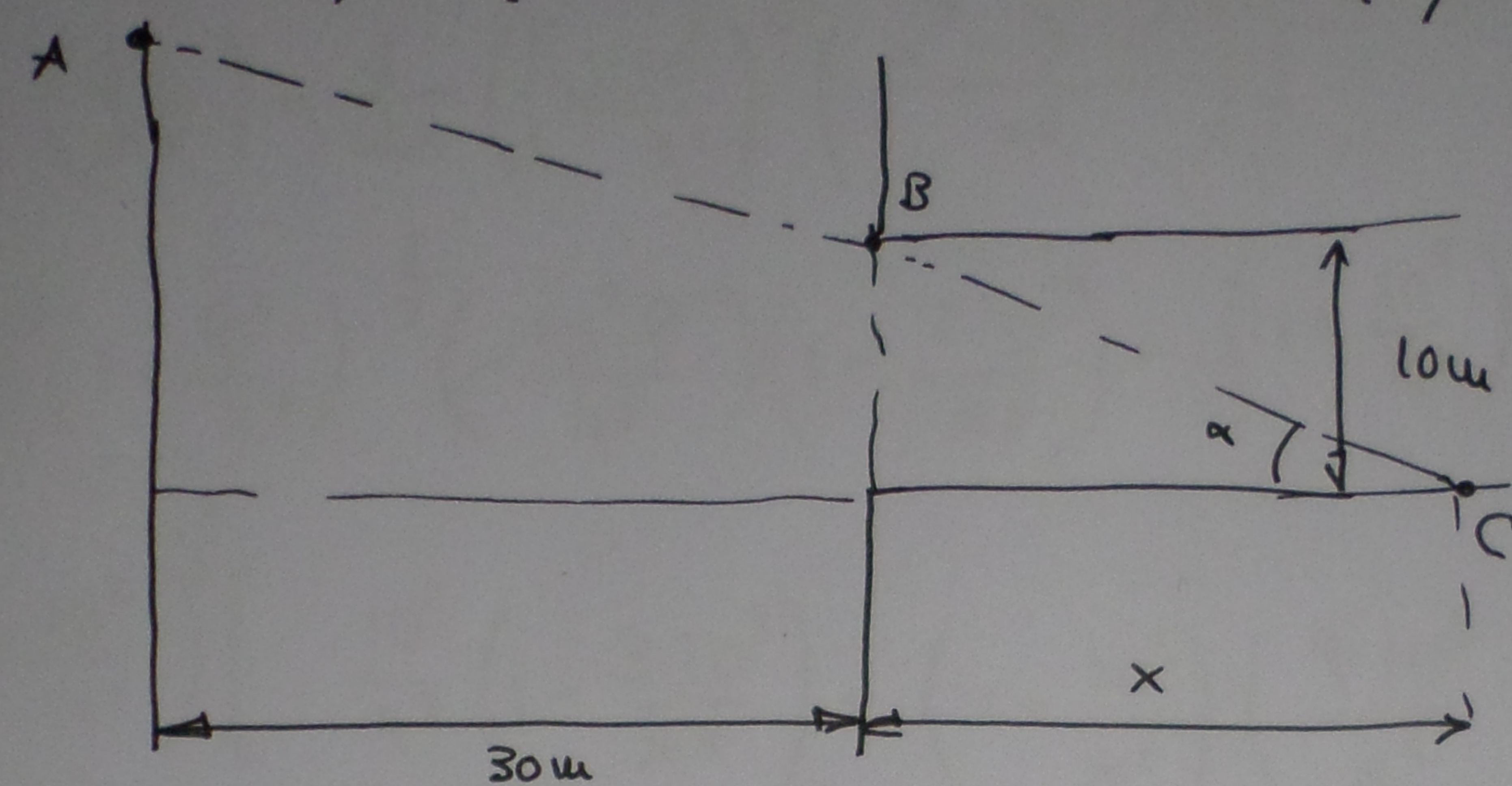
14 Do rzeki o szerokości 30 m wpada pod kątem prostym kanał o szerokości 10m. Jaka jest największa długość pnia drewna, który może wpłynąć z kanału do rzeki (lub vice versa)?

