

Matematyka I – lista zadań nr 10.

1 Całki - proste podstawienia

Używając stosownych podstawień, obliczyć całki:

1. $\int \frac{x}{1+x^2} dx;$

2. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx;$

3. $\int x e^{-x^2} dx;$

4. $\int x^2 e^{x^3} dx;$

5. $\int \frac{dx}{(2x-5)^3};$

6. $\int \sqrt[5]{(7-2x)^6} dx;$

7. $\int x^3 \sqrt[3]{2+x^4} dx;$

8. $\int \sin^5 x \cos x dx;$

9. $\int \sin^7 x \cos^3 x dx;$

10. $\int \cos^3 x \cos 2x dx;$

11. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx;$

12. $\int \cos 3x dx;$

13. $\int \sin(2-4x) dx;$

14. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx;$

15. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{1+x^2} dx;$

16. $\int \frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}} dx;$

17. $\int \cos x e^{\sin x} dx;$

$$18. \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx;$$

$$19. \int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx;$$

$$20. \int \operatorname{ctg} x dx;$$

$$21. \int a^x dx;$$

$$22. \int \frac{(\ln x)^m}{x} dx;$$

2 Całkowanie przez części

Wykorzystując metodę całkowania przez części, obliczyć całki:

$$23. \int x^2 e^x dx;$$

$$24. \int \operatorname{arctg} x dx;$$

$$25. \int \arcsin x dx;$$

$$26. \int x^{10} \ln x dx;$$

$$27. \int x(\ln x)^2 dx;$$

$$28. \int e^{ax} \sin bx dx, (a, b - \text{stałe}), \text{ a przy okazji:}$$

$$29. \int e^{ax} \cos bx dx;$$

$$30. \int x \operatorname{arctg} x dx;$$

$$31. \int x \sin 2x dx;$$

$$32. \int x 5^x dx;$$

$$33. \int \ln(x^2 + 1) dx;$$

$$34. \int x \operatorname{arctg} x dx;$$

$$35. \int (\arcsin x)^2 dx;$$

$$36. \int \sin(\ln x) dx;$$

$$37. \int \cos(\ln x) dx;$$

3 Całki wymierne

Obliczyć całki:

$$38. \int \frac{x}{2x^2 - 3x - 2} dx;$$

$$39. \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx;$$

$$40. \int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx;$$

$$41. \int \frac{2x^2 - 5}{x^4 - 5x^2 + 6} dx;$$

$$42. \int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 dx;$$

$$43. \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx;$$

$$44. \int \frac{x^5}{(x-1)^2(x^2-1)} dx;$$

$$45. \int \frac{3x^2 + 1}{(x^2 - 1)^3} dx;$$

$$46. \int \frac{1}{x(x^2 + 1)} dx;$$

$$47. \int \frac{1}{1 + x^3} dx;$$

$$48. \int \frac{x^2}{1 - x^4} dx;$$

$$49. \int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx;$$

$$50. \int \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + x)} dx;$$

$$51. \int \frac{x^3 - 6}{x^4 + 6x^2 + 8} dx;$$

$$52. \int \frac{1}{1 + x^4} dx;$$

4 Całki z funkcji trygonometrycznych

Obliczyć całki:

53. $\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx;$

54. $\int \sin^7 x \cos^7 x \, dx;$

55. $\int \sin^6 x \cos^5 x \, dx;$

56. $\int \sin^4 x \, dx;$

57. $\int \cos^6 x \, dx;$

58. Niech $S_n = \int \sin^n x \, dx$, $n \in \mathbb{N}$. Napisać wzór rekurencyjny, wyrażający S_n przez S_{n-2} .

59. Niech $C_n = \int \cos^n x \, dx$, $n \in \mathbb{N}$. Napisać wzór rekurencyjny, wyrażający C_n przez C_{n-2} .

60. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} \, dx;$

61. $\int \frac{1}{\sin x \cos x} \, dx;$

62. $\int \frac{1}{\cos^3 x} \, dx;$

63. $\int \frac{1}{\sin^3 x \cos x} \, dx;$

64. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} \, dx;$

65. $\int \frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x} \, dx;$

66. $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx;$

67. $\int \frac{1}{\operatorname{tg}^8 x} \, dx;$

68. $\int \frac{1}{4 - 3 \sin x} \, dx;$

69. $\int \frac{2 + \sin x}{2 - \cos x} \, dx;$

70. $\int \frac{1}{a + b \cos x} \, dx, \quad a > b > 0;$

71. $\int \, dx;$

5 Całki wymierne z $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$

Obliczyć, stosując podstawienia Eulera lub inne sposoby:

$$72. \int \sqrt{x^2 + x + 1} \, dx;$$

$$73. \int \frac{1}{x\sqrt{2+x-x^2}} \, dx;$$

$$74. \int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} \, dx;$$

$$75. \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2} \, dx;$$

$$76. \int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x^2} \, dx;$$

$$77. \int \frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}} \, dx;$$

$$78. \int \frac{x^4}{\sqrt{x^2+4x+5}} \, dx;$$

$$79. \int \frac{1}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}} \, dx;$$

$$80. \int \frac{1}{x^2(x+\sqrt{1+x^2})} \, dx;$$

$$81. \int \sqrt{3x^2-3x+1} \, dx;$$

$$82. \int \frac{3x^2}{\sqrt{x^2+4x+5}} \, dx;$$

6 Całki wymierne z $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

$$83. \int \frac{x}{x-\sqrt{x^2-1}} \, dx;$$

$$84. \int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \, dx;$$

$$85. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \, dx;$$

$$86. \int \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}} dx;$$

$$87. \int x \sqrt[3]{2+x} dx;$$

$$88. \int \frac{\sqrt[4]{1+x}}{x} dx;$$

7 Calki z funkcji hiperbolicznych

$$89. \int \cosh x dx;$$

$$90. \int \frac{1}{\cosh^2 x} dx;$$

$$91. \int \sinh^3 x dx;$$

$$92. \int \sinh^2 x dx;$$

$$93. \int \sqrt{\tanh x} dx;$$