Algebry i grupy Liego

Jan Dereziński

Katedra Metod Matematycznych Fizyki
Uniwersytet Warszawski
Hoża 74, 00-682, Warszawa
e-mail jan.derezinski@fuw.edu.pl

31 marca 2022

Spis treści

1 Algebry

1.1 Definicja

Niech $\mathfrak{A}$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$. Mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest *algebrą* jeśli jest wyposażona w działanie

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \ni (A, B) \mapsto AB \in \mathfrak{A}$$

spełniające

$$\begin{array}{l} A(B+C) = AB + AC, \quad (B+C)A = BA + CA, \\ (\alpha\beta)(AB) = (\alpha A)(\beta B). \end{array}$$

Jeśli w dodatku

$$A(BC) = (AB)C,$$

to mówimy, że jest to *algebra łączna.* (W praktyce, często skracamy nazwę, przez *algebrę* rozumiejąc algebrę łączną).

Mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest *algebrą przemienną* gdy $A, B \in \mathfrak{A}$ implikuje $AB = BA$.

Centrum algebry $\mathfrak{A}$ jest zdefiniowane jako

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{A}) = \{A \in \mathfrak{A} \ : \ AB = BA, \ B \in \mathfrak{A}\}.$$

1.2 Podalgebry

Ustalmy algebrę $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ nazywamy *podalgebrą* gdy jest to podprzestrzeń liniowa i $A, B \in \mathfrak{B} \Rightarrow AB \in \mathfrak{B}$. Oczywiście, podalgebra jest również algebrą.

Jeśli rodzina $\mathfrak{B}_\alpha \subset \mathfrak{A}$ składa się z podalgebr, to $\cap_\alpha \mathfrak{B}_\alpha$ jest też podalgebrą. Dlatego, dla dowolnego podzbioru $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ istnieje najmniejsza podalgebra zawierająca $\mathfrak{B}$. Oznaczamy ją przez $\mathrm{Alg}(\mathfrak{B})$ i nazywamy *podalgebrą generowaną przez* $\mathfrak{B}$.

Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$. Oczywiście, zbiór liniowych odwzorowań w $\mathcal{V}$, oznaczany przez $L(\mathcal{V})$, jest algebrą łączną.

Podalgebry w $L(\mathcal{V})$ nazywane są *konkretnymi algebrami (łącznymi).* Gdy $\dim \mathcal{V} < \infty$, mówimy też, że są to *algebry macierzowe.*

1.3 Homomorfizmy

Odwzorowanie między algebrami nazywamy homomorfizmem, jeśli zachowuje wszystkie działania. W szczególności, niech $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ będą algebrami. Odwzorowanie $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ nazywa się *homomorfizmem* gdy

(1) $\phi(\lambda A) = \lambda \phi(A)$;

(2) $\phi(A + B) = \phi(A) + \phi(B)$;

(3) $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$.

Zbiór automorfizmów algebry $\mathfrak{A}$ oznaczamy przez $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$. Jest to grupa.

Homomorfizm $\mathfrak{A}$ w $L(\mathcal{V})$ jest nazywany *reprezentacją* $\mathfrak{A}$ *na* $\mathcal{V}$.

1.4 Ideały

$\mathfrak{B}$ jest *ideałem* algebry Liego $\mathfrak{A}$, jeśli jest liniową podprzestrzenią w $\mathfrak{A}$ i $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B} \Rightarrow AB, BA \in \mathfrak{B}$.

Mówimy, że ideał $\mathfrak{B}$ jest *właściwy* gdy $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{A}$. Mówimy, że ideał $\mathfrak{B}$ jest *nietrywialny* gdy $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B} \neq \{0\}$.

Twierdzenie 1.1 *Jądro homomorfizmu jest ideałem. Jeśli $\mathfrak{B}$ jest ideałem w $\mathfrak{A}$, to $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ ma naturalną strukturę algebry Liego. Odwzorowanie*

$$\mathfrak{A} \ni A \mapsto A + \mathfrak{B} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$$

jest surjektywnym homomorfizmem, którego jądro jest równe $\mathfrak{B}$. Jeśli $\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ jest innym surjektywnym homomorfizmem, którego jądro też jest równe $\mathfrak{B}$, to $\mathfrak{C} \simeq \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$.

Mówiąc, że

$$\mathfrak{B} \xrightarrow{\phi} \mathfrak{A} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{H}$$

jest ciągiem dokładnym mamy na myśli, że $\mathrm{Ker}\psi = \mathrm{Ran}\phi$.

W szczególności

$$0 \to \mathfrak{B} \xrightarrow{\phi} \mathfrak{A} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{H} \to 0 \tag{1.1}$$

oznacza, że ϕ jest injektywny, ψ jest surjektywny i $\mathrm{Ker}\psi = \mathrm{Ran}\phi$. Wtedy ψ generuje izomorfizm $\mathfrak{A}/\phi(\mathfrak{B})$ z $\mathfrak{H}$. (1.1) nazywamy *krótkim ciągiem dokładnym.* Mówimy, że $\mathfrak{A}$ jest *rozszerzeniem* $\mathfrak{B}$ *poprzez* $\mathfrak{H}$.

Twierdzenie 1.2 (1) *Jeśli $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ są ideałami, to $\mathfrak{H} + \mathfrak{B}$ też.*

(2) *Jeśli $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ są ideałami, to $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{B}$ też.*

(3) *Jeśli $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ jest surjektywnym homomorfizmem między algebrami, to $\mathfrak{C} \mapsto \phi(\mathfrak{C})$ zadaje bijekcję między ideałami algebry $\mathfrak{A}$ zawierającymi* $\mathrm{Ker}\phi$ *a ideałami algebry $\mathfrak{B}$.*

2 Algebry Liego

2.1 Definicja

Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą nad ciałem $\mathbb{K}$ z działaniem oznaczanym przez

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (A, B) \mapsto [A, B] \in \mathfrak{g}.$$

Mówimy, że $\mathfrak{g}$ jest *algebrą Liego* jeśli jej działnie jest *antysymetryczne*, czyli

$$[A, B] = -[A, B], \quad A, B \in \mathfrak{g},$$

i spełnia *tożsamość Jacobiego*

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

Działanie w algebrze Liego często nazywamy *nawiasem*.

Każda przestrzeń wektorowa z zerowym nawiasem jest algebrą Liego. O takich algebrach Liego mówimy, że są *przemienne*.

Centrum algebry Liego $\mathfrak{g}$ jest zdefiniowane jako

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{A \in \mathfrak{g} \ : \ [A,B] = 0, \ B \in \mathfrak{g}\}.$$

Każda algebra łączna $\mathfrak{A}$ ma naturalną strukturę algebry Liego zadaną przez komutator

$$[A,B] := AB - BA.$$

W szczególności, jeśli $\mathcal{V}$ jest przestrzenią wektorową to zbiór liniowych odwzorowań w $\mathcal{V}$, czyli $L(\mathcal{V})$, jest algebrą Liego. $L(\mathcal{V})$ wyposażone w komutator oznaczamy przez $gl(\mathcal{V})$.

Podalgebry w $gl(\mathcal{V})$ nazywane są *konkretnymi algebrami Liego*. Gdy $\dim \mathcal{V} < \infty$, mówimy też, że są to *macierzowe algebry Liego*.

2.2 Reprezentacje algebr Liego

Homomorfizmy algebr Liego są zdefiniowane jak powyżej, czyli

(1) $\phi(\lambda A) = \lambda \phi(A)$;

(2) $\phi(A+B) = \phi(A) + \phi(B)$;

(3) $\phi([A,B]) = [\phi(A), \phi(B)]$.

Homomorfizm algebry Liego $\mathfrak{g}$ w $gl(\mathcal{V})$ jest nazywany *reprezentacją* $\mathfrak{g}$ *na* $\mathcal{V}$.

Reprezentacja dołączona

$$\mathfrak{g} \ni A \mapsto \mathrm{ad}(A) \in gl(\mathfrak{g})$$

jest zdefiniowana przez

$$\mathrm{ad}(A)B := [A,B], \quad A,B \in \mathfrak{g}.$$

Żeby sprawdzić, że jest to reprezentacja, czyli

$$\mathrm{ad}([A,B]) = [\mathrm{ad}(A), \mathrm{ad}(B)]$$

korzystamy z tożsamości Jacobiego.

2.3 Różniczkowania

Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Odwzorowanie liniowe $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ nazywamy *różniczkowaniem* jeśli spełnia *tożsamość Leibniza*:

$$\mathcal{D}[A,B] = [\mathcal{D}A, B] + [A, \mathcal{D}B].$$

Przykładem różniczkowania jest $\mathrm{ad}(C)$ zdefinowany jako

$$\mathrm{ad}(C)A := [C,A].$$

Wynika to z tożsamości Jacobiego. Mówimy, że jest to *różniczkowanie wewnętrzne*.

Oznaczmy przez $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ zbiór różniczkowań algebry $\mathfrak{g}$. Jeśli $\mathcal{D}_1, D_2 \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, to $[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2] \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Zatem $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ jest algebrą Liego. $\mathfrak{g} \ni A \mapsto \mathrm{ad}(A) \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ jest homomorfizmem, którego jądrem jest $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Jeśli $\mathcal{D} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ i $A \in \mathfrak{g}$, to $[\mathcal{D}, \mathrm{ad}(A)] = \mathrm{ad}(\mathcal{D}A)$.

Jeśli $\mathbb{R} \ni t \mapsto \sigma_t \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ jest różniczkowalnym homomorfizmem (*jednoparametrową grupą*), to

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma_t(B)\Big|_{t=0} =: \mathcal{D}B \tag{2.2}$$

definiuje różniczkowanie. I na odwrót, jeśli $\mathcal{D}$ jest różniczkowaniem, to

$$\sigma_t(B) := \exp(t\mathcal{D})B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\mathcal{D}^n B$$

jest jednoparametrową grupą spełniającą (2.2).

Jako przykład rozważmy algebrę przemienną $\mathbb{K}^n$. Wszystkie odwzorowania liniowe $\mathbb{K}^n$ są różniczkowaniami. Nie są one wewnętrzne, poza zerowym. Wszystkie automorfizmy są zadane przez elementy $GL(\mathbb{K}^n)$.

Można pokazać, że w algebrze $gl(\mathbb{K}^n)$ wszystkie różniczkowania są wewnętrzne. Podobnie, wszystkie automorfizmy są postaci $B \mapsto CBC^{-1}$ dla pewnego $C \in GL(\mathbb{K}^n)$.

2.4 Ideały i ideały charakterystyczne

Definicja ideału jest taka sama, jak w algebrze, czyli $\mathfrak{b}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$ jeśli jest podprzestrzenią wektorową w $\mathfrak{g}$ i $B \in \mathfrak{b}$, $A \in \mathfrak{g}$ implikuje $[A, B] \in \mathfrak{b}$.

Mówimy, że $\mathfrak{b}$ jest *ideałem charakterystyznym*, gdy dla każdego $\mathcal{D} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, $\mathcal{D}$ przekształca $\mathfrak{b}$ w siebie.

