ANALIZA II
28 lutego i 3 marca 2014
Semestr letni

ciągi i szeregi funkcji

Javier de Lucas

Ćwiczenie 1. Rozwinąć daną funkcję w szereg potęgowy wokółpunktu x_0 i zbadać obszar zbieżności otrzymanych szeregów

(a) $f(x) = \arcsin(x), \ \ x_0 = 0,$ (b) $f(x) = x \arctan\left(\frac{x}{1+x}\right), \ \ x_0 = -\frac{1}{2},$

(c) $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} \mathsf{d}t, \ \ x_0 = 0,$ (d) $f(x) = \frac{1}{2}[\log(1-x)]^2 \ \ x_0 = 0.$

Rozwiązanie: Aby obliczyć pierwszy wzór Taylora musimy korzystać z następującej metody. Zamiast obliczyć wzór Taylora dla $\arcsin(x)$, mamy obliczyć wzór Taylora dla jego pochodna, czyli

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

i potem całkować, aby podać wzór Taylora dla $f(x)$. Natomiast, to też trudne, więc, ostateczny, szukamy wzoru Taylora dla

$$\varphi(y) = (1-y)^{-1/2}.$$

Łatwo zobaczyć, że

$$\varphi'(y) = \frac{1}{2}(1-y)^{-3/2}, \qquad \varphi''(y) = \frac{1}{2}\frac{3}{2}(1-y)^{-5/2}, \qquad \varphi'''(y) = \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}(1-y)^{-7/2},$$

Zatem,

$$\frac{d^n\varphi}{dy^n} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}(1-y)^{-(2n+1)/2} \Rightarrow \frac{d^n\varphi}{dy^n}(0) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}, \qquad n > 0 \ \ \varphi(0) = 1.$$

Z tego wynika, że wzór Taylora dla $\varphi(y)$ wygląda następująco

$$\varphi(y) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} y^n.$$

Z tego wynika, że

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n}.$$

Teraz ważny pamiętać, że:

Z własności szeregu potęgowego wynika, że jego suma jest funkcją różniczkowalną i całkowalną we wnętrzu koła zbieżności szeregu. Co więcej, zarówno pochodną jak i całkę tej funkcji mona otrzymać różniczkując lub całkując szereg wyraz po wyrazie.

Korzystając z tego wynika, że

$$\int_0 \frac{\mathsf{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n}\right) \mathsf{d}x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0 \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n} \mathsf{d}x$$

i

$$\arcsin(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)} x^{2n+1} = x\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)} x^{2n}\right).$$

Promień zbieżności R szeregu potęgowego $\sum_n c_n x^n$ to

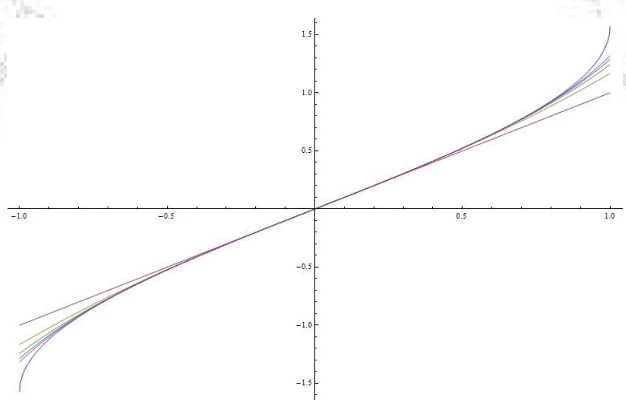
$$R^{-1} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|.$$

W naszym przypadku

$$c_{2n+1} = 0, \qquad c_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)},$$

gdzie $a_n \equiv c_{2n}$ jest ciąg malejący. Więc,

$$R^{-1} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{\frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{\frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)}} = 1.$$



□

Ćwiczenie 2. Zbadać obszar zbieżności podanych szeregów oraz wyrazić sumy szeregów przez funkcje elementarne. Należy korzystać ze znajomości rozwinięć podstawowych funkcji ($\exp(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\log(1+x)$, $\frac{1}{1-x}$ ...) oraz z faktu iż szeregi potęgowe można różniczkować i całkować wyraz po wyrazie.

(a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-2)x^n}{(n+2)n!}$ Wskazówka: badać $f(x) - e^x$

(b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n^2}{n^2-1} x^{3n-5}$ Wskazówka: $f(x) = \frac{1}{x^5}\varphi(x^3)$

Rozwiązanie: Mamy, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-2)x^n}{(n+2)n!} - e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-2)x^n}{(n+2)n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n+2} - 1\right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{n+2} \frac{x^n}{n!}.$$

i

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-2)x^n}{(n+2)n!} - e^x = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{n+2} \frac{x^{n+2}}{n!}.$$

Zdefiniując,

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)n!},$$

wynika, że

$$h'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = xe^x \Rightarrow h(x) = (x-1)e^x + 1,$$

Z tego,

$$f(x) = e^x - \frac{4}{x^2}[(x-1)e^x + 1].$$

□