Teoria miary i całki 2012/2013

Seria VII, 12 V 2013 r.

Javier de Lucas

Zadanie 1. Niech X będzie zbiorem i $(Y, \mathfrak{C})$ będzie przestrzenią mierzalną. Dane $T : X \to Y$, wykaż, że $T^{-1}(\mathfrak{C})$ to σ-algebra podzbiorów dziedziny $\mathcal{D}(T)$ funkcji T. Jeżeli $\mathcal{D} = X$, to $T^{-1}(\mathfrak{C})$ jest σ-algebrą X.

Zadanie 2. Dane funkcje $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wykaż, że jeżeli f i g są $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$-mierzalne, czyli mierzalne w sensie Borela, to $g \circ f$ też. Udowodnij, że jeżeli f jest $\mathfrak{M}_L$-mierzalna na $\mathbb{R}$ i g jest $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$-mierzalna, to $g \circ f$ jest $\mathfrak{M}_L$-mierzalna.

Zadanie 3. Niech $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$–mierzalną funkcją na $D \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$. Wykaż, że jeżeli zmienimy wartości f w przeliczalnym zbiorze $D_0 \subset D$, to f jest jeszcze $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$-mierzalna.

Zadanie 4. Niech $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie $\mathfrak{M}_L$-mierzalna na $D \in \mathfrak{M}_L$. Wykaż, że $\sqrt{|f|}$ jest $\mathfrak{M}_L$-mierzalna.

Zadanie 5. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie rosnącą funkcją. Wykaż, że f jest $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$–mierzalną funkcją na $D \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, więc, $\mathfrak{M}_L$-mierzalna.

Zadanie 6. Dane dwie przestrzenie topologiczne $(X, \mathcal{D}_X)$ i $)Y, \mathcal{D}_Y)$. Wykaż, że jeżeli $T : (X, \mathcal{D}_X) \to (Y, \mathcal{D}_Y)$ to homeomorfizm, wtedy $T^{-1}(\mathfrak{B}_Y) = \mathfrak{B}_X$ i $T(\mathfrak{B}_X) = \mathfrak{B}_Y$.

Zadanie 7. Niech $f : D \subset X \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie $\mathcal{A}$-mierzalną funkcją na $D \in \mathcal{A}$ na mierzalnej przestrzeni $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dla M_1, M_2 i $M_1 < M_2$ zdefiniujemy

$$g(x) = \begin{cases} M_1, & f(x) < M_1, \\ f(x), & M_1 \leqslant f(x) \leqslant M_2, \\ M_2, & x > M_2. \end{cases}$$

Wykaż, że g jest mierzalna na D.