Twierdzenie 2.1 (1) *Jeśli $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ są ideałami charakterystycznymi, to $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ i $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ też.*

(2) *Jeśli $\mathfrak{a}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{b}$ jest ideałem charakterystycznym w $\mathfrak{a}$, to $\mathfrak{b}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$.*

(3) *Jeśli $\mathfrak{a}$ jest ideałem charakterystycznym w $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{b}$ jest ideałem charakterystycznym w $\mathfrak{a}$, to $\mathfrak{b}$ jest ideałem charakterystycznym w $\mathfrak{g}$.*

(4) *Jeśli $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ są ideałami charakterystycznymi, to $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ też.*

(5) *Jeśli $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ jest surjektywnym homomorfizmem i* $\mathrm{Ker}\phi$ *jest ideałem charakterystycznym, to $\mathfrak{a} \mapsto \phi(\mathfrak{a})$ zadaje bijekcję między ideałami charakterystycznymi algebry $\mathfrak{g}$ zawierającymi* $\mathrm{Ker}\phi$ *a ideałami charakterystycznymi algebry $\mathfrak{h}$.*

Twierdzenie 2.2 *Centrum jest ideałem charakterystycznym.*

Dowód. Dla $Z \in \mathfrak{z}$, $A \in \mathfrak{g}$ mamy $0 = [A, Z]$. Dlatego

$$0 = [\mathcal{D}A, Z] + [A, \mathcal{D}Z].$$

Stąd $\mathcal{D}Z \in \mathfrak{z}$. □

W przemiennej algebrze Liego $\mathbb{K}^n$ wszystkie podprzestrzenie liniowe są ideałami, ale tylko ideały trywialne są charakterystyczne.

Stwierdzenie 2.3 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ *jest ideałem w* $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

Dowód. Niech $\mathcal{D} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, $A \in \mathfrak{g}$. Wtedy

$$\mathcal{D}\mathrm{ad}(A) - \mathrm{ad}(A)\mathcal{D} = \mathrm{ad}(\mathcal{D}A).$$

□

Stwierdzenie 2.4 *Niech* $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *będzie homomorfizmem. Wtedy* $\mathrm{Ker}\phi$ *jest ideałem. Poza tym, następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mathrm{Ker}\phi$ *jest ideałem charakterystycznym*

(2) *Jeśli* $\mathcal{D} \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}$, *to* $\phi(A) = \phi(A') \Leftrightarrow \phi(\mathcal{D}A) = \phi(\mathcal{D}A')$.

Dlatego też można wtedy zdefiniować $\phi(\mathcal{D}) \in \mathrm{Der}\mathfrak{h}$ *wzorem* $\phi(\mathcal{D})\phi(A) := \phi(\mathcal{D}A)$. *Mamy homomorfizm algebr Liego* $\phi : \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Der}(\mathfrak{h})$.

2.5 Iloczyn półprosty

Niech $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{h}$ będą algebrami Liego.

Niech $\mathfrak{h} \ni H \mapsto \alpha_H \in \mathrm{Der}(\mathfrak{a})$ będzie homomorfizmem algebr Liego, czyli

$$\alpha_{[H_1,H_2]}(A) = \alpha_{H_1}\alpha_{H_2}(A) - \alpha_{H_2}\alpha_{H_1}(A).$$

Wtedy iloczyn półprosty $\mathfrak{a} \rtimes_\alpha \mathfrak{h}$ jest zdefiniowany jako $\mathfrak{a} \times \mathfrak{h}$ z nawiasem

$$[(A_1, H_1), (A_2, H_2)] = ([A_1, A_2] + \alpha_{H_1}(A_2) - \alpha_{H_2}(A_1), [H_1, H_2]) .$$

$\mathfrak{a} \rtimes_\alpha \mathfrak{h}$ jest algebrą Liego. Sprawdzamy tożsamość Jacobiego:

$$\begin{aligned}
&[[(A_1, H_1), (A_2, H_2)], (A_3, H_3)] \\
=&\Big([[A_1, A_2], A_3] + [\alpha_{H_1}(A_2), A_3] - [\alpha_{H_2}(A_1), A_3] - \alpha_{H_3}[A_1, A_2] \\
&+ \alpha_{[H_1,H_2]}(A_3) - \alpha_{H_3}\alpha_{H_1}(A_2) + \alpha_{H_3}\alpha_{H_2}(A_1), [[H_1, H_2], H_3]\Big).
\end{aligned}$$

Po cyklicznym zsumowaniu dostajemy zero.

$\{0\} \times \mathfrak{h}$ jest jej podalgebrą Liego, $\mathfrak{a} \times \{0\}$ jest jej ideałem.

Jeśli $\mathfrak{g}$ zawiera podalgebrę $\mathfrak{a}$ i ideał $\mathfrak{h}$ takie, że $\mathfrak{g}$ jest sumą prostą $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{h}$ w sensie przestrzeni wektorowych, to mamy wtedy homomorfizm $\mathfrak{h} \ni H \mapsto [H, \cdot] =: \alpha_H \in \mathrm{Der}(\mathfrak{a})$ i $\mathfrak{g}$ jest izomorficzna z iloczynem półprostym $\mathfrak{a} \rtimes_\alpha \mathfrak{h}$.

Oznaczmy przez $t(\mathbb{K}^n)$ macierze górnotrójkątne, przez $n(\mathbb{K}^n)$ macierze ściśle górnotrójkątne, a przez $d(\mathbb{K}^n)$ macierze diagonalne. Wtedy $n(\mathbb{K}^n)$ jest ideałem charakterystycznym w $t(\mathbb{K}^n)$. $t(\mathbb{K}^n)$ jest iloczynem półprostym $n(\mathbb{K}^n) \rtimes d(\mathbb{K}^n)$. Jeśli $t(\mathbb{K}^n) \supset \mathfrak{a} \supset n(\mathbb{K}^n)$ jest dowolną podprzestrzenią, to jest to też ideał w $t(\mathbb{K}^n)$ (zresztą, charakterystyczny).

2.6 Afiniczne algebry Liego

Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią wektorową. Odwzorowania afiniczne na $\mathcal{V}$ tworzą algebrę Liego z działaniem

$$[(w_1, A_1), (w_2, A_2)] := (A_1 w_2 - A_2 w_1, [A_1, A_2])$$

Tę algebrę Liego nazywamy *afinicznym rozszerzeniem* $gl(\mathcal{V})$.

$\mathcal{V}$ można traktować jako przemienną algebrę Liego. Każde odwzorowanie liniowe na $\mathcal{V}$ jest różniczkowaniem, czyli $\mathrm{Der}(\mathcal{V}) = L(\mathcal{V}) = gl(\mathcal{V})$. Latwo widzimy, że afiniczne rozszerzenie $gl(\mathcal{V})$ jest iloczynem półprostym $\mathcal{V} \rtimes gl(\mathcal{V})$.

Często w zastosowaniach spotykamy grupy w których $gl(\mathcal{V})$ jest zastąpione jej podgrupą. Na przykład, algebra Liego grupy Poincarego jest afinicznym rozszerzeniem algebry Liego grupy Lorentza $\mathbb{R}^{1,3} \rtimes so(1,3)$.

2.7 Związek zespolonych i rzeczywistych przestrzeni wektorowych

(1) Niech $\mathcal{V}$ będzie zespoloną przestrzenią wektorową. Jak zrobić z niej przestrzeń rzeczywistą?

  (i) $\mathbb{R}$ jest podciałem w $\mathbb{C}$. Można "zapomnieć" o mnożeniu przez nierzeczywiste liczby. Dostajemy przestrzeń $\mathcal{V}_\mathbb{R}$ – *realifikację przestrzeni* $\mathcal{V}$.

  (ii) Niech κ będzie *sprzężeniem*, tzn. antyliniową inwolucją. Wtedy

$$\mathcal{V}^\kappa := \{v \in \mathcal{V} \ : \ \kappa v = v\}$$

  jest rzeczywistą podprzestrzenią zwaną *formą rzeczywistą przestrzeni* $\mathcal{V}$. Zauważmy, że

$$\mathrm{i}\mathcal{V}^\kappa = \{v \in \mathcal{V} \ : \ \kappa v = -v\}, \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}^\kappa \oplus \mathrm{i}\mathcal{V}^\kappa.$$

(2) Niech $\mathcal{X}$ będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową. Jak zrobić z niej przestrzeń zespoloną?

  (i) Przestrzeń $\mathbb{C}\mathcal{X} := \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ wyposażamy w mnożenie

$$(\lambda + \mathrm{i}\mu)(x_\mathrm{R}, x_\mathrm{I}) := (\lambda x_\mathrm{R} - \mu x_\mathrm{I}, \lambda x_\mathrm{I} + \mu x_\mathrm{R}).$$

  Zamiast $(x_\mathrm{R}, x_\mathrm{I})$ będziemy pisali $x_\mathrm{R} + \mathrm{i}x_\mathrm{I}$. Nazywamy tę przestrzeń *kompleksyfikacją przestrzeni* $\mathcal{X}$.

  (ii) Niech $j \in L(\mathcal{X})$ będzie *antyinwolucją* (albo *strukturą zespoloną*), czyli niech spełnia $j^2 = -\mathbb{1}$. Wyposażamy $\mathcal{X}$ w mnożenie

$$(\lambda + \mathrm{i}\mu)x := (\lambda + \mu j)x.$$

  Tak uzyskaną przestrzeń zespoloną oznaczamy przez $\mathcal{X}^\mathbb{C}$ i czasami nazywamy *formą zespoloną przestrzeni* $\mathcal{X}$.

W kompleksyfikacji rzeczywistej przestrzeni $\mathcal{X}$ mamy naturalne sprzężenie:

$$\kappa(x_{\mathrm{R}} + \mathrm{i}x_{\mathrm{I}}) = \overline{(x_{\mathrm{R}} + \mathrm{i}x_{\mathrm{I}})} = x_{\mathrm{R}} - \mathrm{i}x_{\mathrm{I}}.$$

Oczywiście, $(\mathbb{C}\mathcal{X})^{\kappa} = \mathcal{X}$.

Jeśli zrealifikujemy zespoloną przestrzeń $\mathcal{V}$ dostając $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$, to w $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ mamy naturalną antyinwolucję zadaną przez i. Mamy $(\mathcal{V}_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} = \mathcal{V}$.

Jeśli skompleksyfikujemy rzeczywistą przestrzeń $\mathcal{X}$, a potem ją zrealifikujemy, dostajemy $(\mathbb{C}\mathcal{X})_{\mathbb{R}} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$.

Jeśli zrealifikujemy zespoloną przestrzeń $\mathcal{V}$, a potem ją skompleksyfikujemy, dostajemy $\mathbb{C}(\mathcal{V}_{\mathbb{R}}) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$.

2.8 Związek zespolonych i rzeczywistych algebr Liego

(1) Niech $\mathfrak{g}$ będzie zespoloną algebrą Liego.

   (i) $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ jest rzeczywistą algebrą Liego.

   (ii) Niech κ będzie *sprzężeniem*, które jest jednocześnie homomorfizmem. Wtedy $\mathfrak{g}^{\kappa}$ jest rzeczywistą algebrą Liego.

(2) Niech $\mathfrak{h}$ będzie rzeczywistą algebrą Liego.

   (i) $\mathbb{C}\mathfrak{h}$ jest zespoloną algebrą Liego.

   (ii) Niech j antyinwolutywnym automorfizmem algebry $\mathfrak{h}$. Wtedy $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ jest zespoloną algebrą Liego.

Stwierdzenie 2.5 *Niech $\mathfrak{h}$ będzie rzeczywistą algebrą Liego.*

(1) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$ *jest ideałem (charakterystycznym)* $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}\mathfrak{a} \subset \mathbb{C}\mathfrak{h}$ *jest ideałem (charakterystycznym).*

(2) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \mathfrak{h}$ *implikuje* $[\mathbb{C}\mathfrak{a}, \mathbb{C}\mathfrak{b}] = \mathbb{C}[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$.

