Teoria miary i całki 2012/2013

Seria III, 18 III 2013 r.

Javier de Lucas

Zadanie 1. Dany nieskończony przeliczalny zbiór X i σ-algebra $\mathcal{A}$ podzbiorów zioru X. Zdefiniujemy funkcję $\mu : A \to \bar{\mathbb{R}}$ postaci

$$\mu^*(E) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } E \text{ jest skończonym zbiorem} \\ \infty & \text{innaczej} \end{cases}$$

Wykaż, że

(a) μ jest addytywna a nie przeliczalnie addytywna na $\mathcal{A}$. (b) X jest granicą rosnącego ciągu $(E_n : n \in \mathbb{N}) \subset \mathcal{A}$ takiego, że $\mu(E_n) = 0$ dla wszystkich E_n i $\mu(X) = 1$.

Zadanie 2. Niech X będzie nieskończonym zbiorem i μ będzie Dane nieskończony zbiór X i σ-algebra $\mathcal{A}$ skończonych i ko-skończonych podzbiorów zbioru X. Zdefiniujemy funkcję μ na $\mathcal{A}$ postaci

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{jesli } A \text{ jest skonczonym zbiorem} \\ 1 & \text{jesli } A \text{ jest ko} - \text{skonczonym zbiorem} \end{cases}$$

Wykaż, że

- μ jest addytywna na $\mathcal{A}$.
- gdy X jest przeliczalny i nieskończony, to μ nie jest przyliczalnie addytywna na $\mathcal{A}$.
- gdy X jest przeliczalny i nieskończony, to X jest granicem rosnącego ciągu $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ taki, że $\mu(A_n) = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, a $\mu(X) = 1$.
- gdy X jest nieprzeliczalny, to μ jest przeliczalnie addytywna na $\mathcal{A}$.

Zadanie 3. Dane nieprzeliczalny zbiór X i σ-algebra $\mathcal{A}$ przeliczalnych i nieprzyliczalnych podzbiorów zbioru X. Zdefiniujemy funkcję μ na $\mathcal{A}$ postaci

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{jesli } A \text{ jest przeliczalny} \\ 1 & \text{jesli } A \text{ jest ko} - \text{przeliczalny} \end{cases}$$

Wykaż, że μ jest przeliczalnie addytywna na $\mathcal{A}$.

Zadanie 4. Niech $X = (0, \infty)$ i $\mathcal{J}$ będzie rodziną podzbiorów postaci $(n-1, n]$ dla $n \in \mathbb{N}$. Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną wszystkich sum elementów $\mathcal{J}$ i pustego zbioru. Dla każdego $A \in \mathcal{A}$, zdefiniujemy $\mu(A)$ jako liczbę elementów $\mathcal{J}$ w A.

- Wykaż, że $\mathcal{A}$ to σ-algebra podzbiorów zbioru X.
- Wykaż, że μ to miara na $\mathcal{A}$.

Zadanie 5. Niech $(X, \mathcal{A}, \mu)$ będzie skończoną mierzalną przestrzenią i $\mathfrak{C} = \{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ będzie rodziną rozłącznych elementów $\mathcal{A}$ takich, że $\mu(E_\lambda) > 0$ dla każdego $\lambda \in \Lambda$. Wykaż, że $\mathfrak{C}$ jest przeliczalną rodziną.

Zadanie 6. Dana mierzalna przestrzeń $(X, \mathcal{A}, \mu)$, mówi się, że ciąg $(A_n : n \in \mathbb{N})$ w $\mathcal{A}$ jest prawie rozłączny jeżeli $\mu(A_j \cap A_i) = 0$ dla $j \neq i$. (a) Wykaż, że gdy $(A_n : n \in \mathbb{N}) \subset \mathcal{A}$ jest prawie rozłączny, to $\mu\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_N)$ (b) Wykaż, że gdy $(A_n : n \in \mathbb{N}) \subset \mathcal{A}$ jest taki, że $\mu\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_N) < \infty$ to $(A_n : n \in \mathbb{N}) \subset \mathcal{A}$ jest prawie rozłączny.

Zadanie 7. Dana miara μ na σ-algebra $\mathcal{A}$ podzbiorów zbioru X i pod-σ-algebra $\mathcal{A}_0$. Wykaż, że μ na $\mathcal{A}_0$ jest miarą na $\mathcal{A}_0$.

Zadanie 8. Dane miary μ_1 i μ_2 na σ algebra $\mathcal{A}$ podzbiorów zbioru X i $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$. Wykaż, że $\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2$ na $\mathcal{A}$ zdefiniowane na $E \in \mathcal{A}$ postaci

$$(\alpha_1\mu_1 + \alpha\mu_2)(E) = \alpha_1\mu_1(E) + \alpha_2\mu_2(E)$$

jest miarą.

Zadanie 9. Niech $(X, \mathcal{A}, \mu)$ będzie σ-skończoną mierzalną przestrzenią taką, że istnieje ciąg $(E_n : n \in \mathbb{N})$ w $\mathcal{A}$ taki, że $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$ i $\mu(E_n) < \infty$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wykaż, że istnieje ciąg rozłącznych podzbiorów $(F_n : n \in \mathbb{N})$ w $\mathcal{A}$ taki, że $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n = X$ i $\mu(F_n) < \infty$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 10. Niech $(X, \mathcal{A}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną. Wykaż, że dla każdych E_1 i E_2 w $\mathcal{A}$ mamy, że $\mu(E_1 \cup E_2) + \mu(E_1 \cap E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$.

Zadanie 11. Symetryczna różnica między dwoma zbiorami A i B zbioru X to zbiór postaci $A\Delta B = A\backslash B \cup B\backslash A$. (a) Wykaż, że dla trzech dowolnych podzbiorów A, B i C zbioru X, to $A\Delta B \subset (A\Delta C) \cup (C\Delta B)$. (b) Niech $(X, \mathcal{A}, \mu)$ będzie mierzalną przestrzenią, to $\mu(A\Delta B) \leqslant \mu(A\Delta C) + \mu(C\Delta B)$ dla każdych $A, B, C \in \mathcal{A}$.