



ĆWICZENIA Z MATEMATYKI I



Kartkówka IX

J. de Lucas

Ćwiczenie 1. (3 punkty) Znaleźć dziedzinę i obraz wartości funkcji

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

Ćwiczenie 2. (3 punkty) Czy funkcja f dana wzorem

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

gdzie a, b, c i d są liczbami rzeczywistymi, jest różnowartościowa? Oblicz jej obraz wartości.

Ćwiczenie 3. (2 punkty) Rozwiąż

$$\left| \frac{x^2 - 9}{x + 3} \right| \leq 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ćwiczenie 4. (4 punkty) Rozwiąż

$$\frac{1 + \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 4, \quad \log(x) - \log(1 + \sqrt{x}) = 2.$$

Ćwiczenie 5. (2 punkty) Udowodnij, że $3^{4n+1} - 5^{2n-1}$ jest podzielny przez 7 dla każdej $n \in \mathbb{N}$.

Ćwiczenie 6. (2 punkty) Oblicz kąty trójkąta z wierzchołkami

$$P_1 = (1, 0, 1), \quad P_2 = (2, -1, 0), \quad P_3 = (0, 0, 1).$$

Ćwiczenie 7. (2 punkty) Ustal czy następujące wektory są liniowo niezależne

$$v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (0, -1, 0), \quad v_3 = (1, -2, 1).$$



ĆWICZENIA Z MATEMATYKI I



Ćwiczenie 8. (2 punkty) Dane wektory $v_1 = (1, 1, 1)$ i $v_2 = (1, 0, -1)$, oblicz

$$v_1 \times v_2 \quad \text{i} \quad v_1 \cdot v_2.$$

Ćwiczenie 9. (6 punktów) Rozwiąż

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x - y + 2z = 0, \\ -x + 2y + z = -2. \end{cases}$$

Ćwiczenie 10. (6 punktów) Oblicz

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{4/3} (\sqrt[3]{1+n^2} - \sqrt[3]{n^2-2}), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1+n^2}{1+n^2} \right)^{n^2}.$$

Ćwiczenie 11. (5 punktów) Ustal dla których wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ następująca funkcja $f : (\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos ax - 1}{x^2}, & x \neq 0, \\ -1, & x = 0. \end{cases}$$

Jeżeli f jest ciągła dla pewnej wartości a , czy jest też różniczkowalna?

Ćwiczenie 12. (3 punktów) Oblicz:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sec x - 1}.$$

Ćwiczenie 13. (4 punkty) Oblicz $f'_+(0)$, $f'_-(0)$ i $f'(0)$ (jeżeli istnieją) funkcji $f(x) = |x|$.

Ćwiczenie 14. (4 punkty) Oblicz $d^5 f/dx^5$ dla następującej funkcji

$$f(x) = \ln \left(\sqrt{\frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}} \right).$$



ĆWICZENIA Z MATEMATYKI I



Ćwiczenie 15. (4 punkty) Oblicz prostą styczną i normalną (prostopadłą) do funkcji $f(x) = \arctan x$ w punkcie $(1, f(1))$.

Ćwiczenie 16. (3 punkty) Oblicz n -te pochodne funkcji: $f(x) = \ln(x)$, $f(x) = e^x$.

Ćwiczenie 17. (3 punkty) Udowodnij, że $1 + 2x + x^2 \leq e^{2x+x^2}$ dla $x \geq 0$.

Ćwiczenie 18. (2 punkty) Rozwiąż $z^2 - (3 - i)z + (8 + i) = 0$ dla $z \in \mathbb{C}$.

Ćwiczenie 19. (10 punkty) Znaleźć dziedzinę, zbadać ciągłość i różniczkowalność, jeżeli funkcja jest nieciągła to znaleźć granice w punktach nieciągłości, znaleźć przedziały monotoniczności, znaleźć punkty krytyczne, sprawdzić, które są minimami i maksimami; jeżeli istnieją, to znaleźć punkty przegięcia; znaleźć przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji; jeżeli istnieją, to znaleźć asymptoty; na podstawie otrzymanych informacji naszkicować wykres funkcji:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}.$$

Proszę oddać mi rozwiązania 10 stycznia.