Przykład 2.6 (1) *$sl(n, \mathbb{C})$ ma formy rzeczywiste $sl(n, \mathbb{R})$ ze sprzężeniem zespolonym i $su(n)$ ze sprzężeniem hermitowskim razy minus.*

(2) *$so(n, \mathbb{C})$ ma formy rzeczywiste $so(q, p)$ dla $n = q + p$ ze sprzężeniem $A \mapsto K\overline{A}K$, gdzie $K^2 = I_{q,p}$.*

(3) *$sp(m, \mathbb{C})$ ma formę rzeczywistą $sp(m, \mathbb{R})$.*

2.9 Formy niezmiennicze na algebrze Liego

Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Mówimy, że forma dwuliniowa $\langle\cdot|\cdot\rangle$ na $\mathfrak{g}$ jest *niezmiennicza*, gdy

$$\langle [B, A]|C\rangle + \langle A|[B, C]\rangle = 0, \quad A, B, C \in \mathfrak{g}. \tag{2.3}$$

Inny równoważny warunek:

$$\langle [A, B]|C\rangle = \langle A|[B, C]\rangle.$$

Przypomnijmy, że jeśli $\pi : \mathfrak{g} \to gl(\mathcal{V})$ jest reprezentacją, i $\langle\cdot|\cdot\rangle$ jest formą dwuliniową na $\mathcal{V}$, to mówimy, że $\mathfrak{g}$ *(infinitezymalnie) zachowuje* $\langle\cdot|\cdot\rangle$ gdy

$$\langle v|\pi(X)w\rangle + \langle\pi(X)v|w\rangle = 0, \quad X \in \mathfrak{g}, \quad v, w \in \mathcal{V}. \tag{2.4}$$

Definicję (2.4) można zatem przeformułować następująco: forma na algebrze Liego jest niezmiennicza, gdy jest ona niezmiennicza dla reprezentacji dołączonej:

$$\langle \mathrm{ad}(B)A|C\rangle + \langle A|\mathrm{ad}(B)C\rangle = 0.$$

Jeśli $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$, to Tr AB jest formą niezmienniczą. Ogólniej, z każdą reprezentacją π algebry Liego $\mathfrak{g}$ w skończenie wymiarowej przestrzeni mamy związaną niezmienniczą formę dwuliniową

$$\langle B|C\rangle_\pi := \mathrm{Tr}\ \pi(B)\pi(C).$$

Jeśli $\pi = \mathrm{ad}$ formę tę nazywamy *formą Killinga* i oznaczamy czasem $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$.

Twierdzenie 2.7 *Niech $\perp$ będzie dopełnieniem ortogonalnym dla formy niezmienniczej $\langle\cdot|\cdot\rangle$ Niech $\mathfrak{b}$ będzie ideałem w $\mathfrak{g}$.*

(1) *$\mathfrak{b}^\perp$ też jest ideałem.*

(2) *Jeśli forma zeruje się na $\mathfrak{b}$, to $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{g}^\perp$.*

(3) *Jeśli forma jest niezdegenerowana, to $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}^\perp$ jest przemiennym ideałem.*

Dowód. (1) Niech $A \in \mathfrak{g}$, $B \in \mathfrak{b}$, $C \in \mathfrak{b}^\perp$.

$$\langle[C, A]|B\rangle = \langle C|[A, B]\rangle = 0.$$

Zatem, $[A, C] \in \mathfrak{b}^\perp$.

(2) Niech $B_1, B_2 \in \mathfrak{b}$. Wtedy

$$\langle[B_1, B_2]|A\rangle = \langle B_1|[B_2, A]\rangle = 0.$$

Zatem $[B_1, B_2] \in \mathfrak{g}^\perp$.

(3) $\mathfrak{g}^\perp = \{0\}$. Zatem, na mocy (2), $[\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}^\perp, \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}^\perp] = \{0\}$. □

Stwierdzenie 2.8 *Niech $\mathfrak{a}$ będzie ideałem algebry Liego $\mathfrak{g}$. Niech $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ i $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathfrak{a}}$ będą formami Killinga względem $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{a}$. Wtedy obcięcie $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ do $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ jest równe $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathfrak{a}}$.*

Dowód. Niech $A, B \in \mathfrak{a}$. Wybieramy bazę w $\mathfrak{g}$ tak, aby początkowe elementy tworzyły bazę $\mathfrak{a}$. Wtedy

$$\mathrm{ad}(A) \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}(B) \sim \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\mathrm{ad}(A)\mathrm{ad}(B) \sim \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd

$$\langle A|B\rangle_{\mathfrak{g}} = \mathrm{Tr}\mathrm{ad}(A)\mathrm{ad}(B) = \mathrm{Tr}a_{11}b_{11} = \langle A|B\rangle_{\mathfrak{a}}.$$

□

Przykład 2.9 *Dla $gl(n) = \mathbb{C}\mathbb{1}_n \oplus sl(n)$ forma Killinga jest równa*

$$\langle A|B\rangle_{\mathrm{ad}} = 2n\mathrm{Tr}AB - 2\mathrm{Tr}A\mathrm{Tr}B.$$

Czyli forma Killinga równa jest $2n$ razy forma śladowa na $sl(n)$ i 0 na $\mathbb{C}\mathbb{1}_n$. Niezerowe elementy macierzowe formy Killinga mamy dla $i \neq j$:

$$\langle A_{ij}|A_{ji}\rangle_{\mathrm{ad}} = 2n,\ \langle A_{ii}|A_{ii}\rangle_{\mathrm{ad}} = 2n-2,\quad \langle A_{ii}|A_{jj}\rangle_{\mathrm{ad}} = -2.$$

Mamy bowiem

$$\mathrm{ad}(A)\mathrm{ad}(B)X = ABX + XBA - AXB - BXA.$$

Niezerowe wyrazy diagonalne dla reprezentacji dołączonej są równe

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{ad}(A_{ij})\mathrm{ad}(A_{ji})A_{ik} & = A_{ik},\ k \neq j, & n-1 \textit{ wyrazów}, \\
\mathrm{ad}(A_{ij})\mathrm{ad}(A_{ji})A_{kj} & = A_{kj},\ k \neq i, & n-1 \textit{ wyrazów}, \\
\mathrm{ad}(A_{ij})\mathrm{ad}(A_{ji})A_{ij} & \quad = 2A_{ij}, & 2 \textit{ wyrazy}, \\
 & & \\
\mathrm{ad}(A_{ii})\mathrm{ad}(A_{ii})A_{ik} & = A_{ik},\ k \neq i, & n-1 \textit{ wyrazów}, \\
\mathrm{ad}(A_{ii})\mathrm{ad}(A_{ii})A_{ki} & = A_{ki},\ k \neq i, & n-1 \textit{ wyrazów}, \\
 & & \\
\mathrm{ad}(A_{ii})\mathrm{ad}(A_{jj})A_{ij} & \quad = -A_{ij}, & 1 \textit{ wyraz}, \\
\mathrm{ad}(A_{ii})\mathrm{ad}(A_{jj})A_{ji} & \quad = -A_{ji}, & 1 \textit{ wyraz}.
\end{array}$$

2.10 Algebry półproste i reduktywne

Mówimy, że algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest *półprosta* gdy nie posiada niezerowych ideałów przemiennych. $\mathfrak{g}$ jest *reduktywna* gdy jest sumą prostą półprostej i przemiennej algebry Liego.

Twierdzenie 2.10 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *$\mathfrak{g}$ jest algebrą półprostą.*

(2) *Forma Killinga na $\mathfrak{g}$ jest niezdegenerowana.*

(3) *$\mathfrak{g}$ jest sumą prostą ideałów prostych*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n.$$

Dowód. (2)⇒(1): Niech $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathrm{ad}}$ będzie nieosobliwa. Niech $\mathfrak{a}$ będzie ideałem przemiennym. Dobierzmy bazę w $\mathfrak{g}$ tak, aby początkowe elementy stanowiły bazę w $\mathfrak{a}$. Niech $B \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathfrak{a}$. Mamy

$$\mathrm{ad}(B) \sim \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}(A) \sim \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\mathrm{ad}(A)\mathrm{ad}(B) \sim \begin{bmatrix} 0 & a_{12}b_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Czyli

$$\langle A|B\rangle_{\text{ad}} = \text{Tr ad}(A)\text{ad}(B) = 0.$$

Zatem $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}^{\perp} = \{0\}$.

(1)⇒(2): Implikacja ta wynika z Kryterium Cartana dla formy Killinga (Tw. 14.15).

(1)⇒(3): Niech $\mathfrak{a}$ będzie nietrywialnym ideałem. Wiemy już, że z (1) wynika, że forma Killinga jest niezdegenerowana. Z Tw. 2.7 wynika, że $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$ jest ideałem przemiennym. Z półprostoty $\mathfrak{g}$ wynika, że $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp} = \{0\}$. Kontynuując ten proces dostajemy rozkład na ideały proste.

(3)⇒(1): $\mathfrak{a}_i$ jako proste algebry Liego posiadają niezdegenerowaną formę Killinga. (Wynika to z (1)⇒(2)). Więc to samo jest prawdą dla $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$. □

Twierdzenie 2.11 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprosta i*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n \tag{2.5}$$

będzie jej rozkładem na proste ideały.

(1) *Dowolny ideał ma postać $\mathfrak{a}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_{i_k}$, gdzie $1 \le i_1 < \cdots i_k \le n$.*

(2) *Rozkład (2.5) jest jedyny z dokładnością do permutacji.*

(3) *Obraz $\mathfrak{g}$ względem homomorfizmu jest półprosty.*

(4) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

Dowód. (1) Niech $\mathfrak{h}$ będzie ideałem w $\mathfrak{g}$. Jeśli $\mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{h} \neq \{0\}$, to $\mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{h}$ jest nietrywialnym ideałem. Zatem $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{h}$. Czyli

$$I_1 = \{i \ : \ \mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{h}\}, \quad I_2 = \{i \ : \ \mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{h} = \{0\}\}$$

stanowi rozbicie zbioru $\{1, \ldots, n\}$ na rozłączne podzbiory. Połóżmy

$$\mathfrak{g}_1 := \bigoplus_{i \in I_1} \mathfrak{a}_i, \quad \mathfrak{g}_2 := \bigoplus_{i \in I_2} \mathfrak{a}_i.$$

Oczywiście, $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{h}$.

Niech $B \in \mathfrak{h}$. $B = B_1 + B_2$, $B_i \in \mathfrak{g}_i$.

Niech $j \in I_1$. Wtedy $[B_2, \mathfrak{a}_j] \in \mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{a}_j = \{0\}$.

Niech $j \in I_2$. Mamy $B, B_1 \in \mathfrak{h}$. Zatem $B_2 \in \mathfrak{h}$. Więc, $[B_2, \mathfrak{a}_j] \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}_j = \{0\}$. Zatem $[B_2, \mathfrak{a}_j] = \{0\}$.

Czyli $[B_2, \mathfrak{g}] = \{0\}$. Zatem B_2 należy do centrum algebry $\mathfrak{g}$. Czyli $B_2 = 0$.

(2) Na mocy (1), jeśli $\mathfrak{a}$ jest prostym ideałem zawartym w $\mathfrak{g}$, to jest on równy jednemu z ideałów w (2.5). □

Twierdzenie 2.12 *Niech $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie półprosta. Wtedy forma śladowa jest niezdegenerowana.*

Dowód. Dowód jest analogiczny do dowodu Tw. 2.10 (1)⇒(2), przy czym korzystamy z Kryterium Cartana dla formy śladowej (Tw. 14.13). □

Twierdzenie 2.13 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *$\mathfrak{g}$ jest algebrą reduktywną.*

(2) *Istnieje niezdegenerowana forma niezmiennicza na $\mathfrak{g}$.*

(3) *$\mathfrak{g}$ jest sumą prostą ideałów prostych lub równych $\mathbb{K}$.*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n.$$

3 Grupy Liego i ich algebry Liego

3.1 Rozmaitości

Niech $\mathcal{P}$ będzie rozmaitością. $\mathcal{P}$ można pokryć zbiorami otwartymi $\mathcal{O}$ i mapami $\phi_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$. Mapy $\phi_{\mathcal{O}}(p) = x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ pozwalają utożsamić $\mathcal{O}$ z otwartym podzbiorem $\phi_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}) \subset \mathbb{R}^n$.

