Teoria miary i całki 2012/2013

Seria VIII, 12 V 2013 r.

Javier de Lucas

Zadanie 1. Niech $f : D \subset X \to \bar{\mathbb{R}}$ będzie ograniczoną mierzalną funkcją na zbiorze $D \subset \mathcal{A}$ mierzalnej przestrzeni $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Wykaż, że istnieje rosnący ciąg prostych funkcji na D, $(\varphi_n : n \in \mathbb{N})$, taki, że $\varphi_n \uparrow f$ na D. Wykaż, że istnieje malejący ciąg prostych funkcji na D, $(\varphi_n : n \in \mathbb{N})$, taki, że $\varphi_n \downarrow f$ na D.

Zadanie 2. Niech $f : D \subset X \to \bar{\mathbb{R}}$ będzie nie ograniczoną mierzalną funkcją na zbiorze $D \in \mathcal{A}$ mierzalnej przestrzeni $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Wykaż, że dla dowolnej liczby $\epsilon > 0$ nie istnieje prosta funkcja φ na D taka, że $|\varphi(x) - f(x)| < \epsilon$ dla każdego $x \in D$. Wykaż, że nie ma zbieżnego ciągu prostych funkcji zdążającego jednostajnie do f.

Zadanie 3. Niech $f : D \subset X \to \bar{\mathbb{R}}$ będzie mierzalną funkcją na zbiorze $D \subset \mathcal{A}$ mierzalnej przestrzeni $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Wykaż, że istnieje rosnący ciąg funkcji na D, $(\varphi_n : n \in \mathbb{N})$, taki, że $\varphi_n \uparrow f$ na D. Wykaż, że istnieje malejący ciąg funkcji na D, $(\varphi_n : n \in \mathbb{N})$, taki, że $\varphi_n \downarrow f$ na D.

Zadanie 4. Niech $(f_n : n \in \mathbb{N})$ będzie ciągiem funkcji na $[0, 1]$ postaci

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}, \qquad x \in [0, 1].$$

Wykaż, że $(f_n : n \in \mathbb{R})$ jest jednostajnym ograniczonym ciągiem w $[0, 1]$ i oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{nx}{1 + n^2x^2} \mu_L(dx)$$

Wykaż, że $(f_n : n \in \mathbb{N})$ nie zdąża jednostajnie na $[0, 1]$. To dlatego nie można powiedzieć, że

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{nx}{1 + n^2x^2} \mu_L(dx) = \int_{[0,1]} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Zadanie 5. Niech θ będzie funkcją na $[0, 1]$ postaci

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [0, 1]/([0, 1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Czy istnieje całka $\int \theta(x)dx$ w sensie Riemmana? Czy istnieje całka $\int \theta(x)\mu_L(dx)$ w sensie Lebesgue'a?

Zadanie 6. Niech będzie $x \in \mathbb{Q}$. Można napisać $x = p/q$, gdzie $p, q \in \mathbb{N}$, gdzie p i q są liczbami wspólnymi pierwszymi. Zdefiniujemy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}, & x = \frac{p}{q} \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [0, 1]/([0, 1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Wykaż, że f jest całkowalna w sensie Riemmana na $[0, 1]$ i podaj $\int_{[0,1]} f(x)dx$.

Zadanie 7. Niech $(X, \mathcal{A}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną i funkcje $f_n : D \subset X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, i $f : D \subset X \to \mathbb{N}$ będą $\mathcal{A}$-mierzalnymi funkcjami takimi, że $\mu(D) < \infty$ i f ma rzeczywiste obrazy prawie wszędzie na D. Wykaż, że $f_n \xrightarrow{\mu} f$ wtedy i tylko wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \int_D \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} \mu(dx) = 0.$$

Zadanie 8. Dana mierzalna przestrzeń $(X, \mathcal{A}, \mu)$ i ograniczona funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, $D \in \mathcal{A}$, i $\mu(D) < \infty$. Załóż, że $|f(x)| \leqslant M$ dla $x \in D$ dla pewnej stałej $M > 0$. Wykaż, że jeżeli $\int_D f d\mu = M\mu(D)$, to $f = M$ prawie wszędzie na D. Wykaż, że jeżeli $f < M$ prawie wszędzie na D, to $\int_D f d\mu < M\mu(D)$.