ANALIZA II
28 lutego i 3 marca 2014
Semestr letni

---

ciągi i szeregi funkcji

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Zbadać zbieżność (punktową i jednostajną) ciągu funkcji

$$f_n : [0, \infty[\ni x \longmapsto \frac{nx^2 + x}{nx^2 + 1},$$

Rozwiązanie: Mówi się, że ciąg funkcji f_n zdąży punktowo do f gdy

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

W naszym przypadku, mamy, że f_n zdąży punktowo do funkcji

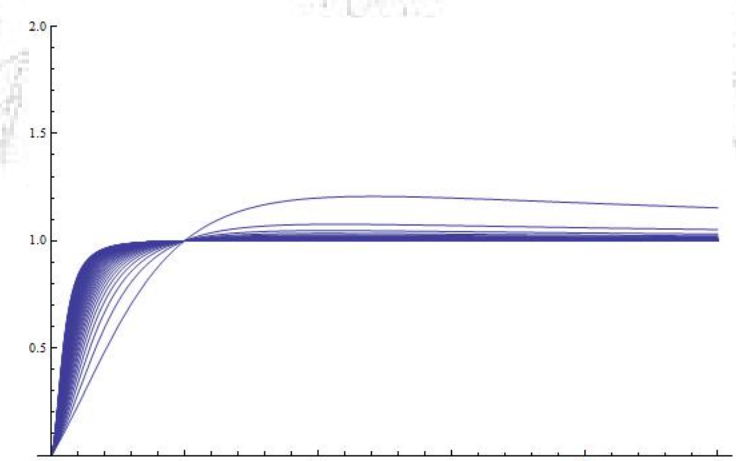
$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{nx^2 + x}{nx^2 + 1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{x^2 + x/n}{x^2 + 1/n} = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x \neq 0. \end{cases}$$

Teraz, musimy sprawdzić czy ciąg $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zdąży do f jednostajnie. Aby to zrobić, musimy sprawdzić, czy

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = 0, \qquad \forall x \in [0, +\infty[.$$

Geometrycznie ten warunek oznacza, że największa różnicza między wartościami funcjami f_n i f w punktach $x \in [0, +\infty[$, która jest niewiększa od $\sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x) - f(x)|$, robi się coraz mniejsza gdy $n \to +\infty$.

Aby ustalić co się dzieje dla $(f_n)_{n \in \mathbb{R}}$, musimy ustalić supremum wartości $|f_n(x) - f(x)|$.



Widać z powyższego diagramu, że $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie zdąży jednostajnie do f. Ale to tylko diagram, i trzeba to udowonić dokładnie.

Dla $x = 0$, wiemy, że $|f_n(0) - f(0)| = 0$. Zobaczymy, co się dzieję poza $x = 0$, czyli na $]0, +\infty[$. W tym przedziale,

$$g(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx^2 + x}{nx^2 + 1} - 1\right| = \left|\frac{x - 1}{nx^2 + 1}\right|.$$

Funkcja ta ma minimum dla $x = 1$. Aby znaleźć największą wartość tej funkcji, trzeba sprawdzić gdzie ma maksimum i sprawdzić co się dzieje gdy $x \to +\infty$. Więc, trzeba sprawdzić punkty krytyczne tej funkcji. Pamiętamy, że

$$\frac{d|f|}{dx}(x) = \text{sign}|f(x)|, \qquad \text{dla } |f(x)| \neq 0,$$

gdzie

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Skoro $nx^2 + 1 > 0$, to

$$0 = \frac{dg}{dx}(x) = \text{sign}(x - 1)\frac{nx^2 + 1 - 2xn(x - 1)}{(nx^2 + 1)^2} = \text{sign}(x - 1)\frac{-nx^2 + 2xn + 1}{(nx^2 + 1)^2}.$$

Z tego wynika, że punkty krytyczne to punkt $x > 0$ taki, że

$$-nx^2 + 2xn + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2n \pm \sqrt{4n^2 + 4n}}{-2n} = 1 \pm \sqrt{1 + 1/n}.$$

