ANALIZA I
14 i 17 października 2014
Semestr zimowy
Lista IV

Przeliczalność, kresy, bijekcje

Javier de Lucas

Zadanie 1. Wyliczyć:

- $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{3}{n}, \frac{4}{n}\right]$.
- $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]\frac{n}{n+1}, \frac{5}{n} + \frac{n}{10}\right[$
- $\bigcup_{t\in[2,3]} A_t$ oraz $\bigcap_{t\in[2,3]} A_t$, gdzie: $A_t = [t, 2t] \times [-t, t]$.

Zadanie 2. Pokazać, że funkcja $f : X \to Y$, gdzie $X =]0, 1[$, $Y = [-2, 2] \setminus \{-1, 1\}$

$$f(x) = \begin{cases} -3x - 1, x \in]0, \frac{1}{3}], \\ 3x, x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ 6x - 5, x \in]\frac{2}{3}, 1[\end{cases}$$

jest bijekcją. Znaleźć $f^{-1}(x)$.

Zadanie 3. Udowodnić, że zbiór $A = \{x \in \mathbb{N} : 10|x\}$ jest przeliczalny.

Rozwiązanie: Zbiór A jest przeliczalny kiedy A ma skończony wiele elementów albo istnieje bijekcja $f : A \to \mathbb{N}$. Udowodnimy, że funkcja

$$f : A \ni x \mapsto x/10 \in \mathbb{N}$$

jest bijekcją. Najpierw, skoro $10|x$, to $x/10 \in \mathbb{N}$ i ta funkcja jest dobrze zdefiniowana. Następnie, udowodnimy, że f jest bijekcją, czyli jest injekcją i surjekcją.

Funkcja f jest injekcją wtedy i tylko wtedy gdy

$$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2.$$

Mamy, że

$$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1/10 = n_2/10 \Rightarrow n_1 = n_2.$$

Wówczas, f jest injekcją.

Funkcja f jest surjekcją wtedy i tylko wtedy gdy

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists a \in A, f(a) = n.$$

Aby udowodnić, że f jest surjekcją wystarczy zauważyć, że dla $n \in \mathbb{N}$ mamy, że $10n \in A$ i $f(10n) = n$. Więc, f jest surjekcją.

Skoro f jest injekcją i surjekcją, to f jest bijekcją i A jest przeliczalny.

□

Zadanie 4. Korzystając z funkcji $f(x) = \begin{cases} 2x, x \in \mathbb{N}, \\ -2x-1, x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$ pokazać przeliczalność zbioru $\mathbb{Z}$.

Rozwiązanie: Zbiór A jest przeliczny kiedy ma skończone wiele elementów albo istnieje bijekcja między A i $\mathbb{N}$. Skoro $\mathbb{Z}$ ma nieskończone wiele elementów, to $\mathbb{Z}$ jest przeliczalny kiedy istnieje jakaś bijekcja między $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{N}$. Spróbujemy udowodnić, że $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ to bijekcja.

Najpierw udowodnimy, że f to injekcja, czyli

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Aby to udowodnić, najpierw zauważamy, że $f(x)$ jest parzysty dla $x \in \mathbb{N}$ i nieparzysty dla $x \in \mathbb{Z}/\mathbb{N}$. Więc, jeżeli $f(x_1) = f(x_2)$, albo $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ albo $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}/\mathbb{N}$. Jezeli $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, to

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Jeżeli $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}/\mathbb{N}$ to

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -2x_1 - 1 = -2x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Więc, f jest injekcją.

Aby udowodnić, że f jest surjekcją musimy sprawdzić, że dla każdego elementu $n \in \mathbb{N}$ istnieje $x \in \mathbb{Z}$ taki, że $f(x) = n$. Żeby to udowodnić, trzeba pamiętać, że dla $x \in \mathbb{N}$ wynika, że $f(x)$ jest parzysty i jeżeli $x \in \mathbb{Z}/\mathbb{N}$, to $f(x)$ jest nieparzysty. Więc, dany n parzysty, widać, że

$$x = n/2 \in \mathbb{N}, \qquad x = f(n).$$

Natomiast, dla n nieparzysty, to

$$x = (n+1)/(-2) \in \mathbb{Z}/\mathbb{N} \Rightarrow f(x) = n.$$

Więc, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy, że istnieje $x \in \mathbb{Z}$ taki, że $f(x) = n$. Zatem, f jest surjekcją.

Skoro f jest surjekcją i injekcją to f jest bijekcją i $\mathbb{Z}$ jest przeliczalny. □

Zadanie 5. Dowieźć, źe każdy zbiór rozłącznych, położonych na prostej odcinków jest przeliczalny.

Zadanie 6. Omówić po raz $n-$ty dowód przekątniowy Cantora nieprzeliczalnoćci odcinka $]0, 1[$.

Zadanie 7. Pokazać, że zbiór wartości funkcji $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, jest nieograniczony.

Rozwiązanie: Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony, gdy istnieją liczby $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ takie, że $M_1 \leq a \leq M_2$ dla każdego $a \in A$. Mówiąc inaczej, zbiór A jest ograniczony z góry i z dół.

Udowodnijmy, że zbior wartósci funkcji f, czyli

$$A = \{f(x) \in \mathbb{R} | x \in \mathbb{R}\}$$

nie jest ograniczony z góry, czyli dla każdego $M \in \mathbb{R}$ istnieje $a \in A$ taki, że $a > M$. Kiedy zbiór nie jest ograniczony z góry, to nie jest ograniczony.

