} = -\ln 2.$$

□

Zadanie 4. Policz $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n, \quad |q| < 1$.

Rozwiązanie: To szereg geometryczny:

$$S_k \equiv \sum_{n=0}^{k} aq^n \Rightarrow qS_k - S_k = aq^{k+1} - a \Rightarrow S_k = a\frac{q^{k+1}-1}{q-1}.$$

Zatem, skoro $|q| < 1$ otrzymamy, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \lim_{k\to+\infty} S_k = \lim_{k\to+\infty} a\frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{a}{1-q}.$$

□

Zadanie 5. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3-1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Rozwiązanie: Przypominamy, że każdy szereg zbieżny $\sum_n a_n$ musi spełnić warunek konieczny, czyli $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Pierwszy szereg spełnia warunek konieczny

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n-1} = 0.$$

To nie zagwarantuje, że szereg jest zbieżny: to warunek koniczny ale nie wystarczający. Aby sprawdzić czy ten pierwszy szereg jest zbieżny, korzystamy z kryterium porównawczego.

Kryterium porównawcze mówi nam, że jeżeli dane są szeregi $\sum_n a_n$ i $\sum_n b_n$ wyrazów nieujemnych takie, że $a_n \leq b_n$, $\forall n > n_0$ dla pewnego $n_0 \in \mathbb{R}$, to:

- jeżeli $\sum_n b_n$ jest zbieżny, to $\sum_n a_n$ jest zbieżny
- Jeżeli $\sum_n a_n$ jest rozbieżny, to $\sum_n b_n$ jest rozbieżny.

W naszym przypadku mamy, że

$$\frac{1}{2n-1} \geq \frac{1}{2n}, \qquad \forall n \geq 1.$$

Skoro $2\sum_n 1/n$ jest rozbieżny, to $\sum_n 1/(2n-1)$ jest rozbieżny.

Drugi szereg nie spełnia warunku koniecznego

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0.$$

Więc, drugi szereg jest rozbieżny.

Trzeci szereg spełnia warunek konieczny. Skoro n^3 jest ciągiem rosnącym, to z twierdzenia Stolza wynika, że

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{n}{n-1}}{n^3 - (n-1)^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{n}{n-1}}{3n^2 - 3n + 1} = 0.$$

To nie zagwarantuje, że szereg jest zbieżny. Aby to sprawdzić, korzystamy z kryterium porównawczego. Mamy, że

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{n}{n-1}}{n - (n-1)} = 0.$$

Zatem, istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ taki, że jeżeli $n > n_0$ to $\ln n < n$. Zatem, $\forall n > n_0$ mamy, że $\ln n/n^3 < 1/n^2$. Skoro $\sum_n 1/n^2$ jest szeregiem harmonicznym rzędu 2, to jest zbieżny i z kryterium porównawczego, to $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ jest zbieżny.

Dodatkowo, możemy udowodnić, że trzeci szereg jest zbieżny za pomocą kryterium porównawczego w wersji granicznej. Taki kryterium mówi nam, że jeżeli dane są szeregi $\sum_n a_n$ i $\sum_n b_n$ i

$$0 < \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$$

to $\sum_n b_n$ i $\sum_n a_n$ mają taki sam charakter: $\sum_n a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_n b_n$ jest zbieżny. Jeżeli

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

i $\sum_n b_n$ jest zbieżny, to $\sum_n a_n$ jest zbieżny. Odwrotnie, jeżeli

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$$

i $\sum_n b_n$ jest rozbieżny, to $\sum_n a_n$ jest rozbieżny.

Zastosujemy kryterium porównawcze w wersji granicznej do naszego szeregu. Porównamy trzeci szereg z $\sum_n 1/n^2$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\ln n}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

Skoro $\sum_n 1/n^2$ jest zbieżny to trzeci szereg jest zbieżny.

Mamy, że czwarty szereg spełnia warunek konieczny

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{2n^3-1} = 0.$$

Korzystamy z kryterium porównawczego w wersji granicznej aby zbadać czwarty szereg. Porównamy szereg z $\sum_n 1/n^2$. Mamy, że

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+2}{2n^3-1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+2}{2n^3-1}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Skoro $\sum_n 1/n^2$ jest zbieżny to nasz szereg jest zbieżny.

