Teoria miary i całki 2012/2013

Seria I, 4 III 2013 r.

Javier de Lucas

Zadanie 1. Bądź $(E_n : n \in \mathbb{N})$ i $(F_n : n \in \mathbb{N})$ będą ciągami podzbiorów zbioru X. Wykaż, że

- a)

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} E_n \cup \liminf_{n\to\infty} F_n \subset \liminf_{n\to\infty}(E_n \cup F_n) \subset \liminf_{n\to\infty} E_n \cup \limsup_{n\to\infty} F_n \\ \subset \limsup_{n\to\infty}(E_n \cup F_n) \subset \limsup_{n\to\infty} E_n \cup \limsup_{n\to\infty} F_n.\end{aligned}$$

- b)

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} E_n \cap \liminf_{n\to\infty} F_n \subset \liminf_{n\to\infty}(E_n \cap F_n) \subset \liminf_{n\to\infty} E_n \cap \limsup_{n\to\infty} F_n \\ \subset \limsup_{n\to\infty}(E_n \cap F_n) \subset \limsup_{n\to\infty} E_n \cap \limsup_{n\to\infty} F_n.\end{aligned}$$

- c) Wykaż, że jeżeli istnieją $\lim_{n\to\infty} E_n$ i $\lim_{n\to\infty} F_n$, to istnieją $\lim_{n\to\infty} E_n \cup F_n$ i $\lim_{n\to\infty} E_n \cap F_n$.

Zadanie 2. Bądź $(A_n : n \in \mathbb{N})$ będzie ciągiem podzbiorów zbioru X. Usuwając skończoną liczbę wyrażeń tego ciągu, możemy zdefiniować drugi ciąg $(B_n : n \in \mathbb{N})$ podzbiorów zbioru X. Wykaż, że

$$\liminf_{n\to\infty} B_n = \liminf_{n\in\infty} A_n, \qquad \limsup_{n\to\infty} B_n = \limsup_{n\in\infty} A_n.$$

Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} B_n$ istnieje wtedy i tylko wtedy istnieje $\lim_{n\to\infty} A_n$. Gdy istnieją, $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n$. Wykaż, że dane ciągi podzbiorów $(A_n : n \in \mathbb{N})$ i $(B_n : n \in \mathbb{N})$ takie, że $A_n \neq B_n$ tylko dla n należących do pewnego skończonego podzioru zbioru $\mathbb{N}$, to

$$\liminf_{n\to\infty} B_n = \liminf_{n\to\infty} A_n, \qquad \limsup_{n\to\infty} B_n = \limsup_{n\to\infty} A_n, \qquad \exists \lim_{n\to\infty} B_n \leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} A_n,$$

i jeżeli istnieją $\lim_{n\to\infty} A$ i $\lim_{n\to\infty} B_n$ to są równe.

Zadanie 3. Dane punkt $a \in \mathbb{R}$ i ciąg punktów $(x_n : n \in \mathbb{N})$ takie, że $x_n \neq a$ i $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, wykaż, że $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} \neq \{a\}$. Dane $E \subset \mathbb{R}$ i $t \in \mathbb{R}$ zdefiniujemy $E + t = \{x + t : x \in E\}$. Dany ciąg $(t_n : n \in \mathbb{N}) \subset \mathbb{R}$ taki, że $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ i $E_n = E + t_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, szukaj $E \subset \mathbb{R}$ takie, że $\lim_{n\to\infty} E_n \neq E$.

Zadanie 4. Funkcja charakterystyczna 1_A podzbioru $A \subset X$, to funkcja na X postaci

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Dany ciąg $(A_n : n \in \mathbb{N})$ podzbiorów X, wykaż, że jeżeli $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, to $\lim_{n\to\infty} 1_{A_n} = 1_A$. Wykaż, że jeżeli $\lim_{n\to\infty} 1_{A_n} = 1_A$, to $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

Zadanie 5. Bądź $\mathfrak{A}$ będzie σ-ciałem podzbiorów danego zbioru X i $Y \subset X$. Wykaż, że $\mathfrak{B} = \{A \cap Y : A \in \mathfrak{A}\}$ to σ-ciało podzbiorów Y.

Zadanie 6. Dana rodzina $\mathfrak{A}$ podzbiorów danego zbioru X taka, że:

- $X \in \mathfrak{A}$,
- $A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \backslash B = A \cap B^c \in \mathfrak{A}$,

wykaż, że $\mathfrak{A}$ to algebra podzbiorów zbioru X.

Zadanie 7. Dana algebra $\mathfrak{A}$ podzbiorów zbioru X. Załóź, że $\mathfrak{A}$ spełnia, że dla każdego rosnącego ciągu $(A_n : n \in \mathbb{N}) \subset \mathfrak{A}$ mamy, że $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$. Wykaż, że $\mathfrak{A}$ jest σ-algebrą, tj. σ-ciałem.

Zadanie 8. Wykaż, że dany rosnący ciąg algebr $(\mathfrak{A}_n : n \in \mathbb{N})$ podzbiorów X, to $\cup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n$ to algebra podzbiorów X. Podaj przykład pokazujący, że nawet kiedy $\mathfrak{A}_n$ jest σ-algebrą dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to suma nie musi być koniecznie σ -algebrą.

Zadanie 9. Bądź $(X, \mathfrak{A})$ będzie mierzalną przestrzenią i $(E_n : n \in \mathbb{N})$ rosnący ciąg zawarty w $\mathfrak{A}$ taki, że $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$. Bądź $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{A} \cap E_n$. Wykaż, że $\mathfrak{A}$ to σ-ciało podzbiorów E_n dla każdej $n \in \mathbb{N}$. Czy spełnia się, że $\cup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}$?

Zadanie 10. Dany skończony zbiór X. Mówi się, że $A \subset X$ jest ko-skończony, gdy A^c jest skończonym zbiorem. Bądź $\mathfrak{A}$ będzie złożony ze skończonych i ko-skończonych podziorów X. (a) Wykaż, że $\mathfrak{A}$ to algebra podzbiorów X. (b) Wykaż, że $\mathfrak{A}$ to σ-algebra wtedy i tylko wtedy X jest skończonym zbiorem.