Teoria grup
Ćwiczenia i zadania domowe

Jan Dereziński

Katedra Metod Matematycznych Fizyki
Uniwersytet Warszawski
Pasteura 5, 02-093, Warszawa
e-mail jan.derezinski@fuw.edu.pl

23 lutego 2015

rok 2014/15

1 Przykłady

(1) Pokazać, że wszystkie grupy rzędu 2 są izomorficzne z $\mathbb{Z}_2$.

(2) Pokazać, że wszystkie grupy rzędu 3 są izomorficzne z $\mathbb{Z}_3$.

(3) Pokazać, że wszystkie grupy rzędu 4 są izomorficzne z $\mathbb{Z}_4$ lub $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

(4) Pokazać, że wszystkie grupy rzędu 5 są izomorficzne z $\mathbb{Z}_5$.

(5) Pokazać, że wszystkie grupy rzędu 6 są izomorficzne z $\mathbb{Z}_6$ lub S_3.

(6) Znaleźć wszystkie podgrupy S_3

(7) Pokazać, że $\mathrm{Aut}(S_3) \simeq \mathrm{Inn}(S_3) \simeq S_3$

2 Grupy abelowe

Stwierdzenie 2.1 *Wszystkie podgrupy $\mathbb{Z}$ są postaci $m\mathbb{Z}$ dla $m \in \mathbb{N}$.*

Dowód. Niech m będzie najmniejszym dodatnim elementem w podgrupie G. Oczywiście, $m\mathbb{Z} \subset G$.

Pokażmy inkluzję odwrotną. Nech $n \in G \backslash m\mathbb{Z}$. Wtedy $n = mk+r$, $0 < r < m$. Zatem $r \in G$, co jest sprzecznością. □

Stwierdzenie 2.2 *Jeśli n, m są liczbami względnie pierwszymi, to*

$$\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \ni ([i],[j]) \mapsto [in + jm] \in \mathbb{Z}_{mn}$$

jest izomorfizmem.

Dowód. Najpierw sprawdzamy, że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ powyższe odwzorowanie jest dobrze określone i jest homomorfizmem. Aby dowieść, że jest on surjektywny korzystamy z faktu, że dla względnie pierwszych m, n istnieją $i, j \in \mathbb{Z}$ takie, że $in + jm = 1$. $\Box$

Lemat 2.3 *Niech G będzie skończoną grupą abelową. Wtedy istnieją $n_1, \ldots, n_k$ takie, że*

$$G \simeq \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k} \tag{2.1}$$

Dowód. Niech $\{a_1, \ldots, a_t\}$ będą generatorami grupy G. Zdefiniujmy

$$R(a_1, \ldots, a_t) := \left\{(m_1, \ldots, m_t) \in \{0, 1, \ldots\}^t \ : \ m_1 a_1 + \ldots + m_t a_t = 0\right\}.$$

Dążymy do tego, by znaleźć generatory $\{b_1, \ldots, b_s\}$ dla których $R(b_1, \ldots, b_s) := \{k_1 n_1, \ldots k_1 n_s \ : \ k_i \in \{0, 1, \ldots\}\}$. Wtedy (2.1) jest spełnione.

Dowód przebiega przez indukcję względem liczby generatorów. Załóżmy, że dla $t-1$ generatorów teza jest prawdziwa. Pokażmy dla t.

Niech m będzie najmniejszą dodatnią liczbą występującą wśród elementów ciągów w R. Możemy przyjąć, że $m = m_1$ dla $(m_1, \ldots, m_t)$. Najpierw pokazujemy, że jeśli $(n_1, \ldots, n_t) \in R$, $(n_1, \ldots, n_t) \neq (m_1, \ldots, m_t)$, to m dzieli n_1. Zatem G jest generowana przez relację a $m_1 a_1 + \cdots m_t a_t = 0$i relacje między $a_2 \ldots, a_t$.

Następnie pokazjemy, że m dzieli wszystkie m_j. Zatem $m_j = m q_j$. Kładziemy

$$\tilde{a}_1 := a_1 + q_2 a_2 + \cdots + q_t a_t.$$

Wtedy G jest generowana przez $\tilde{a}_1$, relację $m\tilde{a}_1 = e$ i $a_2, \ldots, a_t$ i relacje między nimi. Stosujemy założenie indukcyjne i dostajemy, że G jest generowana przez $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_t$ i relacje

$$m\tilde{a}_1 = 0, \ \tilde{m}_2\tilde{a}_2 = 0, \ldots, \tilde{m}_2\tilde{a}_2 = 0.$$

$\Box$

Niech p będzie liczbą pierwszą. Mówimy, Że G jst p-grupą, jeśli $\#G = p^k$.

Stwierdzenie 2.4 *Każda abelowa p-grupa jest postaci*

$$\mathbb{Z}_p^{a_1} \times \cdots \mathbb{Z}_{p^k}^{a_k}.$$

Liczby $a_1, \ldots, a_k$ są jednoznacznie wyznaczone.

Dowód. Istnienie takiego rozkładu wynika z Lematu 2.3 i indukcji.