Przeanalizujemy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n}{3^n}. \tag{5.1}$$

Taki szereg spełnia warunek konieczny. Skoro $-1 \leq \sin(3^n) \leq 1$ i $\lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ wynika, że

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin 3^n}{3^n} = 0.$$

Nie wiemy, czy taki szereg jest o wyrazach nieujemnych poniewaz $\sin 3^n$ może byc ujemny. Więc, sprawdzamy, czy szereg jest zbieżny bezwglęnie, czyli czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin 3^n|}{3^n} \tag{5.2}$$

jest zbieżny. Aby to zrobić korzystamy z kryterium porównawczego i porównamy to z szeregiem.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Widać, że

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{|\sin 3^n|}{3^n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2|\sin 3^n|}{3^n} = 0.$$

Zatem, istnieje n_0 taki, że dla każdego $n > n_0$ mamy, że

$$\frac{|\sin(3^n)|}{3^n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Skoro $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ jest zbieżny, korzystając z kryterium porównawczego otrzymamy, że (5.2) jest zbieżny. Zatem, szereg (5.1) jest bezględnie zbieżny. Poniewaz

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n}{3^n}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin 3^n|}{3^n},$$

to otrzymamy, że nasz szereg (5.1) jest zbieżny.

Zbadamy teraz szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n} \tag{5.3}$$

Widać, że taki szereg nie spełnia warunku koniecznego i jest rozbieżny. Korzystając z wzoru Stirlinga:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{100^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{100^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{100e}\right)^n \sqrt{2\pi n} = +\infty.$$

Kolejny szereg to

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$$

Widać, że taki szereg nie spełnia warunku koniecznego i jest rozbieżny. Korzystając z Stirlinga:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n n!}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2\pi n} = +\infty.$$

Następujący szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Spełnia warunek konieczny zbieżności

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2}} = 0.$$

Aby zbadać czy taki szereg jest zbieżny korzystamy z kryterium pierwiastkowego Cauchyego. Taki kryterium mówi nam, że jeżeli $\sum_n a_n$ jest taki, że

$$\limsup |a_n|^{1/n} = b,$$

to: jeżeli $b > 1$, to szereg jest rozbieżny; jeżeli $b < 1$, to szereg jest zbieżny; jeżeli $b = 1$ kryterium nie pozwala określić zachowania szeregu. W naszym przypadku mamy, że

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1 \Rightarrow \limsup |a_n|^{1/n} = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1.$$

Zatem szereg jest zbieżny.

Tez można sprawdzić charakter szeregu za pomocą kryterium D'Alemberta. Taki kryterium twierdzi, że dany szereg $\sum_n a_n$ i wartość granicy

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = b,$$

to: jeżeli $b < 1$ to szereg jest zbieżny i jeżeli $b > 1$, to szereg jest rozbieżny. Jeżeli $b = 1$, to kryterium nie pozwala nam określić charakteru szeregu.

W naszym przypadku, mamy, że

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{2n+3}{3n+4}\right)^{\frac{n+1}{2}}}{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{(2n+3)(3n+1)}{(3n+4)(2n+1)}\right]^{\frac{n}{2}} \left(\frac{2n+3}{3n+4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dodatkowo,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{(2n+3)(3n+1)}{(3n+4)(2n+1)}\right]^{\frac{n}{2}} &= \lim_{n\to+\infty} \left[1 + \frac{6n^2+11n+3-6n^2-11n-4}{6n^2+11n+4}\right]^{\frac{n}{2}} = \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left[1 + \frac{-1}{6n^2+11n+4}\right]^{\frac{-1}{6n^2+11n+4}(6n^2+11n+4)\frac{n}{2}} \\ &= e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2(6n^2+11n+4)}} = 1.\end{aligned}$$

Zatem

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{2n+3}{3n+4}\right)^{\frac{n+1}{2}}}{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1 \Rightarrow \limsup_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$$

i szereg jest zbieżny. Warto podkreślić, że

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \limsup_{n\to+\infty}|a_n|^{1/n}$$

i kryterium D'Alemberta i Cauchyego są rownoważne. Natomiast, w pewnych przypadkach może być łatwiej skorzystać z kryterium D'Alemberta i w innych przypadkach z kryterium Cauchyego (np. kiedy pojawiają się wyrażenia do n'ej). □

Zadanie 6. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)5^n}{2^n3^{n+1}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\operatorname{arctg} n)^n}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}.$$

Rozwiązanie: Przeanalizujemy pierwszy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)5^n}{2^n3^{n+1}}$$

Widać, że szereg spełnia warunek konieczny. Skoro pojawiaja się wiele elementów do n'ej, korzystamy z kryterium pierwiastkowego Cauchyego:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)5^n}{2^n3^{n+1}}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{5}{6}\sqrt[n]{\frac{(n+1)}{3}} = \frac{5}{6}.$$

Zatem

$$\limsup_{n\to+\infty}|a_n|^{1/n} = 5/6 < 1$$

i szereg jest zbieżny.

