

Lista 5: Kresy oraz ciągi

4.11.2013

1. Sprawdzić słuszność wzorów: Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\max\{x, y\} = \frac{|x - y| + x + y}{2}, \quad \min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2}$$

2. Niech p oznacza dowolną liczbę pierwszą. Pokazać, że \sqrt{p} jest liczbą niewymierną.
3. Sprawdzić, czy następujące liczby są wymierne czy niewymierne:

$$\sqrt{3} + \sqrt{2}; \quad \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - 2\sqrt{6}, \quad \sqrt[4]{2}.$$

4. Czy suma, różnica, iloczyn i iloraz dwóch liczb niewymiernych musi być liczbą niewymierną?
5. Piąty, siódmy i dwunasty wyraz ciągu arytmetycznego a_1, a_2, a_3, \dots tworzą kolejne elementy ciągu geometrycznego. Znaleźć ogólny wyraz ciągu geometrycznego.
6. ■ (M) Zysk firmy wynosi zawsze o 8000 PLN więcej niż dwukrotny zysk z roku poprzedniego. Jeżeli po pierwszym roku działalności firma uzyskała 30000 pln zysku, znajdź wzór na zysk w dowolnym roku.
7. ■ (H8) Pokazać, że zbiór wartości funkcji $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$ jest nieograniczony.
Rozwiązanie: z definicji, $\forall M \exists x \in \mathbb{R} f(x) > M$ czyli bierzemy dowolne M i pokazujemy, że istnieje takie $x(M)$, że warunek jest spełniony. x zazwyczaj zależy będzie od M . Można zadanie ułatwić sobie wstępnie szacując funkcję f przez łatwiejszą do analizy.
8. (H11) Pokazać, że zbiór liczb postaci $m\sqrt{5} - n, m, n \in \mathbb{N}$ jest nieograniczony z góry. (Dowód np. jw.)
9. ■ Pokazać, że funkcja $f(x) = x \sin x, x \in]0, +\infty[$ nie jest ograniczona z góry ani z dołu. Dowód przez sprzeczność. Zakładamy, że f jest ograniczona z góry przez jakieś M i pokazujemy, że dla np. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{N}$ tego warunku spełnić się nie da. Podobnie robimy z ograniczeniem z dołu dla np. $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{N}$
10. ■ (H12) Wykazać, że kres górny zbioru liczb postaci $\frac{x}{1+x}, x \in \mathbb{R}$ jest równy 1.
Rozwiązanie: a) Zauważamy, że $\frac{x}{1+x} < 1, x > 0$. b) pokazujemy, że dla każdej liczby postaci $1 - \epsilon, \epsilon > 0$ istnieje x_0 takie, że $\frac{x_0}{1+x_0} > 1 - \epsilon$.
11. ■ (H18) Wykazać, że liczba 2 nie jest kresem górnym zbioru liczb postaci $\frac{3n+1}{2n+1}, n \in \mathbb{N}$. Dowód: wystarczy pokazać, że każda liczba tej postaci jest np. mniejsza od $\frac{3}{2}$.
12. (H19) Pokazać, że kres dolny zbioru liczb postaci $\frac{-x^2}{1+x^4}, x \in \mathbb{R}$ wynosi $-\frac{1}{2}$.
13. ■ (H24) Podaj przykłady zbiorów A , dla których: $\sup A \in A, \sup A \notin A, \inf A \in A, \inf A \notin A, \sup A = \inf A$.
14. ■ (H28) Zbadać, czy ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ jest monotoniczny i ograniczony. (Uwaga: Stosować rozumowanie 'wprost' – nie mamy jeszcze ciągłości funkcji!).

15. ■ (H29) Wykazać, że ciąg $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ jest ograniczony z góry przez 1. Rozwiązanie: rozłożyć $\frac{1}{k(k+1)}$ na różnicę dwóch ułamków i samo wyjdzie.
16. (H30) Wykazać, że ciąg $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$ jest malejący i ograniczony.
17. ■ Bezpośrednio z definicji pokazać, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$. (Wstępnie można przypomnieć to co było na wykładzie – że $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. z def.)
18. ■ (H39) Bezpośrednio z definicji pokazać, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0$.
19. (H44) Bezpośrednio z definicji pokazać, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$.
20. ■ Bezpośrednio z definicji pokazać, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + 3 = +\infty$.
21. ■ (K,2.17-2.40) Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (tutaj nie liczymy z definicji lecz korzystamy z twierdzeń o iloczynie, ilorazie itp. ciągów, których granice już znamy):

(a) $u_n = \frac{n}{n+1}, u_n = \frac{n^2-1}{3-n^2},$

(b) $u_n = \frac{(2n-1)^2}{(4n-1)(3n+2)},$

(c) $u_n = \frac{3}{n} - \frac{10}{\sqrt{n}},$

(d) $u_n = \left(\frac{5n-2}{3n-1}\right)^3,$

(e) $u_n = \frac{(-1)^n}{2n-1},$

(f) $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{2n-1},$

(g) $u_n = \frac{2-5n-10n^2}{3n+15},$

(h) $u_n = \frac{\sqrt{1+2n^2}-\sqrt{1+4n^2}}{n},$

(i) $u_n = \frac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2},$

(j) $u_n = \frac{n}{\sqrt[3]{8n^3-n^2-n}}.$

22. ■ (K,2.41-2.46) Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

(a) $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n},$

(b) $u_n = \sqrt{n^2+n} - n,$

(c) $u_n = 3n - \sqrt{9n^2+6n-15},$

(d) $u_n = \sqrt[3]{n^3+4n^2} - n.$

23. ■ (K,2.48-2.53) Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

(a) $u_n = \frac{4^{n-1}-5}{2^{2n-7}},$

(b) $u_n = \frac{53^{2n}-1}{49^n+7},$

(c) $u_n = \frac{2^{n+1}-3^{n+2}}{3^{n+2}},$

(d) $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}-1}.$

24. ■ (K,2.54-2.57) Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (typowe na trzy ciągi):

(a) $u_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}$,

(b) \textcircled{m} $u_n = \sqrt[n]{10^{100}} - \sqrt[n]{\frac{1}{10^{100}}}$,

(c) $u_n = \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}$,

(d) $u_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$ gdzie $a, b > 0$,

(e) $u_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n}$ gdzie a_1, a_2, \dots, a_k są danymi liczbami nieujemnymi.

25. Na odsapnięcie od liczenia granic Niech $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $x \in [-1, 1]$, $n \in \mathbb{N}_+$. Znaleźć $T_1(x)$. Posługując się tożsamością trygonometryczną $\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2 \cos A \cos B$ (kto nie udowodniał tego to niech udowodni teraz; a z rozpędu, analogicznie dla $\sin(A + B) + \sin(A - B) = \dots$; kto chce, niech powie tu gwoli komentarza o dudnieniach) pokazać, że $T_2(x) = 2x^2 - 1$ oraz, że $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$. Udowodnić indukcyjnie lub nie, że $T_n(x)$ jest wielomianem stopnia n (to też jest zadanie maturalne, maj 2004)