Aby pokazać jednoznaczność, sprawdzamy, że dla $m = 1, \ldots, k$,

$$\#\{b \in G \ : \ p^m b = 0\} = p^{a_1} p^{2a_2} \cdots p^{m a_m} \cdots p^{k a_k}.$$

Czyli dla $m = 1, \ldots, k$,

$$a_1 + 2a_2 + \cdots + m a_m + \cdots + k a_k$$

są wyznaczone jednoznacznie. Stąd $a_1, \ldots, a_k$ są jednoznacznie wyznaczone. $\Box$

Twierdzenie 2.5 *Niech G będzie skończoną grupą abelową. Wtedy wszystkie elementy rzędu p^k dla pewnego k tworzą p-grupę G_p. Mamy*

$$G \simeq G_{p_1} \times \cdots \times G_{p_k}.$$

$\mathbb{Z}_n$ jest pierścieniem.

$$\mathbb{Z}_n^\times := \{k \in \mathbb{Z}_n \ : \ k \text{ względnie pierwsze z } \ n\}$$

stanowi grupę. Definiujemy funkcję Eulera

$$\phi(n) := \#\mathbb{Z}_n^\times$$

Jeśli $n = p$ jest pierwsze, to $\phi(p) = p - 1$ i $\mathbb{Z}_p^\times \simeq \mathbb{Z}_{p-1}$ i wtedy $\mathbb{Z}_p$ jest ciałem.

Przykłady:

$$\mathbb{Z}_8^\times \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \quad \mathbb{Z}_{10}^\times \simeq \mathbb{Z}_4.$$

Stwierdzenie 2.6 *Wszystkie podgrupy $\mathbb{Z}_n$ są postaci $\mathbb{Z}_m$ gdzie m dzieli n.*

Dowód. Niech m będzie najmniejszym elementem podgrupy G. Wtedy $g \simeq \mathbb{Z}_m$. □

Mamy $\mathbb{Z}_n/\mathbb{Z}_m \simeq \mathbb{Z}_{n/m}$, czyli

$$0 \to \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{n/m} \to 0. \tag{2.2}$$

Zadanie 1 *Niech p będzie pierwsze. Jakie grupy przemienne mogą występować na miejscu G w ciągu dokładnym*

$$0 \to \mathbb{Z}_p \to G \to \mathbb{Z}_p \to 0.$$

Odpowiedź: $G = \mathbb{Z}_p^2$ lub $G = \mathbb{Z}_{p^2}$.

Stwierdzenie 2.7 *Niech dla pewnej grupy abelowej G*

$$0 \to \mathbb{Z}_m \to G \to \mathbb{Z}_k \to 0. \tag{2.3}$$

(2.3) się rozszczepia $\Leftrightarrow$ m i k są względnie pierwsze $\Leftrightarrow$ $G = \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}_{mk}$.

Dowód. Jeśli nie są względnie piewsze, to mają wspólny dielnik pierwszy p. Załóżmy, że p^a dzieli m, ale p^{a+1} nie dzieli m, oraz p^b dzieli k ale p^{b+1} nie dzieli k. Wtedy rzędy elementów $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_k$ nie dzielą się przez $p^{\max(a,b)+1}$. Natomiast w $\mathbb{Z}_{mk}$ istnieją elementy o rzędzie p^{a+b}. □

3 Iloczyn półprosty grup $\mathbb{Z}_n$

Zadanie 2 *Jak wyglądają automorfizmy $\mathbb{Z}_n$?*

Każdy automorfizm jest zadany jednoznacznie przez obraz 1, który oznaczamy przez k. Każdy automorfizm zachowuje $\mathbb{Z}_n^\times$, zatem $k \in \mathbb{Z}_n^\times$. Oznaczmy taki automorfizm przez ρ_k. Wtedy $\rho_k(j) = jk$. Oczywiście, $\rho_k^m(j) = k^m j$.

Przykładem jest

$$\rho_{-1}(j) = -j,$$

które jest automorfizmem rzędu 2. Definiujemy grupę dihedralną

$$D_n = \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}_n \rtimes_{\rho_{-1}} \mathbb{Z}_2.$$

Ogólniej, jeśli $k \in \mathbb{Z}_n^\times$ i $k^m \equiv 1 \bmod(n)$, to możemy zdefiniować

$$\mathbb{Z}_n \rtimes_k \mathbb{Z}_m := \mathbb{Z}_n \rtimes_{\rho_k} \mathbb{Z}_m.$$

3.1 Grupa $O(2)$ i jej podgrupy

Grupa $SO(2)$ składa się z obrotów o kąt $\phi \in [0, 2\pi[$, oznaczanych przez C_ϕ. Jest izomorficzna z $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Posiada automorfizm $\phi \mapsto -\phi$ rzędu 2, który generuje działanie grupy $\mathbb{Z}_2$.

Grupa $O(2)$ posiada poza tym odbicia w osiach przechodzących przez osie nachylone o kąt ϕ. Mamy $O(2) = SO(2) \rtimes \mathbb{Z}_2$.

$$P_\psi P_\phi = C_{2(\psi-\phi)}, \quad C_{2\psi} = P_{\phi+\psi} P_\phi.$$

Skończone podgrupy $O(2)$ są postaci C_n, $n = 1, 2, \ldots$, D_n, $n = 1, 2 \ldots$.