W drugim przypadku mamy, że $\arctan : \mathbb{R} \to [-\pi/2, \pi/2]$ i ta funkcja jest taka, że $|\arctan(x)| \le \pi/2 < 2$. Korzystając z tego mamy, że taki szereg spełnia warunek konieczny:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\arctan^n(n)}{2^n} = 0.$$

Aby sprawdzyć charakter tego szeregu sprawdzamy, czy szereg jest zbieżny bezwzględnie, czyli zbadamy zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\arctan^n(n)|}{2^n}.$$

Widać, że

$$\frac{|\arctan^n(n)|}{2^n} \le \frac{\pi^n}{4^n}.$$

Skoro $\sum_n \pi^2/4^n$ jest zbieżny ponieważ z kryterium pierwiastkowego Cauchyego

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\pi^2}{4^n}} = \frac{1}{4} < 1,$$

to nasz szereg jest bezwzględnie zbieżny. Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tan}^n(n)}{2^n}$$

jest zbieżny.

Zbadamy teraz szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Oczywiście, taki sereg spełnia warunek konieczny

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n \ln n} = 0.$$

Aby rozwiązać ten szereg trzeba skorzystać z nowego kryterium: *kryterium zagęszczania* (to materiał dodatkowy i nie obowiązuje do egzaminu).

Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest taki, że ciąg $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ jest malejący, a p jest liczbą naturalną większą od 1. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} p^n a_{p^n}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

W naszym przypadku mamy, że $1/(n \ln n)$ jest malejący i dla liczby naturalnej $p > 1$ to

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{p^n \ln p^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log p}.$$

Taki szereg jest rożbieżny. To oznacza, że nasz szereg jest rozbieżny. $\square$

Zadanie 7. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{2} - 1), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

Rozwiązanie:Aby zbadać pierwszy szereg korzystamy z kryterium Leibniza:

Jeżeli szereg $\sum_n (-1)^n a_n$ jest taki, że $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ i $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nierosnąca, to szereg jest zbieżny.

Korzystając z tego, możemy analizować pierwszy szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^n .$$

Mamy, że

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^{\lim_{n\to+\infty} n} = 0.$$

Dodatkowo,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} := \frac{\left(\frac{3n+4}{4n+5}\right)^{n+1}}{\left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^n} = \left(\frac{3n+4}{4n+5}\right)\left[\frac{(3n+4)(4n+1)}{(3n+1)(4n+5)}\right]^n = \left(\frac{3n+4}{4n+5}\right)\left[\frac{12n^2+19n+4}{12n^2+19n+5}\right]^n < 1.$$

i skoro (a_n) to ciąg wyrazów dodatnich, to jest nierosnący. Zatem, na moc kryterium Leibniza, szereg jest zbieżny.

Korzystamy znowu z kryterium Leibniza aby zbadać drugi szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{2} - 1\right). \tag{7.1}$$

Mamy, że

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{2} - 1\right) = 1 - 1 = 0.$$

Dodatkowo, widać, że ciąg $c_n := 2^{1/n}$ jest malejący i z tego łatwo wynika, że $a_n = \sqrt[n]{2} - 1$ jest malejący. Korzystając z Leibnitza, szereg (7.1) jest zbieżny.

Zbadamy teraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} .$$

Mamy, że

$$\lim_{n\to+\infty} n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 0.$$

Dodatkowo,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}} = \frac{n+1}{n}\frac{3}{4} < 1 \Leftrightarrow 3n+3 < 4n \Leftrightarrow n > 3.$$

Dla $n > 3$ mamy, że $a_{n+1}/a_n < 1$ i ciąg a_n jest nierosnący ponieważ jest ciągiem wyrazów dodatnich. Zatem, na moc kryterium Leibniza, nasz szereg jest zbieżny.

Zbadamy
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$
Znowu mamy, że korzystając z twierdzenia Stolza:
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\frac{n}{n-1}}{n-(n-1)} = 0.$$
Dodatkowo,
$$a_{n+1}-a_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} = \frac{n\ln(n+1)-(n+1)\ln n}{n(n+1)} = \frac{\ln\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}}{n(n+1)} = \frac{\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{n}\right]}{n(n+1)}$$
i skoro $(1+1/n)^n < e$ wynika, że
$$a_{n+1}-a_n < \frac{\ln\frac{e}{n}}{n(n+1)} < 0, \qquad n > 1.$$
Zatem, a_n jest niemalejący i szereg jest zbieżny. $\square$