Aby udowodnić, że A nie jest ograniczony z góry, musimy udowodnić, że dla każdego $M \in \mathbb{R}$ istnieje $x \in \mathbb{R}$ taki, że $f(x) > M$, czyli

$$\frac{x^3}{1+x^2} > M.$$

Skoro $1 + x^2 > 0$, to jest równoważnie warunkowi

$$x^3 > M(1+x^2) \Leftrightarrow x^3 - Mx^2 - M > 0 \Leftrightarrow x^2(x-M) - M > 0. \tag{7.1}$$

Teraz widać, że dla każdego M istnieje x spełniając ostatni warunek. Własnie, dla $M < 0$ mamy, że dla każdego $x \geq 0$ ten warunek się spełnia. Natomiast, Dla $M \geq 0$ wybieramy $x > \max\{1, 2M\}$ i mamy, że

$$x^2 \geq 1, \qquad x - M > M.$$

Widać, że taki x istnieje i spełnia nasz warunek (7.1). Więc, zawsze istnieje x spełniający $f(x) > M$ i zbiór wartości f nie jest ograniczony z góry i wtedy nie jest ograniczony.
$\square$

Zadanie 8. Pokazać, że zbiór liczb postaci $m\sqrt{5} - n$, $m, n \in \mathbb{N}$ jest nieograniczony z góry.

Rozwiązanie: Musimy udowodnić, że dla każdego $M \in \mathbb{R}$ istnieje

$$a \in A := \{m\sqrt{5} - n | m, n \in \mathbb{N}\},$$

taki, że $a > M$. Czyli, istnieją $m, n \in \mathbb{N}$ takie, że $m\sqrt{5} - n > M$. Własność Archimedesa liczb naturalnych mówi nam, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje $m \in \mathbb{N}$ taki, że $x < m$.

Korzystając z tego, mamy, że

$$\frac{M+1}{\sqrt{5}} < m \Rightarrow M < m\sqrt{5} - 1.$$

Więc, $M < m\sqrt{5} - n$ dla $n = 1$. Element $m\sqrt{5} - n$ należy do A i wtedy A nie jest ograniczony z góry. $\square$

Zadanie 9. Pokazać, że funkcja $f(x) = x \sin x, x \in]0, +\infty[$, nie jest ograniczona z góry ani z dół.

Rozwiązanie: Nieograniczność z góry. Musimy udowodnić, że dla każdego $M \in \mathbb{R}$ istnieje $x \in]0, +\infty[$ taki, że $f(x) > M$. Z własności Archimedesa mamy, że dla każdego $M \in \mathbb{R}$ istnieje element $k \in \mathbb{N}$ taki, że

$$\frac{\frac{2}{\pi}M - 1}{4} < k \Rightarrow \frac{2}{\pi}M < 4k + 1 \Rightarrow M < (4k+1)\frac{\pi}{2} = f\left((4k+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Więc, $f(x) > M$ dla $x = (4k+1)\pi/2$.

Nieograniczność z dół. Musimy udowodnić, że dla każdego $M \in \mathbb{R}$ istnieje $x \in]0, +\infty[$ taki, że $f(x) < M$. Z własności Archimedesa mamy, że dla każdego $M \in \mathbb{R}$ istnieje element $k \in \mathbb{N}$ taki, że

$$\frac{\frac{2}{\pi}|M| - 3}{4} < k \Rightarrow \frac{2}{\pi}|M| < 4k+3 \Rightarrow -(4k+3)\frac{\pi}{2} < M < (4k+3)\frac{\pi}{2} \Rightarrow M > f\left((4k+3)\frac{\pi}{2}\right).$$

$\square$

Zadanie 10. Wykać, że kres górny zbioru liczb postaci $\frac{x}{1+x}$, gdzie $x \in \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ jest równy 1.

Wiemy, że $x < 1 + x$ i z tego $x/(1+x) < 1$ dla $x > 0$. Z tego wynika, że 1 to ograniczenie górne zbioru

$$A = \left\{ \frac{x}{1+x} \,|\, x \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

Aby udowodnić, że 1 to kres górny, czyli najmiejsze ograniczenie górne, trzeba udowodnić, że nie ma α spełniając

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \frac{x}{1+x} \le \alpha < 1.$$

Taki warunek jest równoważnie warunkowi

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \frac{x}{1+x} - 1 \le \alpha - 1 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \frac{1}{1+x} \ge 1 - \alpha > 0.$$

Ale to ostanie jest fałszywe!! Jeżeli $1 > \beta > \alpha$ to ustalając $x = \beta/(1-\beta)$ otrzymamy

$$\frac{1}{1+x} = 1 - \beta < 1 - \alpha.$$

To sprzeczność i nie ma $\alpha < 1$.

Zadanie 11. Wykać, że liczba 2 nie jest kresem górnym zbioru liczb postaci $\frac{3n+1}{2n+1}, n \in \mathbb{N}$.

Rozwiązanie:

Wystaczy znaleźć liczbę α spełniając, że

$$\frac{3n+1}{2n+1} < \alpha < 2, \qquad \forall n \in N.$$

Widać, że

$$\frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1/2}{2n+1}.$$

Więc, $\forall n \in \mathbb{N}$ mamy, że

$$\frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1/2}{2n+1} < \frac{3}{2}.$$

Zatem, $3/2$ to ograniczenie górne liczb $(3n+1)/(2n+1)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Skoro $3/2 < 2$ to 2 to nie kreś gorny: istnieje mniejsze ograniczenie górne naszego zbioru. $\square$