Grupa dihedralna D_n ma następujące klasy sprzężoności:

n parzyste

identyczność	1
$C_{\frac{2\pi k}{n}}, C_{-\frac{2\pi k}{n}}$, $k = 1, \ldots \frac{n}{2} - 1$	2
C_π	1
odbicie w prostej przechodzącej przez naprzeciwległe wierzchołki	$\frac{n}{2}$
odbicie w prostej przechodzącej przez środki naprzeciwległych boków	$\frac{n}{2}$

n nieparzyste

identyczność	1
$C_{\frac{2\pi k}{n}}, C_{-\frac{2\pi k}{n}}$,, $k = 1, \ldots [\frac{n}{2}]$	2
odbicie w prostej przechodzącej przez wierzchołek i środek naprzeciwległego boku	n

Grupa dihedralna $\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$ jest generowana przez a, b spełniające relacje

$$a^n = e, \quad b^2 = e, \quad abab = e.$$

Jest też generowana przez b, c spełniające relacje

$$b^2 = e, \quad c^2 = e, \quad (bc)^n = e.$$

Można przejść z jednej rodziny generatorów do drugich przez $c = ab$.

$\mathbb{Z}_n \rtimes_k \mathbb{Z}_m$ jest generowane przez a, b spełniające relacje

$$a^n = e, \quad b^m = e, \quad bab^{-1} = a^k.$$

3.2 Grupa afiniczna

Grupa $GL(\mathbb{K}^n)$ działa na $\mathbb{K}^n$ automorfizmami w oczywisty sposób. Można zatem zdefiniować $\mathbb{K}^n \rtimes GL(\mathbb{K}^n)$. Mamy

$$(a, A)(b, B) = (a + Ab, AB).$$

Znaleźć $(a, A)^{-1}$. (Równe $(A^{-1}a, A^{-1})$.)

Zadanie 3 *Pokazać, że*

$$\phi_{(a,A)}x := a + Ax, \quad x \in \mathbb{K}^n$$

jest działaniem grupy $\mathbb{K}^n \rtimes GL(\mathbb{K}^n)$ na $\mathbb{K}^n$.

Mamy

$$\phi_{(a,A)}(\phi_{(b,B)}(x)) = \phi_{(a,A)}(b + Bx) = a + Ab + ABx = \phi_{(a,A)(b,B)}(x).$$

Każdy element $\mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)$ jest translacją lub obrotem. Klasy sprzężoności są numerowane przez kąt obrotu $\in [0, 2\pi[$ i odległość translacji

Do $\mathbb{R}^2 \rtimes O(2)$ należą jeszcze odbicia z poślizgiem. (Zwykłe odbicia mają zerowy poślizg). Klasy sprzężoności są numerowane dla obrotów przez moduł kąta $\in [0, \pi]$, odległość translacji, długość poślizgu.

3.3 Kolokwium

Zad. 1 Rozważmy grupę

$$G := \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;:\; \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

i jej podgrupy

$$A := \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;:\; \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \right\},$$

$$B := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;:\; \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Która z tych podgrup jest normalna? Przedstawić G jako iloczyn półprosty tych dwóch podgrup (czyli $A \rtimes_\gamma B$ lub $B \rtimes_\gamma A$) i znaleźć odpowiadający temu iloczynowi homomorfizm γ jednej podgrupy w grupę automorfizmów drugiej.

Zad. 2 Niech Y oznacza rodzinę dwuelementowych podzbiorów zbioru wierzchołków kwadratu. Grupa dihedralna D_4 działa w oczywisty sposób na Y. Opisać wszystkie orbity tego działania i podać ile mają elementów. Opisać stabilizatory (podgrupy izotropii) elementów tych orbit i podać ile mają elementów.

Zad. 3 Mówimy, że grupa jest cykliczna, gdy jest izomorficzna z $\mathbb{Z}_n$ dla pewnego n. Czy grupa $\mathbb{Z}_5^\times = \{1, 2, 3, 4\}$ (grupa multiplikatywna niezerowych elementów $\mathbb{Z}_5$) jest cykliczna? Uzasadnić odpowiedź.

3.4 Kolokwium poprawkowe

Zad. 1 Rozważmy zbiory macierzy rzeczywistych

$$G := \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ : \ \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \neq 0 \right\}$$

$$A := \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ : \ \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \neq 0 \right\}$$

$$B := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Sprawdzić, że są to grupy. Która z podgrup, A lub B jest normalna? Przedstawić G jako iloczyn półprosty tych dwóch podgrup (czyli $A \rtimes_\gamma B$ lub $B \rtimes_\gamma A$) i znaleźć odpowiadający temu iloczynowi homomorfizm γ jednej podgrupy w grupę automorfizmów drugiej.

Zad. 2 Niech Y oznacza rodzinę dwuelementowych podzbiorów zbioru wierzchołków sześcianu. Niech O oznacza grupę obrotów zachowujących sześcian. Oczywiście, O działa w oczywisty sposób na Y. Opisać wszystkie orbity tego działania i podać ile mają elementów. Opisać stabilizatory (podgrupy izotropii) elementów tych orbit i podać ile mają elementów.

