



ciągi i szeregi funkcji

Ćwiczenie 1. Zbadać zbieżność (punktową i jednostajną) ciągu funkcji

$$f_n : [0, \infty[\ni x \mapsto \frac{nx^2 + x}{nx^2 + 1},$$

Ćwiczenie 2. Czy poprawne są wyliczenia (uzasadnić)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{(x + n - 1)^2 + n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 2.$$

Ćwiczenie 3. Coś o różniczkowaniu wyraz po wyrazie. Wykazać, że f jest klasy \mathcal{C}^1 na \mathbb{R} jeśli

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}.$$

Ćwiczenie 4. Coś o całkowaniu wyraz po wyrazie. Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nx \exp(-nx^2) dx, \quad \int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} nx \exp(-nx^2) \right] dx.$$

Wyjaśnić uzyskane wyniki.