Czyli

$$x_m = 1 + \sqrt{1 + 1/n} > 1.$$

Widać, że to maksimum. Właśnie,

$$\frac{dg}{dx} = \frac{-nx^2 + 2xn + 1}{(nx^2 + 1)^2}, \qquad x > 0.$$

Mianownik jest zawsze dodatnie i mianownik jest zero dla x_- i x_+. Skoro $x_- < x_+$ i $-nx^2 + 2xn + 1$ to parabola z ramionami do dół, to dg/dx jest ujemna dla $x > x_+$ i dodatnia dla $x < x_x < x_+$. Z tego wynika, że $x = x_+$ jest maksimum. Teraz mamy

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{x^2 - 1}{nx^2 + 1}\right| = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x^2 - 1}{nx^2 + 1}\right| = 0.$$

Z tego wynika, że $\sup_{x\in[0,+\infty[}|f_n(x)-f(x)| \geq 1$ i ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie zdąży jesdnostajnie do f.

Można to udowodnić inaczej. Aby to zrobić, musimy pamiętać następującą ważną właściwością ciagów funkcji.

Dany ciąg funkcji $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że:

- ciąg funkcji $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zdąży jednostajnie do f, czyli $f_n \stackrel{j.}{\to} f$,
- funkcje f_n są ciągły,

to funkcja f jest ciągła.

Teraz wprowadzamy dowód niewprost. Zakładamy, że $f_n \stackrel{j.}{\to} f$. Skoro funkcje f_n są ciągłe, to f ma być ciągła. Natomiast, funkcja f nie jest ciągła. To sprzeczność i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie zdąży jednostajnie do f.

Aby uzupełnić, możemy zobaczyć, czy $f_n \stackrel{j.}{\to} f$ na $[a,+\infty[$. Przyponminamy, że $f_n \stackrel{j.}{\to} f$ na na $[a,+\infty[$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)-f(x)| = 0.$$

Aby zbadać $\sup_{x\in[a,+\infty[}|f_n(x)-f(x)|$ musimy korzystać z naszego poprzedniej analizy funkcji $g(x) = |f_n(x)-f(x)|$. Wartość maksimalna tej funkcji jest albo w maksimim, który sie pojawia jeżeli $a < x_m = 1+\sqrt{1+1/n}$ i wartość funkcji

$$\lim_{x\to a}|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{a-1}{na^2+1}\right|$$

Więc, maksimum funkcji to

$$\max\left\{g(x_m), \left|\frac{a-1}{na^2+1}\right|\right\}.$$

Mamy, że

$$g(x_m) = \frac{\sqrt{1+1/n}}{n(1+\sqrt{1+1/n})^2+1}.$$

Zatem

$$\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \max\left\{\frac{\sqrt{1+1/n}}{n(1+\sqrt{1+1/n})^2+1}, \left|\frac{a-1}{na^2+1}\right|\right\}.$$

Kiedy $n \to +\infty$ to

$$\frac{\sqrt{1+1/n}}{n(1+\sqrt{1+1/n})^2+1} \to 0, \qquad \left|\frac{a-1}{na^2+1}\right| \to 0.$$

Wówczas,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{j.} f.$$

□

Ćwiczenie 2. Czy poprawne są wyliczenia (uzasadnić)

$$\lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2+1}{(x+n-1)^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2.$$

Rozwiązanie: Zaczynamy od ostatnich równości. Widać, że

$$\frac{2}{n^2+n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Z tego wynika, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Teraz widać, że

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \dots\right] = 2.$$

Sprawdzamy pierwszy krok, czyli

$$\lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2+1}{(x+n-1)^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+n} = 2.$$

Jeżeli zdefiniujemy

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2+1}{(x+n-1)^2+n} \Rightarrow S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+n}$$

pierwszy krok oznacza, że

$$\lim_{x\to 1} S(x) = S(1).$$

To sią zdaża wtedy i tylko wtedy gdy funkcja S jest ciągła w $x = 1$.

Nie wiemy bespośrednio czy funkcja S jest ciągła w $x = 1$ ponieważ nie znamy postaci $S(x)$. Musimy to zrobić inaczej, np. za pomocą szeregu funkcji. Zdefiniujemy

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} \frac{x^2+1}{(x+n-1)^2+n}.$$

Widać, że $S_k \to S$. Jeżeli możemy udowodnić, że ciąg $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zdaży jednostajnie do S na przedziale $[0,2] \supset \{1\}$ i skoro każda S_k, dla $k \in \mathbb{N}$, jest ciągła, to S będzie też ciągła na $[0,2]$. Aby udowodnić, że S_k zdąży jednostajnie do S na $[0,2]$ możemy korzystać z kryterium Weierstrassa.

