Teoria miary i całki 2012/2013

Seria VI, 5 V 2013 r.

Javier de Lucas

Zadanie 1. Niech $\mathbb{Q}$ będzie podzbiorem wszystkich liczb wymiernych. Dane $\epsilon > 0$, podaj otwarty podzbiór O taki, że $\mathbb{Q} \subset O$ i $\mu_L^*(O) < \epsilon$.

Zadanie 2. Niech $\mathbb{Q}$ będzie podzbiorem wszystkich liczb wymiernych. Wykaż, że: a) $\mathbb{Q}$ to podzbiór miary zero, b) $\mathbb{Q}$ to F_σ-podzbiór, c) istnieje G_δ-podzbiór G, taki, że $\mathbb{Q} \subset G$ i $\mu_L(G) = 0$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ to G_δ-podzbiór.

Zadanie 3. Wykaż, że dla każdego rosnącego ciągu $(E_n : n \in \mathbb{N})$ podzbiorów $\mathbb{R}$, to $\lim_{n\to\infty} \mu_L^*(E_n) = \mu_L^*(\lim_{n\to\infty} E_n)$.

Zadanie 4. Wykaż, że warunek μ_L^*-mierzalności podzbioru $E \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$, czyli

$$\mu_L^*(A) = \mu_L^*(A \cap E) + \mu_L^*(A \cap E^c), \quad \forall A \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}),$$

jest równoważny warunkowi

$$\mu_L^*(I) = \mu_L^*(I \cap E) + \mu_L^*(I \cap E^c), \quad \forall I \in \mathcal{I}_0,$$

gdzie $\mathcal{I}_0$ to zbiór wszystkich otwartych podzbiorów na $\mathbb{R}$.

Zadanie 5. Niech $(X, \mathcal{A})$ będzie przestrzenią mierzalną, f funkcją $f : D \subset X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. a) Wykaż, że jeżeli $\{x \in D : f(x) < r\} \in \mathcal{A}$, dla każdej $r \in \mathbb{Q}$, to f jest $\mathcal{A}$-mierzalna na D. a) Czy istnieją inne podzbiory $\mathbb{R}$ z taką właściwością? c) Wykaż, że jeżeli f to $\mathcal{A}$-mierzalna funkcja na D, to istnieje przeliczalna rodzina podzbiorów $\mathfrak{C} \subset \mathcal{A}$ taka, że f jest $\sigma(\mathfrak{C})$-mierzalną na D.

Zadanie 6. Niech $\mathfrak{E}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru X. Niech $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ będzie $\sigma(\mathfrak{E})$-mierzalną funkcją. Wykaż, że istnieje przeliczalna podrodzina $\mathfrak{C}$ rodziny $\mathfrak{E}$ takiej, że f jest $\mathfrak{C}$-mierzalna.

Zadanie 7. Wykaż, że następujące funkcje na $\mathbb{R}$ są mierzalne w sensie Borela (a więc mierzalne w sensie Lebesgue'a)

1. $f(x) = 0$ gdy $x \in \mathbb{Q}$ i $f(x) = 1$ gdy $x \in \mathbb{Q}^C$.
2. $f(x) = x$ gdy $x \in \mathbb{Q}$ i $f(x) = -x$ gdy $x \in \mathbb{Q}^C$.