Niech Φ będzie gładką transformacją na $\mathcal{P}$. Dla $f \in C^\infty(\mathcal{P})$ kładziemy $\Phi^\# f(p) := f(\Phi(p))$.

Niech $\mathrm{Diff}(\mathcal{P})$ oznacza zbiór dyfeomorfimów rozmaitości $\mathcal{P}$. Jest to grupa. Piszemy $\Phi_\# := (\Phi^\#)^{-1}$. $\mathrm{Diff}(\mathcal{P}) \ni \Phi \mapsto \Phi_\#$ jest działaniem grupy.

3.2 Wektory styczne

Niech $p \in \mathcal{P}$. Standardowa definicja wektora stycznego do $\mathcal{P}$ w punkcie p mówi o klasie abstrakcji krzywych. Jeśli krzywa $t \mapsto \gamma_t \in \mathcal{P}$ zadaje wektor styczny A w $p = \gamma_s$, będziemy pisali $A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_t\big|_{t=s}$. Przez $\mathrm{T}_p\mathcal{P}$ będziemy oznaczali przestrzeń styczną do $\mathcal{P}$ w punkcie p.

Jeśli $A \in \mathrm{T}_p\mathcal{P}$, to mamy liniowe odwzorowanie $A^\# : C^\infty(\mathcal{P}) \to \mathbb{C}$

$$A^\# f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma_t)\Big|_{t=0}$$

dla krzywej γ_t definiującej A dla $t = 0$. Będziemy pisać A zamiast $A^\#$.

Niech Φ będzie gładką transformacją na $\mathcal{P}$. Wektor $A \in \mathrm{T}_p\mathcal{P}$ może być przetransportowany przez Φ. Dostajemy odwzorowanie $\mathrm{T}_p\Phi : \mathrm{T}_p\mathcal{P} \to \mathrm{T}_{\Phi(p)}\mathcal{P}$ zdefiniowane przez

$$\mathrm{T}_p\Phi(A) f := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ \Phi \circ \gamma_t\Big|_{t=0}.$$

Mamy

$$\mathrm{T}_p(\Phi_2 \circ \Phi_1) = \mathrm{T}_{\Phi_1(p)}\Phi_2 \circ \mathrm{T}_p\Phi_1.$$

3.3 Pola wektorowe

Zbiór $\mathrm{T}\mathcal{P} := \bigcup_{p\in\mathcal{P}} \mathrm{T}_p\mathcal{P}$ z naturalną strukturą rozmaitości nazywamy *wiązką styczną*. Funkcję gładką $\mathcal{P} \ni p \mapsto X(p) \in \mathrm{T}\mathcal{P}$ taką, że $X(p) \in \mathrm{T}_p\mathcal{P}$ nazywamy polem wektorowym. Zbiór pól wektorowych na $\mathcal{P}$ oznaczamy przez $C^\infty(\mathcal{P}, \mathrm{T}\mathcal{P})$. Pole wektorowe X zadaje odwzorowanie $X : C^\infty(\mathcal{P}) \to C^\infty(\mathcal{P})$ (czasami oznaczane przez $X^\#$). We współrzędnych ma ono postać

$$Xf(x) = X^j(x)\partial_{x^j} f(x).$$

Komutator dwóch pól wektorowych jest też polem wektorowym:

$$[X,Y] = \big(X^j(x)\partial_{x^j}Y^i(x) - Y^j(x)\partial_{x^j}X^i(x)\big)\,\partial_{x^i}.$$

Pola wektorowe można przenosić przez dyfeomorfizm. Dla $\Phi \in \mathrm{Diff}(\mathcal{P})$, definiujemy $\Phi_\# : C^\infty(\mathcal{P}, \mathrm{T}\mathcal{P}) \to C^\infty(\mathcal{P}, \mathrm{T}\mathcal{P})$ przez

$$\Phi_\#(X^\#) := \Phi_\# \circ X \circ \Phi_\#^{-1},$$

czyli

$$\Phi_\#(X^\#)f(p) = (X(f\circ\Phi))\left(\Phi^{-1}(p)\right).$$

We współrzędnych:

$$\Phi_\#(X^\#) = X^j(y)\frac{\partial\Phi^i(y)}{\partial y^j}\Big|_{y=\Phi^{-1}(x)}\partial_{x^i}.$$

Mamy

$$\big(\Phi_\#(X)f\big)(p) = \mathrm{T}_q\Phi\big(X(q)\big)f\circ\Phi(p)\Big|_{q=\Phi^{-1}(p)}.$$

3.4 Pola wektorowe definujące potok

Rodzinę dyfeomorfizmów Φ_t zależy w sposób gładki od $t \in \mathbb{R}$ będziemy nazywali potokiem. Dla każdego $p \in \mathcal{P}$, $t \mapsto \Phi_t(p)$ definiuje krzywą. Wzór

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t(p) = X_t\big(\Phi_t(p)\big). \tag{3.6}$$

definiuje więc rodzinę pól wektorowych X_t. Równoważnie,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t^\# = \Phi_t^\# \circ X_t.$$

Mówimy, że potok Φ_t jest generowany przez X_t.

Można zadać rodzinę pól wektorowych $\mathbb{R} \ni t \mapsto X_t$ i rozważać istnienie rozwiązań (3.6) z $\Phi_0 = \mathrm{Id}$. Rozwiązania takie lokalnie (w $\mathcal{P}$ i w czasie) istnieją i są jednoznaczne.

W szczególności, jeśli

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t(p) = X(\Phi_t(p)), \tag{3.7}$$

to Φ_t jest jednoparametrową grupą i piszemy $\Phi_t = \mathrm{e}^{tX}$. Równoważnie,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t^\# = X\circ\Phi_t^\# = \Phi_t^\# \circ X, \tag{3.8}$$

Jeśli X jest zadanym polem wektorowym takim, że istnieje rozwiązanie (3.7 dla małych t, to istnieje dla $t \in \mathbb{R}$.

3.5 Algebra Liego grupy Liego

Niech G będzie grupą Liego. Dla $g \in G$ definujemy lewe i prawe przesunięcie:

$$L_g h := gh, \quad R_g h := hg^{-1}, \quad h \in G.$$

Dostajemy homomorfizmy

$$G \ni g \mapsto L_g \in \mathrm{Diff}(G), \quad G \ni g \mapsto R_g \in \mathrm{Diff}(G).$$

Mamy

$$L_{g\#} f(h) = f(g^{-1}h), \quad R_{g\#} f(h) = f(hg).$$

Niech $Kh := h^{-1}$. Mamy

$$KL_gK = R_g.$$

Mówimy, że pole X na G jest lewoniezmiennicze, gdy

$$L_{g\#}(X) = X, \quad g \in G.$$

Równoważny warunek

$$\mathrm{T}_h L_g\big(X(h)\big) = X(gh), \quad g, h \in G.$$

Twierdzenie 3.1 *Pola lewoniezmiennicze tworzą algebrę Liego.*

Stwierdzenie 3.2 *Niech $G = GL(\mathcal{V})$. Wtedy $\mathrm{T}_h G = L(\mathcal{V})$. Jeśli $A \in L(\mathcal{V})$, to $G \ni g \mapsto gA \in L(\mathcal{V})$ jest polem lewoniezmienniczym takim, które dla $g = \mathbb{1}$ przyjmuje wartość A.*

Twierdzenie 3.3 *Niech G będzie spójną grupą Liego. Wtedy dla każdego $v \in \mathrm{T}_{\mathbb{1}} G$ istnieje dokładnie jedno pole lewoniezmiennicze V takie, że $V(\mathbb{1}) = v$.*

Dowód. Kładziemy

$$V(h) := \mathrm{T}_{\mathbb{1}} L_h(v).$$

Mamy wtedy

$$\mathrm{T}_h L_g\big(V(h)\big) = \mathrm{T}_h L_g\big(\mathrm{T}_{\mathbb{1}} L_h(V(\mathbb{1}))\big) = \mathrm{T}_{\mathbb{1}} L_g L_h(V(\mathbb{1})) = \mathrm{T}_{\mathbb{1}} L_{gh}(V(\mathbb{1})) = V(gh).$$

□

Algebra Liego lewoinwariantnych pól na grupie G jest nazywana *algebrą Liego grupy G* i oznaczana przez $\mathfrak{g}$. Jest ona naturalnie izomorficzna algebrze Liego prawoinwariantnych pól, jak również przestrzeni $\mathrm{T}_{\mathbb{1}} G$.

3.6 Odwzorowanie eksponencjalne

Niech X będzie polem lewoniezmienniczym

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\phi(s) = X\big(\phi(s)\big), \quad \phi(0) = g$$

ma zawsze rozwiązanie w otoczeniu zera, które oznaczamy $\phi_{X,g}(s)$.

Stwierdzenie 3.4 *Jeśli* $]-\epsilon,\epsilon[\ni s \mapsto \phi_{X,h}(s)$ *jest zdefiniowane, to*

$$]-\epsilon,\epsilon[\ni s \mapsto \phi_{X,gh}(s) = g\phi_{X,h}(s).$$

Sprawdzamy, że

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}g\phi_{X,h}(s) = L_{g\#}(X)\big(g\phi(s)\big) = X\big(g\phi(s)\big), \quad g\phi_{X,h}(0) = gh.$$

Korzystamy z jednoznaczności rozwiązania. □

Stwierdzenie 3.5 $\phi_{X,\mathbb{1}}(t_1)\phi_{X,\mathbb{1}}(t_2) = \phi_{X,\mathbb{1}}(t_1+t_2)$.

Dowód. Korzystając ze Stw. 3.4, dostajemy

$$\phi_{X,\mathbb{1}}(t_1)\phi_{X,\mathbb{1}}(t_2) = \phi_{X,\phi_{X,\mathbb{1}}(t_1)}(t_2)$$

□

Zatem można przedłużać $s \mapsto \phi_{X,h}(s)$ na całe $\mathbb{R}$. Kładziemy

$$\exp(X) := \phi_{X,\mathbb{1}}(1).$$

Stwierdzenie 3.6 *Mamy własności*

$$\exp(tX) = \phi_{X,\mathbb{1}}(t),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tX) = X\big(\exp(tX)\big),$$
$$\exp(t_1X)\exp(t_2X) = \exp\big((t_1+t_2)X\big).$$

Jeśli $G \subset GL(\mathcal{V})$, to $X(g) = gv$, gdzie $v = X(\mathbb{1}) \in gl(\mathcal{V})$. Wtedy

$$\exp(tX) = \mathrm{e}^{tv}$$

jest zwykłą funkcją eksponencjalną.

Twierdzenie 3.7 *Istnieje otoczenie* $\mathcal{U} \subset \mathfrak{g}$ *takie, że* $\mathcal{U} \ni X \mapsto \exp X \in G$ *jest dyfeomorfizmem na pewne otoczenie* $\mathbb{1}$ *w* G.

Dowód. Pokażemy to tylko dla $GL(\mathcal{V})$. Funkcja

$$\log(A) = \sum \frac{(-1)^{n+1}(\mathbb{1}-A)^n}{n}$$

jest analityczna dla $\|\mathbb{1}-A\| < 1$ i $\exp(\log A) = \mathbb{1}$. □

3.7 Odwzorowanie pochodne

Twierdzenie 3.8 *Niech $\phi : H \to G$ będzie homomorfizmem grup Liego. Niech $\mathfrak{h} = \mathrm{T}_{\mathbb{1}} H$, $\mathfrak{g} = \mathrm{T}_{\mathbb{1}} G$ będą ich algebrami Liego. Wtedy $\phi' := \mathrm{T}_{\mathbb{1}}\phi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ jest homomorfizmem algebra Liego. Poza tym, następujący diagram jest przemienny:*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \stackrel{\phi'}{\to} & \mathfrak{g} \\ \exp\downarrow & & \downarrow\exp \\ H & \stackrel{\phi}{\to} & G \end{array}$$

jest przemienny.