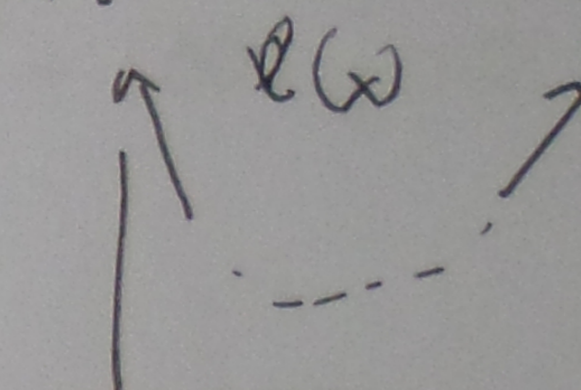
Pnie drewna nie wpływą do rzeki z kanału gdy



dotyka w trzech punktach A, B i C. Wtedy, jeżeli pnie jest krótsza od najmniejszej odległości między punktami AC, to może wpłynąć do rzeki.

Widać, że $tg\alpha = \frac{10}{x}$ i $AC = \frac{x+30}{\cos\alpha} = (x+30)(1+tg^2\alpha)^{1/2}$

$\Rightarrow \quad l \equiv AC = (x+30)\left(1+\frac{10^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$



Widać, że gdy $x \to 0$ to $l \to +\infty$ i $x \to +\infty$ to $l \to +\infty$. Więc, jeżeli funkcja extremum, to musi być minimum.

Sprawdzamy minimum funkcji $l(x)$

$$\frac{dl}{dx} = \left(1+\frac{10^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{(x+30)}{\cancel{2}}\left(1+\frac{10^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{10^2\cancel{2}}{x^3}$$

$$= \left(1+\frac{10^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{(x+30)10^2}{\left(1+\frac{10^2}{x^2}\right)x^3}\right] = \left(1+\frac{10^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{x^3+\cancel{10^2x}-\cancel{10^2x}-30\cdot10^2}{\left(1+\frac{10^2}{x^2}\right)x^3}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \sqrt[3]{3}\cdot 10} \quad \Rightarrow \quad l = (3+\sqrt[3]{3})\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 10$$

II

Aby sprawdzić, że $f(x)$ ma minimum dla $x_m = \sqrt[3]{3}\cdot 10$ możemy sprawdzić, że

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x_m) > 0.$$

Mamy, że

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\left[1+\frac{10^2}{x^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x^3-3\cdot 10^3}{x^3}\right)\right)$$

$$= -\cancel{\tfrac{1}{2}}\left(1+\frac{10^2}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{10^2\cdot\cancel{2}}{x^3}\right)\left(1-\frac{3\cdot 10^3}{x^3}\right) + \left(1+\frac{10^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{9\cdot 10^3}{x^4}\right)$$

$$= \left(1+\frac{10^2}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left[\frac{10^2}{x^3}\left(1-\frac{3\cdot 10^3}{x^3}\right) + \left(1+\frac{10^2}{x^2}\right)\left(\frac{9\cdot 10^3}{x^4}\right)\right]$$

$$= \left(1+\frac{10^2}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left[\frac{9\cdot 10^3}{x^4} + \frac{10^2}{x^3} + \frac{3\cdot 10^5}{x^6}\right] = \frac{10^2}{x^6}\left(1+\frac{10^2}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left[90x^2 + x^3 + 6000\right]$$