Dane funkcje $f_k(x) = \sum_{n=1}^{k} u_n(x)$ dla pewnych funkcji $u_n : x \in A \subset \mathbb{R} \mapsto u(x) \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{N}$. Jeżeli:

- istnieje ciąg liczb $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $|u_n(x)| \leq M_n$ dla każdego $x \in A$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$,

to $f_k \xrightarrow{j.} \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Stosujemy, kryterium Weierstrassa do S_k. Dla tego szeregu musimy ograniczyć

$$u_n(x) = \frac{x^2+1}{(x+n-1)^2+n}.$$

Mamy, że

$$\frac{du_n}{dx}(x) = \frac{2x[(x+n-1)^2+n] - (x^2+1)2(x+n-1)}{[(x+n-1)^2+n]^2}.$$

Gromadząc wyrazy tego samego stopnia wynika bezpośrednio,

$$\frac{du_n}{dx}(x) = \frac{2(n-1)x^2 + x[2(n-1)^2 + 2n - 2] - 2(n-1)}{[(x+n-1)^2+n]^2} = 2(n-1)\frac{x^2+nx-1}{[(x+n-1)^2+n]^2}.$$

Istnieją ekstrema, ale tylko jeden, x_+, w przedziale $[0,2]$:

$$x_\pm = \frac{-n \pm \sqrt{n^2+4}}{2} \to x_+ = \frac{-n+\sqrt{n^2+4}}{2} = \frac{2}{n+\sqrt{n^2+4}} > 0.$$

Natomiast, widać, że x^2+nx-1 to parabola z ramionami do góry i x_+ to drugi pierwiastek. Korzystając z tego, widać, że $du_n/dx > 0$ dla $x > x_+$ i $du_m/dx < 0$ dla $x_- < x < x_+$. Więc, x_+ to minimum i trzeba szukać największej wartości funkcji u_n na brzegu $[0,2]$, czyli

$$u_n(0) = \frac{1}{n^2-n+1} = \frac{1}{(n-1)^2+n}, \qquad u_n(2) = \frac{5}{n^2+3n+1} = \frac{5}{(n+1)^2+n}.$$

Korzystając z $u_n(0) \geq 0$ i $u_n(2) \geq 0$, można udowodnić, że $u_n(2) \geq u_n(0)$. Właśnie,

$$\frac{1}{n^2-n+1} \leq \frac{5}{n^2+3n+1} \Leftrightarrow n^2+3n+1 \leq 5(n^2-n+1) \Leftrightarrow 0 \leq 4n^2-8n+4 = 4(n-1)^2.$$

Zatem $u_n(2) \geq u_n(x)$ dla dowolnego $x \in [0,2]$ i $n \in \mathbb{N}$. Teraz ustalamy $M_n = f_n(2)$ i

$$\sum_n M_n = \sum_n \frac{5}{(n+1)^2+n}.$$

Za pomocą drugiego kryterium porówniający mamy, że $\sum_n M_n$ jest zbieżny:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{5}{(n+1)^2+n}} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sum \frac{1}{n^2} < \infty \Leftrightarrow \sum_n \frac{5}{(n+1)^2+n} < \infty.$$

Z kryterium Wierstrassa, S_k zdązy jednostajnie do S. Zatem, S jest ciągła ponieważ każda funkcja S_k jest ciągła i

$$\lim_{x\to 1} S(x) = S(1).$$

$\square$

Ćwiczenie 3. Coś o różniczkowaniu wyraz po wyrazie. Wykazać, że f jest klasy $\mathcal{C}^1$ na $\mathbb{R}$ jeśli

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}.$$

Rozwiązanie: Trudno zobaczyć, czy funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna czy ciągła bezpośrednio, ponieważ nie znamy sumy funkcji $u_n = \sin(xn)/n^3$. Aby to rozwiązać, zdefiniujemy

$$f_k(x) = \sum_{n=1}^{k} \frac{\sin nx}{n^3}.$$

Widać, że $f_k \to f$ punktowo i każda f_k jest różniczkowalna. Teraz, korzystamy z kryterium ciągu pochodnych:

Dany ciąg funkcji różniczkowalnych $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Jeżeli:

- $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_0)$ istnieje dla pewnego x_0,
- $f_n' \xrightarrow{j.} g$ jednostajnie,

to $f_k \xrightarrow{j.} f$, $f' = g$ i f jest różniczkowalna.