Dowód. Niech $X \in \mathfrak{h}$, $Y \in \mathfrak{g}$ będą polami lewoniezmienniczymi na H i G takimi, że $Y = \phi'(X)$. Niech $g = \phi(h)$.

$$\begin{aligned} X(h) &= \mathrm{T}_{\mathbb{1}} L_h X(\mathbb{1}), \\ Y(g) &= \mathrm{T}_{\mathbb{1}} L_g Y(\mathbb{1}) = \mathrm{T}_{\mathbb{1}} L_g \mathrm{T}_{\mathbb{1}} \phi X(\mathbb{1}) = \mathrm{T}_{\mathbb{1}} L_g \phi X(\mathbb{1}) \\ &= \mathrm{T}_{\mathbb{1}} \phi L_h X(\mathbb{1}) = \mathrm{T}_h \phi X(h). \end{aligned}$$

(...) □

4 Klasyczne algebry i grupy Liego

4.1 Algebra Liego macierzy bezśladowych

Definiujemy
$$SL(\mathbb{K}^n) = SL(n, \mathbb{K}) := \{A \in GL(\mathbb{K}^n) \ : \ \det A = 1\}.$$

Niech $A \in L(\mathbb{K}^n)$. Wzór
$$\mathrm{Tr} A := \sum_{i=1}^n A_{ii} \in \mathbb{K}$$
definiuje *ślad* spełniający
$$\mathrm{Tr} AB = \mathrm{Tr} BA, \quad \det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr} A}.$$
Zauważmy, że $\mathrm{Tr}[A, B] = 0$.

$sl(\mathbb{K}^n)$ definiujemy jako
$$sl(\mathbb{K}^n) := \{A \in gl(\mathbb{K}^n) \ : \ \mathrm{Tr} A = 0\}.$$
Jest to algebra Liego. Piszemy też
$$sl(\mathbb{K}^n) = sl(n, \mathbb{K}).$$

Oczywiście, $A \in sl(n, \mathbb{K})$ implikuje $\mathrm{e}^A \in SL(n, \mathbb{K})$.

Każdą $B \in SL(\mathbb{C}^n)$ można przedstawić w postaci $B = \mathrm{e}^A$ dla $A \in sl(\mathbb{C}^n)$.

Są jednak takie elementy $SL(\mathbb{R}^n)$, których nie można przedstawić jako e^A dla $A \in sl(\mathbb{R}^n)$. Przykładem takim jest $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

4.2 Formy niezmiennicze

Niech $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \ni (v, w) \mapsto \langle v|w\rangle \in \mathbb{K}$ będzie formą dwuliniową. Pamiętamy, że grupa $G \subset GL(\mathcal{V})$ *zachowuje* $\langle\cdot|\cdot\rangle$ gdy

$$\langle gv|gw\rangle = \langle v|w\rangle, \quad g \in G.$$

Oczywiste jest, że odwzorowania odwracalne zachowujące pewną formę stanowią grupę.

Mówimy, że algebra Liego $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ *(infinitezymalnie) zachowuje* $\langle\cdot|\cdot\rangle$ gdy

$$\langle v|Xw\rangle + \langle Xv|w\rangle = 0, \quad X \in \mathfrak{g}. \tag{4.9}$$

Stwierdzenie 4.1 *Odwzorowania infinitezymalnie zachowujące formę stanowią algebrę Liego.*

Dowód.

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v|XYw\rangle + \langle Xv|Yw\rangle - \langle v|YXw\rangle - \langle Yv|Xw\rangle \\ &\quad +\langle XYv|w\rangle + \langle Yv|Xw\rangle - \langle YXv|w\rangle - \langle Xv|Yw\rangle \\ &= \langle v|[X,Y]w\rangle + \langle [X,Y]v|w\rangle. \end{aligned}$$

□

Jeśli grupa G zachowuje formę $\langle\cdot|\cdot\rangle$, to jej algebra Liego infinitezymalnie zachowuje formę $\langle\cdot|\cdot\rangle$. W rzeczy samej,

$$\langle \mathrm{e}^{tX} v|\mathrm{e}^{tX} w\rangle = \langle v|w\rangle, \quad X \in \mathfrak{g} \tag{4.10}$$

implikuje

$$t\langle v|Xw\rangle + t\langle Xv|w\rangle + O(t^2) = 0, \quad X \in \mathfrak{g}. \tag{4.11}$$

4.3 Ortogonalne i pseudoortogonalne algebra Liego

4.3.1 Abstrakcyjne podejście

Załóżmy, że w $\mathcal{V}$ mamy niezdegenerowaną symetryczną formę dwuliniową –iloczyn skalarny. Pamiętamy, że

$$O(\mathcal{V}) = \{B \in GL(\mathcal{V}) \ : \ \langle Bv|Bw\rangle = \langle v|w\rangle\}.$$

$A \in gl(\mathcal{V})$ należy do $so(\mathcal{V})$ gdy infinitezymalnie zachowuje iloczyn skalarny czyli $\langle Av|w\rangle + \langle v|Aw\rangle = 0$.

4.3.2 Kanoniczna forma

W szczególności, niech $\mathcal{V} = \mathbb{K}^n$ i forma będzie kanoniczna

$$\langle v|w\rangle = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n.$$

Wtedy $B \in O(\mathbb{K}^n)$ gdy $B^{\#} B = \mathbb{1}$. $B \in O(\mathbb{K}^n)$ implikuje $\det B = \pm 1$. Kładziemy $SO(\mathbb{K}^n) := O(\mathbb{K}^n) \cap SL(\mathbb{K}^n)$.

Dla formy kanonicznej, $A \in o(\mathbb{K}^n)$ gdy $A^\# + A = 0$. Jest to podalgebra Liego w $sl(\mathbb{K}^n)$. Jest ona algebrą Liego grupy Liego $SO(\mathbb{K}^n)$. Piszemy też

$$so(\mathbb{R}^n) = so(n).$$

W przypadku zespolonym piszemy też $so(n, \mathbb{C}) = so(\mathbb{C}^n)$.

Każdą $B \in SO(\mathbb{K}^n)$ można przedstawić w postaci $B = \mathrm{e}^A$ dla $A \in so(\mathbb{K}^n)$.

4.3.3 Forma o sygnaturze (q, p)

Wyposażmy $\mathbb{R}^n$ w formę o sygnaturze (q, p):

$$\langle v|w\rangle_{q,p} = -v_1 w_1 - \cdots - v_q w_q + v_{q+1} w_{q+1} + \cdots + v_{q+p} w_{q+p} = \langle v|I_{q,p} w\rangle.$$

$B \in O(q, p)$ kiedy

$$B^\# I_{q,p} B = I_{q,p}.$$

$B \in O(q, p)$ implikuje $\det B = \pm 1$. Piszemy $SO(q, p) := SL(q + p) \cap O(q, p)$.

$A \in so(\mathbb{R}^{q,p})$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$A^\# I_{q,p} + I_{q,p} A = 0.$$

Jest to podalgebra Liego w $sl(\mathbb{R}^{q+p})$. Jest to algebra Liego grupy Liego $SO(\mathbb{R}^{q,p})$. Piszemy też

$$so(\mathbb{R}^{q,p}) = so(q, p).$$

4.4 Unitarne i pseudounitarne algebry Liego

4.4.1 Abstrakcyjne podejście

Załóżmy, że w zespolonej przestrzeni $\mathcal{V}$ mamy niezdegenerowaną hermitowską formę dwuliniową. Pamiętamy, że

$$U(\mathcal{V}) = \{B \in GL(\mathcal{V}) \ : \ (Bv|Bw) = (v|w)\}.$$

$A \in gl(\mathcal{V})$ należy do $u(\mathcal{V})$ gdy infinitezymalnie zachowuje iloczyn skalarny czyli $(Av|w) + (v|Aw) = 0$.

4.4.2 Kanoniczna forma

W szczególności, niech $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$ i forma będzie kanoniczna

$$(v|w) = \overline{v}_1 w_1 + \cdots + \overline{v}_n w_n.$$

Wtedy $B \in U(n)$ gdy $B^* B = \mathbb{1}$. $B \in U(n)$ implikuje $|\det B| = 1$. Kładziemy $SU(n) := O(n) \cap SL(\mathbb{C}^n)$.

Dla formy kanonicznej, $A \in u(n)$ gdy $A^* + A = 0$. Jest ona algebrą Liego grupy Liego $U(n)$.

Kładziemy też $su(n) := u(n) \cap sl(\mathbb{C}^n)$. Jest to algebra Liego grupy $SU(n)$.

Każdą $B \in SU(n)$ można przedstawić w postaci $B = \mathrm{e}^A$ dla $A \in su(n)$.

4.4.3 Forma o sygnaturze (q, p)

Wyposażmy $\mathbb{C}^n$ w formę hermitowską o sygnaturze (q, p):

$$(v|w)_{q,p} = -\overline{v}_1 w_1 - \cdots - \overline{v}_q w_q + \overline{v}_{q+1} w_{q+1} + \cdots + \overline{v}_{q+p} w_{q+p} = (v|I_{q,p} w).$$

$B \in U(q, p)$ kiedy

$$B^* I_{q,p} B = I_{q,p}.$$

$B \in U(q, p)$ implikuje $|\det B| = 1$. Piszemy $SU(q, p) := SL(\mathbb{C}^{q+p}) \cap U(q, p)$.

$A \in u(q, p)$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$A^* I_{q,p} + I_{q,p} A = 0.$$

Mamy też $su(q, p) := u(q, p) \cap sl(\mathbb{C}^{q+p})$.

4.5 Symplektyczna algebra Liego

Niech $\langle v|Jw\rangle$ będzie formą antysymetryczną na $\mathcal{V}$. Kładziemy

$$Sp(\mathcal{V}) = \{B \in GL(\mathcal{V}) \ : \ \langle Bv|JBw\rangle = \langle v|Jw\rangle\}.$$

W szczególności, jeśli $\mathcal{V} = \mathbb{K}^{2n}$, to standardowo wybieramy $J = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1}_n \\ -\mathbb{1}_n & 0 \end{bmatrix}$. Wtedy piszemy $Sp(\mathbb{K}^{2n}) = Sp(n, \mathbb{K})$. Można pokazać, że $Sp(\mathbb{K}^n) \subset SL(\mathbb{K}^n)$.

Definiujemy

$$sp(\mathbb{K}^{2n}) := \{A \in L(\mathbb{K}^{2n}) \ : \ A^{\#} J + JA = 0\}$$

Latwo pokazać, że ślad macierzy symplektycznych jest równy 0. Dlatego $sp(\mathbb{K}^{2n})$ jest podalgebrą Liego w $sl(\mathbb{K}^{2n})$. $sp(\mathbb{K}^{2n})$ jest algebrą Liego grupy $Sp(\mathbb{K}^n)$.

4.6 Przemienne grupy i algebry Liego

Jednowymiarowe macierze postaci e^t i $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, gdzie $t \in \mathbb{R}$ stanowią przemienne grupy Liego. Ich algebry Liego są izomorficzne z $\mathbb{R}$.

Jeśli $\mathfrak{g} \in gl(\mathcal{V})$ jest jakąkolwiek algebrą Liego, to $\exp(\mathfrak{g})$ nie musi być konkretną grupą Liego. Ilustruje poniższy przykład:

Rozważmy 1-wymiarową algebrę Liego w $gl(\mathbb{C}^2)$. rozpiętą na $X := \begin{bmatrix} \mathrm{i}\alpha & 0 \\ 0 & \mathrm{i}\beta \end{bmatrix}$, gdzie $\frac{\alpha}{\beta}$ jest niewymierne. Wtedy $\{\mathrm{e}^{tX} \ : \ t \in \mathbb{R}\}$ jest gęsta w macierzach diagonalnych. Wynika to z tego, że $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta}{\alpha}n}$ jest gęste w okręgu jednostkowym.