Zad. 3 Podać wszystkie podgrupy nietrywialne (rózne od grupy 1-elementowej i siebie samej) w grupie $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

4 Reprezentacje–tabele charakterów

4.1 Grupa $S_3 \simeq \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2 \simeq D_3$

		id^1	$(12)^3$	$(123)^2$
□ □ □	*Triv*	1	1	1
□ □ □	*Sgn*	1	-1	1
□ □ □	*St*	2	0	-1

$$1+3+2=6, \quad 1^2+1^2+2^2=6.$$

4.2 Grupa $S_4 \simeq (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes S_3$

		id^1	$(12)^6$	$(123)^8$	$(1234)^6$	$(12)(34)^3$
□ □ □ □	$Triv$	1	1	1	1	1
□ □ □ □	Sgn	1	−1	1	−1	1
□ □ □ □	St	3	1	0	−1	−1
□ □ □ □	$Sgn \times St$	3	−1	0	1	−1
□ □ □ □		2	0	−1	0	2

$$1+6+8+6+3=24, \quad 1^2+1^2+3^2+3^2+2^2=24.$$

Homomorfizm $S_4 \to S_3$ przenosi reprezentacje S_3 na reprezentacje S_4. W szczególności, reprezentacja standardowa dla S_3 przechodzi na 2-wymiarową reprezentację S_4.

4.3 Grupa dihedralna $\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2 = D_n$. Dwuwymiarowa reprezentacja nieprzywiedlna

Dwuwymiarowe reprezentacje dla $1 \le j < \frac{n}{2}$:

$$E_j(k,0) := \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi kj}{n}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}2\pi kj}{n}} \end{bmatrix}, \quad E_j(k,1) := \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi kj}{n}} \\ \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}2\pi kj}{n}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ta sama reprezentacja w innej bazie:

$$E_j(k,0) := \begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi kj}{n} & \sin\frac{2\pi kj}{n} \\ -\sin\frac{2\pi kj}{n} & \cos\frac{2\pi kj}{n} \end{bmatrix}, \quad E_j(k,1) := \begin{bmatrix} \sin\frac{2\pi kj}{n} & \cos\frac{2\pi kj}{n} \\ \cos\frac{2\pi kj}{n} & -\sin\frac{2\pi kj}{n} \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

Czasami będzie też oznaczana przez E_{-j}.

4.4 Grupa D_n dla n nieparzystego

	$(0,0)^1$	$(k,0)^2,\ 1 \le k \le [n/2]$	$(k,1)^n$
A_g	1	1	1
A_u	1	1	−1
$E_j, 1 \le j \le [n/2]$	2	$2\cos\frac{2\pi kj}{n}$	0

$$1+[n/2]2+n=2n,\quad 1^2+1^2+([n/2]-1)2^2=2n.$$

Tabliczka mnożenia.

$$\begin{array}{cccl} & A_\mathrm{g} & A_\mathrm{u} & E_j \\ A_\mathrm{g} & A_\mathrm{g} & A_\mathrm{u} & E_j \\ A_\mathrm{u} & & A_\mathrm{g} & E_j \\ E_m & & & E_{j-m}\oplus E_{j+m},\ j\neq m, \\ & & & A_\mathrm{g}\oplus A_\mathrm{u}\oplus E_{2j},\ j=m \end{array}$$

Symetryczny i antysymetryczny kwadrat.

$$\begin{array}{cccl} & A_\mathrm{g} & A_\mathrm{u} & E_j \\ \pi\otimes_\mathrm{s}\pi & A_\mathrm{g} & A_\mathrm{g} & A_\mathrm{g}\oplus E_{2j}, \\ \pi\otimes_\mathrm{a}\pi & - & - & A_\mathrm{u} \end{array}$$

Redukcja do podgrupy

$$\begin{array}{c|ccc} D_n & A_\mathrm{g} & A_\mathrm{u} & E_j \\ \mathbb{Z}_n & 0 & 0 & j\oplus -j \\ \mathbb{Z}_2 & 0 & 1 & 0\oplus 1 \end{array}$$

4.5 Grupa D_n dla n parzystego

	$(0,0)^1$	$(n/2,0)^1$	$(k,0)^2,\ 1\leq k<n/2$	$(2k,1)^n$	$(2k-1,1)^n, 1\leq k\leq n/2$
A_g	1	1	1	1	1
A_u	1	1	1	-1	-1
B_1	1	$(-1)^{n/2}$	$(-1)^k$	1	-1
B_2	1	$(-1)^{n/2}$	$(-1)^k$	-1	1
E_j, $1\leq j<n/2$,	2	$2(-1)^j$	$2\cos\frac{2\pi kj}{n}$	0	0

$$1+1+(n/2-1)2+n/2+n/2=2n,\quad 1^2+1^2+1^2+1^2+(n/2-1)2^2=2n.$$

Tabliczka mnożenia.

$$\begin{array}{cccccl} & A_\mathrm{g} & A_\mathrm{u} & B_1 & B_2 & E_j \\ A_\mathrm{g} & A_\mathrm{g} & A_\mathrm{u} & B_1 & B_2 & E_j \\ A_\mathrm{u} & & A_\mathrm{g} & B_2 & B_1 & E_j \\ B_1 & & & A_\mathrm{g} & A_\mathrm{u} & E_j \\ B_2 & & & & A_\mathrm{g} & E_j \\ E_m & & & & & E_{j-m}\oplus E_{j+m},\ j\neq m,\ j+m\neq n/2, \\ & & & & & A_\mathrm{g}\oplus A_\mathrm{u}\oplus E_{2j},\ j=m\neq n/4, \\ & & & & & E_{j-m}\oplus B_1\oplus B_2,\ j\neq m,\ j+m=n/2 \\ & & & & & A_\mathrm{g}\oplus A_\mathrm{u}\oplus B_1\oplus B_2,\ j=m=n/4 \end{array}$$

Symetryczny i antysymetryczny kwadrat.