Więc,

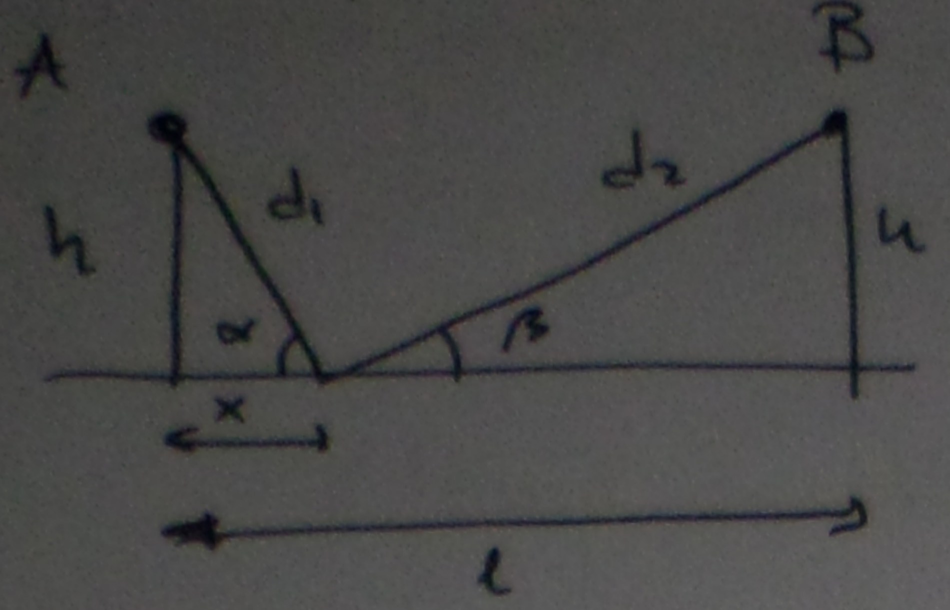
$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x_m) = \frac{10^2}{3^2\cdot 10^6}\left(1+\frac{10^2}{\sqrt[3]{3^2}\,10^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left[90\cdot 10^2\cdot\sqrt[3]{3^2} + 3\cdot 10^3 + 6000\right] > 0.$$

i $f(x)$ ma minimum dla $x_m = x$.

15. Światło się porusza tak, aby czas jego przejścia pomiędzy dwoma punktami był możliwie najkrótszy. Pokazać, że z tej zasady wynika:

a) gdy rozpatrujemy zjawisko odbicia światła na granicy dwóch ośrodków – wynika zasada, że kąt padania jest równy kątowi odbicia.

Dane dwa punkty A i B, mamy że czas przejścia pomiędzy A i B jest najkrótszy gdy d_1+d_2 jest najmniejsza. II



Mamy, że

$$\left.\begin{array}{l} d_1=\sqrt{h^2+x^2} \\ d_2=\sqrt{h^2+(l-x)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad d_1+d_2=\sqrt{h^2+x^2}+\sqrt{h^2+(l-x)^2}=f(x)$$

Szukamy minimum funkcji $f(x)$:

$$\frac{df}{dx}=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{h^2+x^2}}-\frac{\cancel{2}(l-x)}{\cancel{2}\sqrt{h^2+(l-x)^2}}=0 \Rightarrow x^2(h^2+(l-x)^2)=(l-x)^2(h^2+x^2)$$

$$\Rightarrow \cancel{h^2x^2+l^2x^2+x^4}-2lx^3=\cancel{x^4+(l^2+h^2)x^2}-2lh^2x-2lx^3+l^2h^2$$

$$\Rightarrow l^{\cancel{2}}\cancel{h^2}=2\cancel{l}\cancel{h^2}x \rightarrow \boxed{x=\frac{l}{2}}.\quad \text{Widać, że } \frac{df}{dx}\left(\frac{l}{2}\right)=0.$$