Widać, że $f(0) = \lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$. Więc, pierwszy warunek kryterium się spełnia. Sprawdzamy teraz drugi

$$f_k' = \sum_{n=1}^{k} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Korzystamy z kryterium Weierstrassa. Musimy wtedy ograniczyć

$$|u_n(x)| = \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Skoro $\sum_n 1/n^2$ jest zbieżny, to szereg $\sum_n u_n$ zdąży jednostajnie do pewnej funkcji g. Korzystając z kryterium ciągu pochodnych mamy, że f jest C^1. $\square$

Ćwiczenie 4. Coś o całkowaniu wyraz po wyrazie. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx\exp(-nx^2)\mathsf{d}x, \qquad \int_0^1 [\lim_{n\to\infty} nx\exp(-nx^2)]\mathsf{d}x.$$

Wyjaśnić uzyskane wyniki.

Rozwiązanie: Widać, że

$$\int_0^1 nx\exp(-nx^2)\mathsf{d}x = \frac{n}{2}\int_0^1 \exp(-nx^2)\mathsf{d}x^2 = \frac{n}{2}\left[-\frac{1}{n}\exp(-nx^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}[1-\exp(-n)].$$

Teraz,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 nx\exp(-nx^2)\mathsf{d}x = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}[1-\exp(-n)] = \frac{1}{2}.$$

Natomiast,

$$f(x) \equiv \lim_{n\to+\infty} nx\exp(-nx^2) = 0 \Rightarrow \int_0^1 [\lim_{n\to+\infty} nx\exp(-nx^2)]\mathsf{d}x = 0.$$

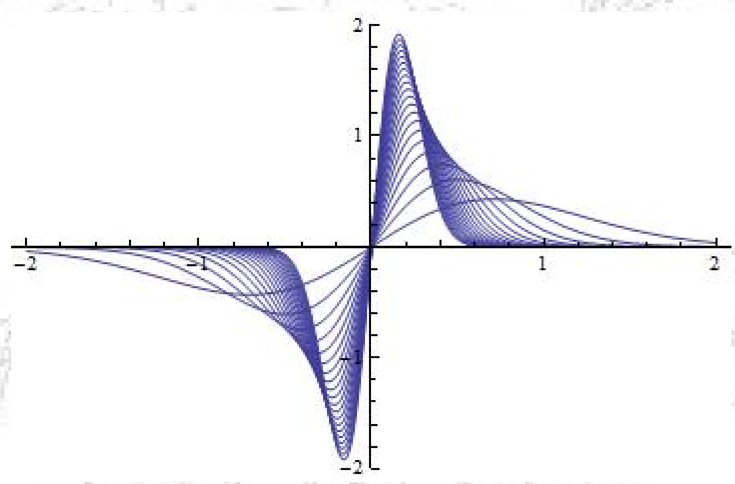
Więc,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx\exp(-nx^2)\mathsf{d}x \neq \int_0^1 [\lim_{n\to\infty} nx\exp(-nx^2)]\mathsf{d}x.$$

Dlaczego? Ważny pamiętać następujące twierdzenie:

Dany ciąg funkcji $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Jeżeli $f_n \overset{j.}{\to} f$, to $\int_{x_0} f_k \to \int_{x_0} f$.

Skoro w tym problemie nie się spełnia, że $f_n \overset{j.}{\to} f$, to $\int_{x_0}^{x_1} f_n \to \int_{x_0}^{x_1} f$ nie musi się spełniać.



Właśnie, możemy przeanalizować $|f_n|$. Dla $x=0$, mamy, że $f_n(0)=0$ i to minimum, i nie interesuje nam. Widać, że $|f_n|$ ma punkt krytyczny dla

$$\frac{d|f_n|}{dx} = \mathrm{sign}(x)[n\exp(-nx^2) - 2n^2x^2\exp(-nx^2)] = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pm 1}{\sqrt{2n}}.$$

Ponieważ $f_n(0)$ to minimum i $\lim_{x\to+\infty}|f_n(x)|=0$, w tym punkcie f_n osiągna maksimum globalne.

Wartość maksimum globlane funkcji f_n, to

$$f_n\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{2n}}\right) = \sqrt{\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Więc,

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)| > \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\right) = +\infty.$$

$\square$