	A_g	A_u	B_1	B_2	E_j
$\pi \otimes_\mathrm{s} \pi$	A_g	A_g	A_g	A_g	$A_\mathrm{g} \oplus E_{2j},\ j \neq n/4$
					$A_\mathrm{g} \oplus B_1 \oplus B_2,\ j = n/4$
$\pi \otimes_\mathrm{a} \pi$	$-$	$-$	$-$	$-$	A_u

Redukcja do podgrupy

D_n	A_g	A_u	B_1	B_2	E_j
$\mathbb{Z}_n$	0	0	$n/2$	$n/2$	$j \oplus -j$
$\mathbb{Z}_2$	0	1	0	1	$0 \oplus 1$

4.6 Grupa kwaternionowa Q

Składa się z ± 1, $\pm \mathrm{i}$, $\pm \mathrm{j}$, $\pm \mathrm{k}$, spełniające relacje

$$\mathrm{ij} = \mathrm{k}, \quad \mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1.$$

$\{1, -1\}$ jest podgrupą normalną. Mamy

$$Q/\{1,-1\} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}\}, \qquad \mathrm{ij} = \mathrm{k}, \quad \mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = 1.$$

Mamy 4 różne nieprzywiedlne reprezentacje grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Poza tym, mamy reprezentację daną przez macierze Pauliego razy i (jednostkowe kwaterniony):

$$\pi(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \pi(\mathrm{i}) = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}, \quad \pi(\mathrm{j}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pi(\mathrm{k}) = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

Tabela charakterów

	1^1	-1^1	$\{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}^2$	$\{\mathrm{j}, -\mathrm{j}\}^2$	$\{\mathrm{k}, -\mathrm{k}\}^2$
A	1	1	1	1	1
B_i	1	1	1	-1	-1
B_j	1	1	-1	1	-1
B_k	1	1	-1	-1	1
P	2	-2	0	0	0

Tabliczka mnożenia

	A	B_i	B_j	B_k	P
A	A	B_i	B_j	B_k	P
B_i		A	B_k	B_j	P
B_j			A	B_i	P
B_k				A	P
P					$A \oplus B_\mathrm{i} \oplus B_\mathrm{j} \oplus B_\mathrm{k}$

Kwadraty symetryczne i antysymetryczne

	A	B_i	B_j	B_k	P
$\pi \otimes_\mathrm{s} \pi$	A	A	A	A	$B_\mathrm{i} \oplus B_\mathrm{j} \oplus B_\mathrm{k}$
$\pi \otimes_\mathrm{a} \pi$	$-$	$-$	$-$	$-$	A

Redukcja reprezentacji do podgrupy.

Q	A	B_{i}	B_{j}	B_{k}	P
$\{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\} \simeq \mathbb{Z}_4$	0	0	2	2	$1 \oplus -1$

5 Rozkładanie reprezentacji

5.1 Reprezentacja dwuwymiarowa dla C_n

$\mathbb{Z}_n$ ma reprezentacje nieprzywiedlne π_j, gdzie $j \in \mathbb{Z}_n$, z charakterem $\chi_j(k) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi jk}{n}}$.

Rozważmy dwuwymiarową reprezentację $C_n = \mathbb{Z}_n$ w $\mathbb{C}^2$

$$\mathbb{Z}_n \ni k \mapsto \theta_j(k) = \begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi kj}{n} & \sin\frac{2\pi kj}{n} \\ -\sin\frac{2\pi kj}{n} & \cos\frac{2\pi kj}{n} \end{bmatrix}$$

z charakterem $\chi_{\theta_j}(k) = 2\cos\frac{2\pi jk}{n}$. Mamy $\chi_{\theta_j} = \chi_j \oplus \chi_{-j}$. Zatem, $\theta_j \simeq \pi_j \oplus \pi_{-j}$. Rzut na podreprezentacje:

$$Q_{\pm j} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \theta_j(k)\mathrm{e}^{\mp\frac{2\pi jk}{n}} = \frac{1}{2n}\begin{bmatrix} n & \mp\mathrm{i}n \\ \pm\mathrm{i}n & n \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ \pm\mathrm{i} \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}[1, \mp\mathrm{i}].$$

Hamiltoniany niezmiennicze:

$$H = \begin{bmatrix} a & \mathrm{i}b \\ -\mathrm{i}b & a \end{bmatrix}$$

Ma on wektory własne

$$H\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ \pm\mathrm{i} \end{bmatrix} = (a \mp b)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ \pm\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

5.2 Reprezentacja dwuwymiarowa dla D_n

Można rozszerzyć reprezentację do grupy D_n, patrz (4.4). Wtedy reprezentacja staje się nieprzywiedlna, pokrywa się z reprezentacją E_j i hamiltoniany niezmiennicze są postaci

$$H = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

5.3 Kwadrat tensorowy dwuwymiarowej reprezentacji grupy C_n

Załóżmy, że $j \neq n/2$. Rozważmy reprezentację gupy C_n równą $\theta_j \otimes \theta_j$ Mamy

$$\chi_{\theta_j \otimes \theta_j}(k) = 4\cos^2\frac{2\pi jk}{n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi 2jk}{n}} + e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi 2jk}{n}} + 2.$$

Zatem $\theta_j \otimes \theta_j = \pi_{2j} \oplus \pi_{-2j} \oplus 2\pi_0$.

