Matematyka I – lista zadań nr 3

1. Rozwiązać układy równań (tzn. podać rozwiązanie ogólne) bądź pokazać, że rozwiązań nie ma:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 7 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 5 \end{array}\right.$$

2. Wyznaczyć wielomian $f(x)$ drugiego stopnia o współczynnikach rzeczywistych, dla którego $f(1) = 8$, $f(-1) = 2$, $f(2) = 14$.

3. Wyznaczyć wielomian $f(x)$ trzeciego stopnia o współczynnikach rzeczywistych, dla którego $f(-2) = 1$, $f(-1) = 3$, $f(1) = 13$, $f(2) = 33$.

4. Znaleźć wszystkie wielomiany $f(x)$ drugiego stopnia o współczynnikach rzeczywistych, spełniające warunek $f(1) = f'(2)$.

5. Znaleźć wszystkie wielomiany $f(x)$ trzeciego stopnia o współczynnikach rzeczywistych, spełniające warunki $f''(0) = f(1) = f'(2)$.

6. Czy układy wektorów (f_1, f_2, f_3) są bazami? Jeśli tak, to wyrazić poniższe $\mathbf{x}$ w bazach (f_1, f_2, f_3):

   (a) $\mathbf{x} = [1, 5, 7]$; $f_1 = [1, 0, 0]$, $f_2 = [1, 1, 0]$, $f_3 = [1, 1, 1]$;

   (b) $\mathbf{x} = [6, 2, -7]$; $f_1 = [2, 1, -3]$, $f_2 = [3, 2, -5]$, $f_3 = [1, -1, 1]$;

   (c) $\mathbf{x} = [6, 9, 14]$; $f_1 = [1, 1, 1]$, $f_2 = [1, 1, 2]$, $f_3 = [1, 2, 3]$.

7. Znaleźć kąty w trójkącie o wierzchołkach w punktach: Zapis wierszowy dla oszczędności miejsca

   (a) $(1, 2, 3)$, $(-2, 3, 4)$, $(-3, 0, 1)$. Jeśli wynik dla cosinusa będzie niestandardowy to kąt wyliczyć na kalkulatorze – oczywiście takim z f. trygonometrycznymi

   (b) (zadanie z $\mathbb{R}^5$, ale liczy się tak samo jak w trzech wymiarach): $(1, 2, 3, 2, 1)$, $(3, 4, 0, 4, 3)$, $(1+\frac{5}{26}\sqrt{78}, 2+\frac{5}{13}\sqrt{78}, 3+\frac{10}{13}\sqrt{78}, 2+\frac{5}{13}\sqrt{78}, 1+\frac{5}{26}\sqrt{78})$. (Kostrikin, red. *Zb. zadań z alg. lin.* 4.1.26 b str. 123) Wygląda obrzydliwie ale wychodzi ładnie

   (c)

8. Pokazać, używając rachunku wektorowego, że przekątne rombu są prostopadłe.

9. a) Pod jakim kątem przecinają się przekątne sześcianu? Jaki kąt tworzy przekątna sześcianu z podstawą? (Dokładniej, niech wierzchołki sześcianu będą utworzone przez wszystkie kombinacje zer i jedynek: (0,0,0), (0,0,1) itd., (1,1,0) itd., (1,1,1). Ad a): Np: Jedna przekątna przechodzi przez wierzchołki (0,0,0) i (1,1,1), a druga przez (1,1,0) i (0,0,1). Ad b): Jedna z powyższych przekątnych z płaszczyzną 1-2 tzn. xy)

10. Mamy wektory $\mathbf{x} = [1, 2, 3]$, $\mathbf{y} = [2, -3, 4]$, $\mathbf{z} = [3, -4, -5]$. Znaleźć:

    (a) Pola powierzchni każdej ze ścian,

    (b) Objętość równoległościanu. Sugerowana metoda: $V = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$.

11. Pokazać dla symbolu zupełnie antysymetrycznego:

    (a) $\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$

    (b) $\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{jl}\delta_{im}$.

12. Pokazać tożsamość wektorową:

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \mathbf{y}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - \mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

13. Pokazać tożsamości wektorowe:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{z}, \mathbf{x} \times \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{z} \times \mathbf{x})$$

    Jakie jest geometryczne znaczenie tych równości?