5 Iloczyn tensorowy

5.1 Symetryczny i antsymetryczny iloczyn tensorowy

Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią wektorową.

Twierdzenie 5.1 *Dla $\sigma \in S_n$ istnieje dokładnie jeden operator $\Theta(\sigma) \in L(\otimes^n \mathcal{V})$, dla którego*

$$\Theta(\sigma) v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = v_{\sigma^{-1}1} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}n}.$$

$$S_n \ni \sigma \mapsto \Theta(\sigma) \in L(\mathcal{V}^{\otimes n})$$

jest reprezentacją.

Dowód. Wystarczy wybrać bazę $e_1, \ldots, e_m$ w $\mathcal{V}$ i położyć

$$\Theta(\sigma) e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} = e_{i_{\sigma^{-1}1}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma^{-1}n}}$$

To definiuje jednoznacznie operator $\Theta(\sigma)$.

Pokażmy, że $\Theta(\pi)\Theta(\sigma) = \Theta(\pi\sigma)$. Niech $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{V}$ i $w_i := v_{\sigma^{-1}i}$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\Theta(\pi)\Theta(\sigma) v_1 \otimes \cdots \otimes v_n &= \Theta(\pi) w_1 \otimes \cdots \otimes w_n \\
&= w_{\pi^{-1}1} \otimes \cdots \otimes w_{\pi^{-1}n} \\
&= v_{\sigma^{-1}\pi^{-1}1} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}\pi^{-1}n} \\
&= v_{(\pi\sigma)^{-1}1} \otimes \cdots \otimes v_{(\pi\sigma)^{-1}n}.
\end{aligned}$$

Jeśli $\mathcal{V}$ jest przestrzenią Hilberta, jest to reprezentacja unitarna.

Jest to reprezentacja przywiedlna. W szczególności, można podać rzuty ortogonalne na podprzestrzenie na których reprezentacja jest trywialna i znakowa:

$$\begin{aligned}
\Theta_{\mathrm{s}}^n &:= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \Theta(\sigma), \\
\Theta_{\mathrm{a}}^n &:= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\sigma \Theta(\sigma).
\end{aligned}$$

Kładziemy $\otimes_{\mathrm{s/a}}^n \mathcal{V} := \Theta_{\mathrm{s/a}}^n \otimes^n \mathcal{V}$.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\Theta_{\mathrm{s}}^2 &:= \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \Theta(\tau)), \\
\Theta_{\mathrm{a}}^2 &:= \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \Theta(\tau)).
\end{aligned}$$

Zatem $\mathbb{1} = \Theta_{\mathrm{s}}^2 + \Theta_{\mathrm{a}}^2$. Czyli każdy 2-tensor można rozłożyć na część symetryczną i antysymetryczną: $\otimes^2 \mathcal{V} = \otimes_{\mathrm{s}}^2 \mathcal{V} \oplus \otimes_{\mathrm{a}}^2 \mathcal{V}$.

Jeśli $t \in \otimes^n \mathcal{V}$, to

$$t = \sum t_{i_1, \ldots, i_n} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned}
\Theta_{\mathrm{s}} t &= \sum t_{(i_1, \ldots, i_n)} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}, \\
\Theta_{\mathrm{a}} t &= \sum t_{[i_1, \ldots, i_n]} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n},
\end{aligned}$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
t_{(i_1,\dots,i_n)} &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} t_{i_{\sigma i},\dots,i_{\sigma n}},\\
t_{[i_1,\dots,i_n]} &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}\sigma t_{i_{\sigma i},\dots,i_{\sigma n}}.
\end{aligned}
$$

Mamy

$$\dim \otimes_{\mathrm{s}}^n \mathbb{C}^d = \frac{(d+n-1)!}{(d-1)!n!}, \quad \dim \otimes_{\mathrm{a}}^n \mathbb{C}^d = \frac{d!}{n!(d-n)!}.$$

5.2 Second quantization of operators

For a contraction q on $\mathcal{Z}$ we define the operator $\Gamma(q)$ on $\Gamma_{\mathrm{s/a}}(\mathcal{Z})$ by

$$\Gamma(q)\Big|_{\otimes_{\mathrm{s/a}}^n \mathcal{Z}} = q\otimes\cdots\otimes q\Big|_{\otimes_{\mathrm{s/a}}^n \mathcal{Z}}.$$

$\Gamma(q)$ is called the *second quantization of* q.

Similarly, for an operator h we define the operator $\mathrm{d}\Gamma(h)$ by

$$\mathrm{d}\Gamma(h)\Big|_{\otimes_{\mathrm{s/a}}^n \mathcal{Z}} = h\otimes 1^{(n-1)\otimes} + \cdots + 1^{(n-1)\otimes}\otimes h\Big|_{\otimes_{\mathrm{s/a}}^n \mathcal{Z}}.$$

$\mathrm{d}\Gamma(h)$ is called the *(infinitesimal) second quantization of* h.

Traditional notation: If h is the multiplication operator by $h(\xi)$, then $\mathrm{d}\Gamma(h) = \int h(\xi)a_\xi^* a_\xi \mathrm{d}\xi$.

Note the identity $\Gamma(\mathrm{e}^{\mathrm{i}th}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathrm{d}\Gamma(h)}$.

5.3 Prawo eksponencjalne dla przestrzeni Focka

Niech $\mathcal{Y}_1$ i $\mathcal{Y}_2$ będą przestrzeniami Hilberta i $j_i : \mathcal{Y}_i \to \mathcal{Y}_1\oplus\mathcal{Y}_2$ kanonicznymi włożeniami.

Wprowadźmy

$$U : \Gamma_{\mathrm{s/a}}^{\mathrm{fin}}(\mathcal{Y}_1)\otimes\Gamma_{\mathrm{s/a}}^{\mathrm{fin}}(\mathcal{Y}_2) \to \Gamma_{\mathrm{s/a}}^{\mathrm{fin}}(\mathcal{Y}_1\oplus\mathcal{Y}_2)$$

następująco. Niech $\Psi_1 \in \Gamma_{\mathrm{s/a}}^{n_1}(\mathcal{Y}_1)$, $\Psi_2 \in \Gamma_{\mathrm{s/a}}^{n_2}(\mathcal{Y}_2)$. Wtedy

$$U\Psi_1\otimes\Psi_2 := \sqrt{\tfrac{(n_1+n_2)!}{n_1!n_2!}}(\Gamma(j_1)\Psi_1)\otimes_{\mathrm{s/a}}(\Gamma(j_2)\Psi_2). \tag{5.12}$$

Twierdzenie 5.2 (1) *U rozszerza się do unitarnego operatora z* $\Gamma_{\mathrm{s/a}}(\mathcal{Y}_1)\otimes\Gamma_{\mathrm{s/a}}(\mathcal{Y}_2)$ *do* $\Gamma_{\mathrm{s/a}}(\mathcal{Y}_1\oplus\mathcal{Y}_2)$.

(2) $U\Omega\otimes\Omega = \Omega$.

(3) *Jeśli* $h_i \in B(\mathcal{Y}_i)$, *wtedy*

$$\mathrm{d}\Gamma(h_1\oplus h_2)U = U\big(\mathrm{d}\Gamma(h_1)\otimes\mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes\mathrm{d}\Gamma(h_2)\big). \tag{5.13}$$

(4) *Jeśli* $p_i \in B(\mathcal{Y}_i)$, *wtedy*

$$\Gamma(p_1 \oplus p_2)U = U\Gamma(p_1) \otimes \Gamma(p_2). \tag{5.14}$$

Dowód. Pokażmy (1) dla przypadku symetrycznego. Niech $\Psi_1 \in \Gamma_{\mathrm{s}}^{n_1}(\mathcal{Y}_1)$, $\Psi_2 \in \Gamma_{\mathrm{s}}^{n_2}(\mathcal{Y}_2)$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\Gamma(j_1)\Psi_1 \otimes_{\mathrm{s}} \Gamma(j_2)\Psi_2 &= \tfrac{1}{(n_1+n_2)!} \sum_{\sigma \in S_{n_1+n_2}} \Theta(\sigma)\Gamma(j_1)\Psi_1 \otimes \Gamma(j_2)\Psi_2 \\
&= \tfrac{n_1! n_2!}{(n_1+n_2)!} \sum_{[\sigma] \in S_{n_1+n_2}/S_{n_1} \times S_{n_2}} \Theta(\sigma)\Gamma(j_1)\Psi_1 \otimes \Gamma(j_2)\Psi_2.
\end{aligned}$$

Elementy sumy z prawej są wzajemnie ortogonalne. Zatem

$$\begin{aligned}
\|\Gamma(j_1)\Psi_1 \otimes_{\mathrm{s}} \Gamma(j_2)\Psi_2\|^2 &= \left(\tfrac{n_1! n_2!}{(n_1+n_2)!}\right)^2 \sum_{[\sigma] \in S_{n_1+n_2}/S_{n_1} \times S_{n_2}} \|\Theta(\sigma)\Psi_1 \otimes \Psi_2\|^2 \\
&= \tfrac{n_1! n_2!}{(n_1+n_2)!} \|\Psi_1 \otimes \Psi_2\|^2.
\end{aligned}$$

□

5.4 Utożsamienie iloczynu tensorowego i operatorów liniowych

Rozważmy przestrzeń wektorową skończenie wymiarową $\mathcal{V}$. Wybierzmy bazę $e_1, \dots, e_n$, Mamy wtedy bazę w przestrzeni dualnej $e^1, \dots, e^n$. Wektor $v \in \mathcal{V}$ możemy zapisaywać na wiele sposobów

$$v = v^i e_i = [v^i].$$

Niech $\mathcal{W}$ będzie również skończenie wymiarową przestrzenią. Wybierzmy w niej bazę $f_1, \dots, f_m$. Zdefiniujmy $J : \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \to L(\mathcal{W}^\#, \mathcal{V})$ następująco:

$$J(e_i \otimes f_j)\xi := e_i \langle f_j | \xi \rangle.$$

Zauważmy, że $\Phi \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ i $J(\Phi)$ mają tę samą macierz:

$$\Phi = \Phi^{ij} e_i \otimes f_j, \qquad J(\Phi) f^j = \Phi^{ij} e_i.$$

Jeśli $P \in L(\mathcal{V})$, $Q \in L(\mathcal{W})$, to

$$P \otimes Q\, \Phi = P J(\Phi) Q^\#.$$

W szczególności, jeśli $\mathcal{W} = \mathcal{V}^\#$, to $J(e_i \otimes e^i) = \mathbb{1}_{\mathcal{V}}$.
Niech $\Psi \in \mathcal{V}^\# \otimes \mathcal{W}^\#$. Wtedy

$$\mathrm{Tr} ST = \langle J(S) | J(T) \rangle.$$

6 Zwarte grupy i ich reprezentacje

6.1 Reprezentacje

Rozważmy reprezentację $\rho : \mathfrak{g} \to gl(\mathcal{V})$ lub $\rho : G \to GL(\mathcal{V})$. Mówimy, że reprezentacja jest *przywiedlna*, gdy posiada nietrywialną podprzestrzeń niezmienniczą. W przeciwnym razie mówimy, że jest *nieprzywiedlna*.

Mówimy, że reprezentacja jest *rozkładalna*, gdy posiada nietrywialny rozkład na sumę prostą podprzestrzeni niezmienniczych. W przeciwnym razie mówimy, że jest *nierozkładalna*.

Każda reprezentacja rozkładalna jest przywiedlna.

W oczywisty sposób definiujemy *sumę prostą*. *Iloczyn tensorowy* reprezentacji ρ_1 i ρ_2 działa w $\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2$ i jest równy dla grup $\rho_1 \otimes \rho_2$ a dla algebr Liego $\rho_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \rho_2$.