Oznaczmy bazę kanoniczną w $\mathbb{C}^2$ przez $|\uparrow), \downarrow)$. Odpowiednio, baza w $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ będzie

$$|\uparrow\uparrow),\ |\uparrow\downarrow),\ |\downarrow\uparrow),\ |\downarrow\downarrow).$$

Pisząc w skrócie c, s zamiast $\cos\frac{2\pi kj}{n}$, $\sin\frac{2\pi kj}{n}$, dostajemy

$$\theta_j \otimes \theta_j = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cc & cs & sc & ss \\ -cs & cc & -ss & sc \\ -sc & -ss & cc & cs \\ ss & -sc & -sc & cc \end{bmatrix}$$

Niech Q_0 będzie rzutem na punkty stałe dla tej reprezentacji. Używając

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2 \frac{2\pi kj}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2 \frac{2\pi kj}{n} = \frac{n}{2}, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \cos\frac{2\pi kj}{n} \sin\frac{2\pi kj}{n} = 0,$$

dostajemy

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \theta_j \otimes \theta_j(k) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}[1,0,0,1] + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}[0,1,-1,0] \end{aligned}$$

Alternatywne rozwiązanie: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ \pm \mathrm{i} \end{bmatrix}$ to wektory, dla których C_n ma w $\mathbb{C}^2$ reprezentację $\pm j$. Zatem reprezentacja trywialna w $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ będzie rozpięta na

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dlatego też

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}[1,\mathrm{i},-\mathrm{i},1] + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}[1,-\mathrm{i},\mathrm{i},1] \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 1 & -1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 & 1 & \mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} & 1 \\ \mathrm{i} & 1 & -1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & -1 & 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reprezentacje $\pi_{\pm 2j}$ są rozpięte na wektorach

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ \pm \mathrm{i} \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ \pm \mathrm{i} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \pm \mathrm{i} \\ \pm \mathrm{i} \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dlatego też, rzuty na odpowiadając im podprzestrzenie są

$$\begin{aligned} Q_{\pm 2j} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \pm \mathrm{i} \\ \pm \mathrm{i} \\ -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}[1, \mp \mathrm{i}, \mp \mathrm{i}, -1] \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & \mp \mathrm{i} & \mp \mathrm{i} & -1 \\ \pm \mathrm{i} & 1 & 1 & \mp \mathrm{i} \\ \pm \mathrm{i} & 1 & 1 & \mp \mathrm{i} \\ -1 & \pm \mathrm{i} & \pm \mathrm{i} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Jak wyglądają hamiltoniany niezmiennicze? Każdy taki hamiltonian można zapisać jako

$$H = \begin{bmatrix} h_{\uparrow\uparrow,\uparrow\uparrow} & h_{\uparrow\uparrow,\uparrow\downarrow} & h_{\uparrow\uparrow,\downarrow\uparrow} & h_{\uparrow\uparrow,\downarrow\downarrow} \\ h_{\uparrow\downarrow,\uparrow\uparrow} & h_{\uparrow\downarrow,\uparrow\downarrow} & h_{\uparrow\downarrow,\downarrow\uparrow} & h_{\uparrow\downarrow,\downarrow\downarrow} \\ h_{\downarrow\uparrow,\uparrow\uparrow} & h_{\downarrow\uparrow,\uparrow\downarrow} & h_{\downarrow\uparrow,\downarrow\uparrow} & h_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow} \\ h_{\downarrow\downarrow,\uparrow\uparrow} & h_{\downarrow\downarrow,\uparrow\downarrow} & h_{\downarrow\downarrow,\downarrow\uparrow} & h_{\downarrow\downarrow,\downarrow\downarrow} \end{bmatrix}$$

Grupa C_n składa się z

$$\exp \frac{2\pi k}{n}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Zatem wystarczy sprawdzić, które hamiltoniany komutują z

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Można od razu napisać rozwiązanie:

$$H = a_{2j}Q_{2j} + a_{-2j}Q_{-2j} + C, \tag{5.5}$$

gdzie $Q_0 C Q_0 = C$. C można zapisać jako

$$C = c_{\mathrm{gg}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}[1, 0, 0, 1] + c_{\mathrm{uu}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}[0, 1, -1, 0]$$

$$+c_{\mathrm{gu}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}[0,1,-1,0]+c_{\mathrm{ug}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}[1,0,0,1]$$

5.4 Kwadrat tensorowy dwuwymiarowej reprezentacji grupy D_n

Z punktu widzenia grupy D_n mamy

$$\chi_{\theta_j\otimes\theta_j}=\chi_{E_j}+\chi_{A_{\mathrm{g}}}+\chi_{A_{\mathrm{u}}}.$$

Zatem $\theta_j\otimes\theta_j\simeq E_j\oplus A_{\mathrm{g}}\oplus A_{\mathrm{u}}$. Oto rzuty na przestrzenie izotypowe:

$$\begin{aligned}
Q_{E_{2j}} &= Q_{2j}+Q_{-2j}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix},\\
Q_{A_{\mathrm{g}}} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{bmatrix},\\
Q_{A_{\mathrm{u}}} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},
\end{aligned}$$

Dla niezmienniczości hamiltonianu H względem D_n wymagamy jeszcze komutowania z

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

Są one postaci

$$H=aQ_{E_{2j}}+c_{\mathrm{gg}}Q_{A_{\mathrm{g}}}+c_{\mathrm{uu}}Q_{A_{\mathrm{u}}}.$$

Oznacza to, że w (5.5) musimy zażądać by $a_{2j}=a_{-2j}$ i $c_{\mathrm{ug}}=c_{\mathrm{gu}}=0$.