Skoro $f(x)\to+\infty$ gdy $x\to\pm\infty$ i tylko ma jeden punkt krytyczny, to minimum. Też można to udowodnić licząc drugą pochodną w $x=\frac{l}{2}$

$$\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{h^2-x^2}}-\frac{l-x}{\sqrt{h^2+(l-x)^2}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{h^2-x^2}+x\frac{*}{\sqrt{h^2-x^2}}}{(\sqrt{h^2-x^2})^2}-\frac{-\sqrt{h^2+(l-x)^2}+(l-x)\frac{(l-x)}{\sqrt{h^2+(l-x)^2}}}{h^2+(l-x)^2}.$$

$$=\frac{h^2-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}}{\sqrt{(h^2-x^2)^3}}+\frac{h^2}{\sqrt{(h^2+(l-x)^2)^3}}>0\ !!$$

$$\frac{d^2f}{dx^2}\left(\frac{l}{2}\right)>0 \Rightarrow x=\frac{l}{2} \text{ to minimum.} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha=\mathrm{arctg}\,\frac{h}{l/2}\\ \beta=\mathrm{arctg}\,\frac{h}{\ldots}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\alpha=\beta}$$

b) Gdy rozpatrujemy przejście z jednego ośrodka do drugiego, wynika prawo Snella ($n_1 \cos\alpha = n_2 \cos\beta$)

Prędkość światła w ośrodku punktu A jest

$$v_A = \frac{c}{n_A}$$

i w ośrodku punktu B jest

$$v_B = \frac{c}{n_B}.$$

Więc, czas przejścia ~~od~~ z A do B, to

$$t_{AB} = \frac{d_A \cdot n_A}{c} + \frac{d_B n_B}{c} = \frac{h}{c}\left(\frac{n_A}{\sin\alpha} + \frac{n_B}{\sin\beta}\right).$$

Mamy, że

$$d_A \cos\alpha + d_B \cos\beta = l \Rightarrow \frac{h\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{h\cos\beta}{\sin\beta} = l$$

$$\Rightarrow \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{l}{h} \Rightarrow -\frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\sin^2\beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}}$$

Aby znaleźć minimum funkcji $t_{AB}(\alpha)$

$$\frac{dt_{AB}}{d\alpha} = \frac{h}{c}\left(-\frac{n_A}{\sin^2\alpha}\cos\alpha - \frac{n_B}{\sin^2\beta}\cos\beta\frac{d\beta}{d\alpha}\right)$$

$$= \frac{h}{c}\left(-\frac{n_A}{\sin^2\alpha}\cos\alpha + \frac{n_B}{\cancel{\sin^2\beta}}\cos\beta\frac{\cancel{\sin^2\beta}}{\sin^2\alpha}\right) = 0 \quad \boxed{n_B\cos\beta = n_A\cos\alpha}$$

Prawo Snella.

16. Znaleźć największą wartość funkcji f(x) na zbiorze liczby rzeczywistych

$$f(x) = (7+x)\sqrt[3]{11-3x}$$

Musimy sprawdzić, czy ta funkcja ma ekstremum. Aby to zrobić, zbadamy jej pochodną

$$\frac{df}{dx} = \sqrt[3]{11-3x} + (7+x)(11-3x)^{-\frac{2}{3}}(-3)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{(11-3x) - \cancel{3}(7+x)}{\sqrt[3]{(11-3x)^2}} = \frac{\cancel{-}4\cancel{0} - 4x}{\sqrt[3]{(11-3x)^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x=1}$$

Funkcja f ma punkt krytyczny dla $x=1$. Ten punkt to maksimum ponieważ

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{4(1-x)}{\sqrt[3]{(11-3x)^2}}\right) = 4\,\frac{-\sqrt[3]{(11-3x)^2} + (1-x)\frac{2}{\cancel{3}}(11-3x)^{-\frac{1}{3}}(\cancel{+3})}{\sqrt[3]{(11-3x)^4}}$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 4\left[\frac{2(1-x) - (11-3x)}{\sqrt[3]{(11-3x)^4}}\right] = 4\,\frac{-9+x}{(11-3x)^{4/3}}$$

dla $x=1$ $\quad \frac{d^2f}{dx^2} < 0 \Rightarrow$ f ma w punkcie $x=1$ maksimum lokalny

Jeżeli ma tylko jeden maksimum, to maksimum globalny i ~~tego~~ wartość maksymalna funkcji f jest

$$f(1) = 8\sqrt[3]{8} = 16.$$