Mówimy, że reprezentacja jest *całkowicie rozkładalna*, gdy istnieje rozkład $\mathcal{V} = \oplus_{j=1}^{n} \mathcal{V}_j$ takie, że reprezentacja ograniczona do $\mathcal{V}_j$ jest nieprzywiedlna.

(Zauważmy następującą niekonsekwencję terminologiczną: reprezentacja nieprzywiedlna jest całkowicie rozkładalna, ale nierozkładalna).

Jeśli $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$ jest podprzestrzenią niezmienniczą, to $\rho_1 := \rho\Big|_{\mathcal{V}_1}$ nazywamy *podreprezentacją* reprezentacji ρ. Mamy również naturalną *reprezentację ilorazową* $\rho^1 : \mathfrak{g} \to L(\mathcal{V}/\mathcal{V}_1)$ zadaną przez $\rho^1(A)(v + \mathcal{V}_1) = \rho(A)v + \mathcal{V}_1$. Wybierając bazę w $\mathcal{V}$ tak, by pierwsze wektory należały do $\mathcal{V}_1$, możemy wtedy napisać

$$\rho(A) = \begin{bmatrix} \rho_1(A) & ? \\ 0 & \rho^1(A) \end{bmatrix}.$$

Jeśli istnieje podprzestrzeń niezmiennicza $\mathcal{V}^1$ dopełniająca do $\mathcal{V}_1$, i bazy dostosujemy do rozkładu $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}^1$, to ? znika.

Zauważmy, że jeśli $\mathcal{W}$ jest podprzestrzenią niezmienniczą dla reprezentacji ilorazowej ρ^1, to $\mathcal{W} + \mathcal{V}_1$ jest podprzestrzenią niezmienniczą dla ρ.

Dla każdej reprezentacji skończenie wymiarowej znajdziemy niezerową podprzestrzeń niezmienniczą. Przez indukcję, konstruujemy ciąg przestrzeni niezmienniczych $\{0\} = \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \cdots \subset \mathcal{V}_n = \mathcal{V}$ takich, że reprezentacja ilorazowa na $\mathcal{V}_{n+1}/\mathcal{V}_n$ jest nieprzywiedlna. Ciąg taki nazywamy *ciągiem Jordana-Höldera*. Robimy to indukcyjnie: dla reprezentacji na $\mathcal{V}/\mathcal{V}_n$ szukamy podreprezentacji nieprzywiedlnej.

6.2 Reprezentacja kontragradientna

Załóżmy, że mamy reprezentację (niekoniecznie unitarną) π grupy G na skończenie wymiarowej przestrzeni $\mathcal{V}$. Reprezentację kontragradientną do π nazywamy reprezentację π^{ct} działającą w przestrzeni sprzężonej $\mathcal{V}^{\#}$ zadaną przez

$$\pi^{\mathrm{ct}}(g) := \pi(g)^{\#(-1)}, \quad g \in G.$$

Jeśli mamy reprezentację algebry Liego $\mathfrak{g}$, jej reprezentacja kontragradientna jest zdefiniowana jako

$$\pi^{\mathrm{ct}}(A) := -\pi(A)^{\#}, \quad A \in \mathfrak{g}.$$

π jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy gdy π^{ct} jest nieprzywiedlna (bo anihilator przestrzeni niezmienniczej dla π jest niezmienniczy dla π^{ct}).

Zauważmy, że dla reprezentacji unitarnych zapisanych w bazie ortonormalnej, reprezentacja kontragradientna pokrywa się z reprezentacją zespolenie sprzężoną $\overline{\rho}$.

6.3 Iloczyn reprezentacji i reprezentacji kontragradientnej

Rozważmy skończenie wymiarową reprezentację grupy $\rho : G \to GL(\mathcal{V})$ lub algebry Liego $\rho : \mathfrak{g} \to gl(\mathcal{V})$. Wtedy mamy reprezentację $\rho \otimes \rho^{\text{ct}}$ lub $\rho \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \rho^{\text{ct}}$ w $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^{\#}$. Wektor $e_i \otimes e^i$ rozpina 1-wymiarową przestrzeń na której ta reprezentacja jest trywialna. Ma ona reprezentację dopełniającą, zadaną przez jądro śladu, gdzie korzystamy z utożsamienia $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^{\#} \simeq L(\mathcal{V})$.

Na przykład, jeśli rozważymy algebrę $sl(n, \mathbb{C})$ lub $su(n)$ i ρ jest reprezentacją fundamentalną na $\mathbb{C}^n$, to dostaniemy reprezentację dołączoną. Jest ona nieprzywiedlna.

Jeśli rozważymy reprezentację fundamentalną $so(n, \mathbb{C})$ lub $so(n)$, to reprezentacja na macierzach bezśladowych rozkłada się na sumę prostą dwóch podreprezentacji nieprzywiedlnych: w macierzach symetrycznych bezśladowych i w macierzach antysymetrycznych. Ta druga jest tożsama z reprezentacją dołączoną.

Twierdzenie 6.1 *Niech π_1, π_2 będą skończenie wymiarowymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(1) $\pi_1 \otimes \pi_2$ *zawiera* ι.

(2) $\pi_1 \otimes \pi_2$ *zawiera* ι *jednokrotnie*

(3) $\pi_2 \simeq \pi_1^{\text{ct}}$.

Dowód. $1 \Rightarrow 3$: Niech $\Psi \in \mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2$ będzie niezmienniczym wektorem dla $\pi_1 \otimes \pi_2$.

$$\Psi = \pi_1(g) \otimes \pi_2(g)\, \Psi$$

implikuje

$$J(\Psi) = \pi_1(g) J(\Psi) \pi_2(g)^{\#},$$

czyli

$$J(\Psi) \pi_2(g)^{\#-1} = \pi_1(g) J(\Psi),$$

zatem $J(\Psi)$ splata π_1 i π_2^{ct}. Zatem $\pi_1 \simeq \pi_2^{\text{ct}}$.

$3 \Rightarrow 2$: Z Lematu Schura wynika, że jeśli $\pi_1 \simeq \pi_2^{\text{ct}}$, to przestrzeń splataczy π_1 z π_2^{ct} jest jednowymiarowa. Odwracając rozumowanie $1 \Rightarrow 3$ dostajemy, że przestrzeń wektorów niezmienniczych dla $\pi_1 \otimes \pi_2$ jest jednowymiarowa.

$2 \Rightarrow 1$ jest oczywiste. □

6.4 Istnienie miary Haara i jego konsekwencje

Załóżmy, że $(X, \mathrm{d}x)$ jest przestrzenią z miarą na której działa mierzalnie grupa G przez $(g, x) \mapsto gx$. Mówimy, że działanie zachowuje miarę, jeśli

$$\int f(x) \mathrm{d}x = \int f(gx) \mathrm{d}x.$$

W szczególności, grupa działa na sobie na dwa sposoby: z prawej i z lewej. Mówimy, że miara $\mathrm{d}g$ na G jest lewoniezmiennicza jeśli

$$\int f(g)\mathrm{d}g = \int f(hg)\mathrm{d}g,$$

prawoniezmiennicza jeśli

$$\int f(g)\mathrm{d}g = \int f(gh^{-1})\mathrm{d}g.$$

Twierdzenie 6.2 *Na zwartej grupie istnieje dokładnie jedna miara lewo- i prawoniezmiennicza* $\mathrm{d}g$ *taka, że* $\int\limits_G \mathrm{d}g = 1$.

Miarę tę nazywamy *unormowaną miarą Haara.* W szczególności, na skończonej grupie jest to miara licząca podzielona przez rząd grupy.

Twierdzenie 6.3 *Niech* $(\rho, \mathcal{V})$ *będzie reprezentacją grupy zwartej* G. *Wtedy istnieje iloczyn skalarny taki, że* ρ *jest reprezentacją unitarną*

Dowód. Wybieramy dowolny iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot)_0$ na $\mathcal{V}$ Kładziemy

$$(v|w) := \int (\rho(g)v|\rho(g)w)_0 \mathrm{d}g.$$

□

Wniosek 6.4 *Reprezentacje skończenie wymiarowe grupy zwartej są zawsze całkowicie rozkładalne.*

Twierdzenie 6.5 $\mathfrak{g}$ *jest algebrą Liego grupy Liego zwartej wtedy i tylko wtedy gdy posiada dodatni niezdegenerowany iloczyn skalarny.*

6.5 Reprezentacje nieprzywiedlne

Twierdzenie 6.6 *Każda reprezentacja nieprzywiedlna grupy zwartej jest skończenie wymiarowa.*

Niech G będzie grupą zwartą. Oznaczmy przez $\hat{G}$ zbiór klas równoważności reprezentacji nieprzywiedlnych w przestrzeniach zespolonych. Możemy założyć, że są unitarne. W szczególności, mamy w $\hat{G}$ reprezentację trywialną ι. Dla każdego elementu $\hat{G}$ wybierzemy reprezentanta $(\pi, \mathcal{V}_\pi)$. Wybierzemy również bazę ortonormalną $e_{\pi,1}, \dots, e_{\pi,d_\pi}$, gdzie $d_\pi := \dim \mathcal{V}_\pi$. Możemy wtedy zapisać π jako macierz

$$[\pi_{ij}(g)]_{i,j=1,\dots,d_\pi}, \quad g \in G.$$

Mamy też charaktery nieprzywiedlne

$$\chi_\pi(g) := \sum_{i=1}^{d_\pi} \pi_{ii}(g) = \mathrm{Tr}\pi(g)$$

Dla każdej $\pi \in \hat{G}$ mamy jej reprezentację zespolenie sprzężoną $\overline{\pi}$, która pokrywa się z jej reprezentacją kontragradientną π^{ct}. Oczywiście, $\chi_{\overline{\pi}} = \overline{\chi_\pi}$.

W $L^2(G)$ będziemy używać iloczynu skalarnego

$$(f|f') := \int \overline{f(g)} f'(g)\mathrm{d}g.$$

Niech $L^2_{\mathrm{cent}}(G)$ będzie podprzestrzenią $L^2(G)$ składającą się z funkcji stałych na klasach sprzężoności.

Twierdzenie 6.7 (1) $\sqrt{d_\pi}\pi_{ij}$, $\pi \in \hat{G}$, $i, j = 1, \dots, d_\pi$ *stanowią bazę ortonormalną w* $L^2(G)$.
(2) χ_π *stanowią bazę ortonormalną w* $L^2_{\mathrm{cent}}(G)$.

6.6 Rozkład dowolnej reprezentacji

Niech $(\rho, \mathcal{W})$ będzie reprezentacją grupy G zwartej na przestrzeni wymiaru $d_\rho < \infty$. Jest ona całkowicie rozkładalna, czyli można rozłożyć ją na składniki

$$\rho \simeq \underset{\pi \in \hat{G}}{\oplus} m_\pi \pi. \tag{6.15}$$

Zatem

$$d_\rho = \sum_{\pi \in \hat{G}} m_\pi d_\pi. \tag{6.16}$$

m_π nazywamy *krotnością* π *w* ρ. Jeśli ρ jest reprezentacją unitarną, to można założyć, że suma (6.15) jest ortogonalna.

Mamy rozkład przestrzeni $\mathcal{W}$ na sumę prostą ortogonalną $\mathcal{W} = \underset{\pi \in \hat{G}}{\oplus} \mathcal{W}_\pi$ taki, że $\rho\Big|_{\mathcal{W}_\pi}$ jest równoważna $m_\pi \pi$, oraz rzuty ortogonalne Q_π na $\mathcal{W}_\pi$. Przestrzenie $\mathcal{W}_\pi$ będziemy nazywać przestrzeniami izotypowymi. Oczywiście, $\mathcal{W}_\pi = \mathrm{Ran} Q_\pi$,

$$\sum_{\pi \in \hat{G}} Q_\pi \;\; = \;\; 1\!\!1, \;\; Q_\pi^* = Q_\pi, \;\; Q_\pi Q_{\pi'} = Q_\pi \delta_{\pi\pi'}.$$

Będziemy czasem pisać $Q_\pi(\rho)$, $m_\pi(\rho)$ żeby podkreślić zależność od ρ.