5.5 Pierścień o symetrii C_n

Rozważamy reprezentację

$$\mathbb{Z}_n\ni k\mapsto\rho(k)\in U(l^2(\mathbb{Z}_n)),$$
$$\rho(k)|p):=|p+k).$$

Innymi słowy,

$$\rho(k)=\sum_{p=0}^{n-1}|p+k)(p|.$$

z charakterem $\chi_\rho(k) = n\delta_{k,0}$. Mamy

$$\begin{aligned}
m_j &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} n\delta_{k,0}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi jk}{n}} = 1, \\
Q_j &= \frac{1}{n}\sum_{k,p} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi jk}{n}} |p+k)(p| \\
&= \widetilde{|j)}\widetilde{(j|}, \\
\widetilde{|j)} &:= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{p=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi jp}{n}} |p).
\end{aligned}$$

Jeśli wprowadzimy *dyskretną transformatę Fouriera* $\mathcal{F} : l^2(\mathbb{Z}_n) \to l^2(\hat{\mathbb{Z}}_n)$,

$$\mathcal{F} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{p,j=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi jp}{n}} |j)(p|,$$

możemy napisać

$$Q_j = \mathcal{F}^{-1}|j)(j|\mathcal{F}.$$

Przykład niezmienniczego hamiltonianu:

$$H = \sum_{p=0}^{n-1}\Big(\overline{\alpha}|p+1)(p| + \alpha|p)(p+1|\Big).$$

Wektory własne

$$H\widetilde{|j)} = \Big(\alpha\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi j}{n}} + \overline{\alpha}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi j}{n}}\Big)\widetilde{|j)} = 2|\alpha|\cos\Big(\psi - \frac{2\pi j}{n}\Big)\widetilde{|j)}.$$

5.6 Pierścień o symetrii D_n

Rozszerzamy powyższą reprezentację do D_n kładąc

$$\rho(k,1) = \rho(k,0)\rho(0,1) = \sum_p |-p+k)(p|.$$

Mamy wtedy (w przypadku nieparzystym)

$$\rho = A_\mathrm{g} \oplus E_1 \cdots \oplus E_{[n/2]}.$$

$$\begin{aligned}
Q_{A_\mathrm{g}} &= \frac{1}{2n}\sum_{p,k}\Big(|p+k)(p| + |-p+k)(p|)\Big) = \widetilde{|0)}\widetilde{(0|}, \\
Q_{E_j} &= \frac{1}{2n}\sum_{p,k}\Big(2|p+k)(p|\cos\frac{2\pi kj}{n}\Big) \\
&= \widetilde{|j)}\widetilde{(j|} + \widetilde{|-j)}\widetilde{(-j|}.
\end{aligned}$$

Przykładowy niezmienniczy hamiltonian:

$$H = \sum_k \alpha \Big(|k+1)(k| + |k)(k+1| \Big).$$

Wektory własne:

$$H\widetilde{|j)} = \alpha 2 \cos \frac{2\pi j}{n} \widetilde{|j)}.$$

5.7 Egzamin pisemny

Zadanie 1. 3 ściany sześcianu zostały pomalowane na czarno a 3 na biało. Niech X oznacza zbiór sposobów pomalowania. Grupa symetrii sześcianu $\mathrm{O}_i \subset O(3)$ (składająca sie zarówno z obrotów jak i odbić) działa w oczywisty sposób na X.

1. Znaleźć wszystkie orbity działania O_i na X.
2. Dla każdej orbity podać jej liczbę elementów i liczbę elementów podgrupy izotropii.
3. Opisać podgrupy izotropii (czy należy do którejś ze znanych nam rodzin, czy jest przemienna?).

Zadanie 2 Grupa $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ zawiera podgrupę $H = \{(0,0),(1,1)\} \simeq \mathbb{Z}_2$. G działa na $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ z bazą $|p,q) := |p) \otimes |q)$, $p,q = 0,1$, poprzez reprezentację

$$\rho(k,l)|p,q) := |p+k, q+l).$$

1. Napisać tabelę charakterów dla G. (Pamiętajmy, że $\hat{G} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ i dlatego reprezentacje nieprzywiedlne G mają naturalne oznaczenia $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$).
2. Rozłożyć reprezentację ρ na składniki nieprzywiedlne (podając odpowiednią bazę ortonormalną w $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$).
3. Znaleźć bazy ortonormalne przestrzeni izotypowych dla ρ obciętej do podgrupy H.

