Matematyka I – lista zadań nr 8.

1. ■ Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ w jej punkcie przegięcia. (Plus definicja punktu przegięcia).

2. ■ Napisać równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = e^{-x^2}$ w jej punktach przegięcia.

3. Pokazać, że funkcja $f(x) = xe^{-x^2}$ jest różnowartościowa na przedziale $]\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty[$. Znaleźć pozostałe przedziały, na których jest różnowartościowa.

4. Pokazać, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność
$$2x \mathrm{arctg\,x} \geqslant \mathrm{ln(1 + x^2)}.$$

5. Pokazać, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność
$$\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}.$$

6. Pokazać, że jeżeli x_0 jest pierwiastkiem *wielokrotnym* wielomianu $P(x)$, to x_0 jest też pierwiastkiem pochodnej $P'(x)$ tego wielomianu.

7. Wykazać następujące nierówności:
   (a) $\ln x \leqslant \sqrt{x}$ dla $x > 0$;
   (b) $\ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) < \dfrac{1}{x} + \ln x$ dla $x > 0$;
   (c) $\ln x \leqslant \dfrac{x - 1}{\sqrt{x}}$ dla $x > 0$, $x \neq 1$;
   (d) $2 \ln x < x - \dfrac{1}{x}$ dla $x > 1$;
   (e) $\dfrac{2}{2x + 1} < \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + x}}$
   (f) $\sin x + \mathrm{tg}\, x > 2x$ dla $x \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$;
   (g) $\sin x \cdot \mathrm{tg}\, x > x^2$ dla $x \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$;

8. ■ Pokazać, że
$$\frac{x}{x + 1} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x \qquad \text{dla} \quad x > -1.$$

9. ■ Pokazać, że
$$x^\alpha - \alpha x \leqslant 1 - \alpha \quad \text{dla} x \geqslant 0 \quad \text{i} \quad \alpha \in]0, 1[$$

10. Pokazać, że $\mathrm{arctg} \dfrac{1}{\mathrm{x}} + \mathrm{arctg\,x} = \dfrac{\pi}{2}$ dla $x > 0$.

11. Wykazać, że zachodzą równości:

(a) $\operatorname{arctg} \mathrm{x} + \operatorname{arctg} \frac{1-\mathrm{x}}{1+\mathrm{x}} = \frac{\pi}{\mathrm{x}}$ dla $x > -1$;

(b) $2\operatorname{arctg} \mathrm{x} + \arcsin \frac{2\mathrm{x}}{1+\mathrm{x}^2} = \pi \operatorname{sgn} \mathrm{x}$ dla $|x| > 1$;

(c) $3\arccos \mathrm{x} - \arccos(3\mathrm{x} - 4\mathrm{x}^3) = \pi$ dla $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$;

12. ■ Obliczyć następujące granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 2\mathrm{x} - 2\arcsin \mathrm{x}}{x^3}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\operatorname{tg} x - x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0_+} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^x$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{\sin^2 x}$;

(f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$;

(g) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \mathrm{x}\right)^x$;

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} \mathrm{x}}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right)$;

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$;

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{1}{2x^2}\right)$;

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} \mathrm{x}}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\arcsin \mathrm{x}}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

(n) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

(o) $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^{-x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

(p) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[x^2 \left(\operatorname{arctg} \mathrm{x} - \frac{\pi}{2}\right) + x\right]$.

13. Zbadać przebieg następujących funkcji. Tzn: Znaleźć dziedzinę; zbadać ciągłość i różniczkowalność; jeśli funkcja jest nieciągła to znaleźć granice w punktach nieciągłości; znaleźć przedziały monotoniczności; znaleźć punkty krytyczne, sprawdzić, które są minimami i maksimami; jeśli istnieją, to znaleźć punkty przegięcia; przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji; jeśli istnieją, to znaleźć asymptoty; na podstawie otrzymanych informacji naszkicować wykres funkcji.

(a) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$;

(b) $f(x) = \frac{x+1}{x\sqrt{x}}$;

(c) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$;

(d) $f(x) = xe^{-x^2}$;

(e) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$;

(f) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}e^{-\frac{x^2}{3}}$

(g) ;

14. Do rzeki o szerokości 30 m wpada pod kątem prostym kanał o szerokości 10 m. Jaka jest największa długość pnia drewna, który może wpłynąć z kanału do rzeki (lub vice versa)?

15. Światło porusza się tak, aby czas jego przejścia pomiędzy dwoma punktami był możliwie najkrótszy. Pokazać, że z tej zasady wynika:

    (a) *Gdy rozpatrujemy zjawisko odbicia światła na granicy dwóch ośrodków* – wynika zasada, że kąt padania jest równy kątowi odbicia;

    (b) *Gdy rozpatrujemy przejście z jednego ośrodka do drugiego* – wynika prawo Snella.

16. Znaleźć największą wartość funkcji $f(x)$ na zbiorze liczb rzeczywistych: $f(x) = (7+x)\sqrt[3]{11-3x}$.

17. Znaleźć objętość największego stożka wpisanego w kulę.

18. Znaleźć objętość najmniejszego stożka opisanego na kuli.