Zadanie 3.
Grupa S_3 działa na $\mathbb{C}^3$ z bazą $|1)$, $|2)$, $3)$ reprezentacją

$$\rho(\sigma)|i) = |\sigma(i)), \quad \sigma \in S_3, \ i = 1,2,3.$$

1. Znaleźć krotności reprezentacji nieprzywiedlnych w $\rho \otimes \rho$.
2. Znaleźć krotności reprezentacji nieprzywiedlnych w $\rho \otimes_{\mathrm{s}} \rho$.
3. Znaleźć krotności reprezentacji nieprzywiedlnych w $\rho \otimes_{\mathrm{a}} \rho$.

Wskazówka. Oto tabela charakterów dla S_3:

	id^1	$(12)^3$	$(123)^2$
$Triv$	1	1	1
Sgn	1	-1	1
St	2	0	-1

Odpowiedź ad 1. Orbita "Pasma", 12 elementów, grupa D_2, $\#D_2 = 4$.
Orbita "Wokół wierzchołka", 8 elementów, grupa D_3, $\#D_3 = 6$.

Odpowiedź ad 2.

	(00)	(10)	(01)	(11)
(00)	1	1	1	1
(10)	1	-1	1	-1
(01)	1	1	-1	-1
(11)	1	-1	-1	1

$\rho|_G = (0,0) \oplus (1,0) \oplus (0,1) \oplus (1,1)$. Baza ortonormalna:

$$\begin{aligned} e_{(00)} &= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle), \\ e_{(10)} &= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle), \\ e_{(01)} &= \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle), \\ e_{(11)} &= \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle). \end{aligned}$$

$\rho|_H = 2 \cdot \pi_0 \oplus 2 \cdot \pi_1$ Baza dla reprezentacji π_0: $e_{(00)}$, $e_{(11)}$; baza dla π_1: $e_{(10)}$, $e_{(01)}$.

Odpowiedź ad 3.

$$\begin{aligned} \rho \otimes \rho &\simeq 2\,Triv \oplus Sgn \oplus 3\,St, \\ \rho \otimes_{\mathrm{s}} \rho &\simeq 2\,Triv \oplus 2\,St, \\ \rho \otimes_{\mathrm{a}} \rho &\simeq Sgn \oplus St. \end{aligned}$$

Egzamin pisemny poprawkowy

Zad. 1. Grupa $D_4 = \mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}_2$ działa na $\mathbb{C}^2$ następującą reprezentacją:

$$\rho(k,0) \quad := \quad \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2}k & \sin\frac{\pi}{2}k \\ -\sin\frac{\pi}{2}k & \cos\frac{\pi}{2}k \end{bmatrix}, \quad \rho(k,1) := \begin{bmatrix} \sin\frac{\pi}{2}k & \cos\frac{\pi}{2}k \\ \cos\frac{\pi}{2}k & -\sin\frac{\pi}{2}k \end{bmatrix}.$$

1. Znaleźć krotności reprezentacji nieprzywiedlnych w ρ.
2. Znaleźć krotności reprezentacji nieprzywiedlnych w $\rho \otimes \rho$.
3. Znaleźć krotności reprezentacji nieprzywiedlnych w $\rho \otimes_{\mathrm{s}} \rho$.
4. Znaleźć krotności reprezentacji nieprzywiedlnych w $\rho \otimes_{\mathrm{a}} \rho$.

Wskazówka. Oto tabelka charakterów grupy D_4:

	$(0,0)^1$	$(2,0)^1$	$(1,0)^2$	$(0,1)^2$	$(1,1)^2$
A_{g}	1	1	1	1	1
A_{u}	1	1	1	-1	-1
B_1	1	1	-1	1	-1
B_2	1	1	-1	-1	1
E	2	-2	0	0	0

Zad. 2. Grupa $\mathbb{Z}_3$ działa na $\mathbb{C}^3$ z bazą $|0)$, $|1)$, $|2)$ przy pomocy reprezentacji

$$\rho(k)|p) := |p+k),$$

(stosujemy powyżej dodawanie modulo 3).

1. Znaleźć krotności reprezentacji nieprzywiedlnych w ρ.
2. Znaleźć bazy wszystkich przestrzeni izotypowych dla tej reprezentacji.
3. Dla jakich β, γ operator

   $$H = |0)(1| + \beta|1)(2| + \gamma|2)(0|$$

   jest niezmienniczy względem tej reprezentacji, czyli

   $$H\rho(k) = \rho(k)H, \quad k \in \mathbb{Z}_3?$$

Zad. 3. Niech X oznacza zbiór podgrup w S_3. Grupa S_3 działa na X przez sprzężenie, czyli

$$\rho_\sigma(H) = \sigma H \sigma^{-1}, \quad \sigma \in S_3, \quad H \in X.$$

Opisać wszystkie orbity tego działania.

Zad. 4. Niech $\{ e_1, e_2\}$ będzie bazą w $\mathbb{C}^2$. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ (która oczywiście ma bazę $\{e_1 \otimes e_1, e_2 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_2\}$). Rozłożyć wektor $(e_1 + e_2) \otimes (e_1 - e_2)$ na sumę dwóch wektorów, jeden z $\mathbb{C}^2 \otimes_{\mathrm{s}} \mathbb{C}^2$ a drugi z $\mathbb{C}^2 \otimes_{\mathrm{a}} \mathbb{C}^2$.