Twierdzenie 6.8 *Dla* $\pi \in \hat{G}$

$$\begin{aligned} m_\pi(\rho) &= \int \overline{\chi_\pi(g)} \chi_\rho(g)\mathrm{d}g & (6.17)\\ &= (\chi_\pi|\chi_\rho), & (6.18)\\ Q_\pi(\rho) &= d_\pi \int \overline{\chi_\pi(g)} \rho(g)\mathrm{d}g. & (6.19) \end{aligned}$$

W szczególności, mamy rzut na wektory stałe

$$Q_\iota(\rho) = \int \rho(g)\mathrm{d}g.$$

Dowód. (6.19) ma praktycznie taki sam dowód jak dla grupy skończonej. Możemy znaleźć bazę ortonormalną w $\mathcal{W}_\pi$ $e_{\pi,i,p}$, $i=1,\dots,d_\pi$, $p=1,\dots,m_\pi$ taką, że

$$\rho(g)e_{\pi,i,p} = \sum_{j=1}^{d_\pi} \pi_{ji}(g)e_{\pi,j,p}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} d_\pi \int \overline{\chi_{\pi'}(g)}\rho(g)e_{\pi,i,p}\mathrm{d}g &= d_\pi \int \sum_{k=1}^{d_{\pi'}} \sum_{j=1}^{d_\pi} \overline{\pi'_{kk}(g)}\pi_{ji}(g)e_{\pi,j,p}\mathrm{d}g \\ &= \delta_{\pi,\pi'} \sum_{k,j=1}^{d_\pi} \delta_{kj}\delta_{ki}e_{\pi,j,p} = \delta_{\pi,\pi'}e_{\pi,i,p}. \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 6.9

$$m_\iota(\rho\otimes\pi) = m_{\overline{\pi}}(\rho) = \int \chi_\pi(g)\chi_\rho(g)\mathrm{d}g, \tag{6.20}$$

$$Q_\iota(\rho\otimes\pi) = \int \rho(g)\otimes\pi(g)\mathrm{d}g, \tag{6.21}$$

$$\mathrm{Tr}_\pi Q_\iota(\rho\otimes\pi) = \frac{1}{d_\pi}Q_{\overline{\pi}}(\rho), \tag{6.22}$$

$$\sum_{\pi\in\hat{G}} d_\pi \mathrm{Tr}_\pi Q_\iota(\rho\otimes\pi) = 1\!\!1_\rho. \tag{6.23}$$

Dowód. (6.20) jest oczywiste.
(6.22) wynika z (6.21):

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_\pi Q_\iota(\rho\otimes\pi) &= \int \rho(g)\chi_\pi(g)\mathrm{d}g \\ &= \int \rho(g)\overline{\chi_{\overline{\pi}}(g)}\mathrm{d}g = \frac{1}{d_\pi}Q_{\overline{\pi}}(\rho). \end{aligned}$$

(6.23) wynika z

$$\sum_{\pi\in\hat{G}} Q_{\overline{\pi}}(\rho) = 1\!\!1_\rho.$$

□

Twierdzenie 6.10 *Załóżmy, że* $\pi,\pi'\in\hat{G}$, $\Phi\in\mathrm{Ran}Q_\iota(\rho\otimes\pi)$ *i* $\Phi'\in\mathrm{Ran}Q_\iota(\rho\otimes\pi')$. *Wtedy*

$$d_\pi\mathrm{Tr}_\rho|\Phi)(\Phi'| = \delta_{\pi,\pi'}(\Phi'|\Phi)1\!\!1_\pi. \tag{6.24}$$

Dowód. Oczywiście,

$$\rho(g)\otimes\pi(g)\Phi=\Phi,\quad \rho(g)\otimes\pi'(g)\Phi'=\Phi'.$$

Zatem,

$$\rho(g)\otimes\pi(g)|\Phi)(\Phi'|\rho(g)^{-1}\otimes\pi'(g)^{-1}=|\Phi)(\Phi'|.$$

Stąd,

$$\pi(g)\mathrm{Tr}_\rho|\Phi)(\Phi'|\pi'(g)^{-1}=\mathrm{Tr}_\rho|\Phi)(\Phi'|.$$

Więc, z Lematu Schura wynika, że

$$\mathrm{Tr}_\rho|\Phi)(\Phi'|=\delta_{\pi,\pi'}c\mathbb{1}_\pi. \tag{6.25}$$

Biorąc ślad (6.25) dostajemy

$$(\Phi'|\Phi)=\delta_{\pi,\pi'}cd_\pi.$$

□

6.7 Rozkład iloczynu tensorowego reprezentacji

Szczególnie ważny jest rozkład iloczynu tensorowego dwóch reprezentacji nieprzywiedlnych. Oczywiście, $\pi\otimes\iota\simeq\pi$, $\pi\otimes\overline{\pi}$ zawiera ι z krotnością 1.

Niech $\pi_1,\pi_2,\pi_3\in\hat{G}$. Mamy wzór

$$\begin{aligned} m_{\overline{\pi}_3}(\pi_1\otimes\pi_2) &= m_\iota(\pi_1\otimes\pi_2\otimes\pi_3)\\ &= \int\chi_{\pi_1}(g)\chi_{\pi_2}(g)\chi_{\pi_3}(g)\mathrm{d}g. \end{aligned}$$

A oto wzór na odpowiednie rzuty:

$$Q_\iota(\pi_1\otimes\pi_2\otimes\pi_3) = \int\pi_1(g)\otimes\pi_2(g)\otimes\pi_3(g)\mathrm{d}g, \tag{6.26}$$

$$Q_{\overline{\pi}_3}(\pi_1\otimes\pi_2) = d_{\pi_3}\mathrm{Tr}_{\pi_3}Q_\iota(\pi_1\otimes\pi_2\otimes\pi_3) \tag{6.27}$$

$$= d_{\pi_3}\int\chi_{\pi_3}(g)\pi_1(g)\otimes\pi_2(g)\mathrm{d}g. \tag{6.28}$$

6.8 Przykład: $\mathbb{Z}_n$

Reprezentacje są numerowane przez $j\in\mathbb{Z}_n$:

$$\mathbb{T}\ni k\mapsto\pi_j(\phi):=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}jk}$$

Mamy $\overline{\pi}_j=\pi_{n-j}$

$$\pi_j\otimes\pi_k\simeq\pi_{j+k}.$$

6.9 Przykład: $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

Reprezentacje są numerowane przez $j \in \mathbb{Z}$:

$$\mathbb{T} \ni \phi \mapsto \pi_j(\phi) := \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} j\phi}$$

Mamy $\overline{\pi}_j = \pi_{-j}$

$$\pi_j \otimes \pi_k \simeq \pi_{j+k}.$$

6.10 Przykład: S_3

S_3 ma reprezentację trywialną, signum i (2-wymiarową) standardową, którą oznaczamy przez π. Oto tablica charakterów:

	ι	sgn	π
id	1	1	2
(12)	1	−1	0
(123)	1	1	−1

Mamy

$$\chi_{\pi\otimes\pi} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \chi_\iota + \chi_{\mathrm{sgn}} + \chi_\pi.$$

7 $SL(2,\mathbb{C})$ i $SU(2)$ i ich reprezentacje

W tym rozdziale będziemy badać zwartą grupę Liego $SU(2)$ i zespoloną grupę Liego $SL(2,\mathbb{C})$. Ich algebry Liego to odpowiednio $su(2)$ i $sl(2,\mathbb{C})$. $sl(2,\mathbb{C})$ jest kompleksyfikacją $su(2)$.

7.1 Algebra wielomianów

Niech $\mathcal{V}$ będzie skończenie wymiarową przestrzenią Hilberta. Niech Θ_s będzie symetryzatorem. Definiujemy

$$\otimes_\mathrm{s}^n \mathcal{V} := \Theta_\mathrm{s}^n \otimes^n \mathcal{V}.$$

Mamy wtedy działanie łączne i przemienne: $\Phi \in \otimes_\mathrm{s}^n \mathcal{V}$, $\Psi \in \otimes_\mathrm{s}^m \mathcal{V}$, przechodzi na

$$\Phi \otimes_\mathrm{s} \Psi := \Theta_s^{n+m} \Phi \otimes \Psi \in \otimes_\mathrm{s}^{n+m} \mathcal{V}.$$

Przykłady:

$$e \otimes_\mathrm{s} \cdots \otimes_\mathrm{s} e = e \otimes \cdots \otimes e, \tag{7.29}$$

$$f \otimes_\mathrm{s} e^{\otimes(n-1)} = \frac{1}{n}\big(f \otimes e^{\otimes(n-1)} + \cdots + e^{\otimes(n-1)} \otimes f\big). \tag{7.30}$$

Jeśli $e_1, \dots e_d$ jest bazą w $\mathcal{V}$, to

$$e_1^{\otimes n_1} \otimes_\mathrm{s} \cdots \otimes_\mathrm{s} e_d^{\otimes n_d}, \quad n_1 + \cdots + n_d = n,$$

jest bazą w $\otimes_\mathrm{s}^n \mathcal{V}$.

Wielomianem d zmiennych jednorodnym stopnia n nazywamy wyrażenie

$$\sum_{n_1+\cdots+n_d=n} t_{n_1,\dots,n_d} y_1^{n_1}\cdots y_1^{n_d}.$$

Wielomiany tworzą algebrę przemienną i łączną oznaczaną czasem $\mathbb{C}[y_1,\dots,y_d]$. Odwzorowanie liniowe $\overset{\infty}{\underset{n=0}{\oplus}} \otimes_{\mathrm{s}}^n \mathcal{V}$ na $\mathbb{C}[y_1\dots,y_d]$, które $e_1^{\otimes n_1}\otimes_{\mathrm{s}}\cdots\otimes_{\mathrm{s}} e_d^{\otimes n_d}$ przekształca na $y_1^{n_1}\cdots y_d^{n_d}$, jest izomorfizmem algebr.

Niech $G\subset U(\mathcal{V})$ będzie grupą Liego i $\mathfrak{g}\in u(\mathcal{V})$ jej agebrą Liego. Wtedy

$$G\ni g\mapsto g\otimes\cdots g\Big|_{\otimes_{\mathrm{s}}\mathcal{V}}, \tag{7.31}$$

$$\mathfrak{g}\ni X\mapsto X\otimes \mathbb{1}^{(n-1)\otimes}+\cdots+\mathbb{1}^{(n-1)\otimes}\otimes X\Big|_{\otimes_{\mathrm{s}}^n\mathcal{V}} \tag{7.32}$$

są ich reprezentacjami na $\otimes_{\mathrm{s}}^n\mathcal{V}$.

Używając bazy $e_1,\dots e_d$, dla $g\in G$, $X\in\mathfrak{g}$, te działania dają się zapisać jako

$$ge_i = e_j g_{ji}, \tag{7.33}$$

$$ge_i^{\otimes n} = \big(e_j g_{ji}\big)^{\otimes n}, \tag{7.34}$$

$$gy_i^n = \big(y_j g_{ji}\big)^n; \tag{7.35}$$

$$Xe_i = e_j X_{ji}, \tag{7.36}$$

$$Xe_i^{\otimes n} = n\big(e_j X_{ji}\big)\otimes_{\mathrm{s}} e_i^{(n-1)\otimes}, \tag{7.37}$$

$$Xy_i^n = n\big(y_j X_{ji}\big)y_i^{n-1}. \tag{7.38}$$

Zatem reprezentacje (7.31) and (7.32) w terminach wielomianów zapisują się

$$gP = P\circ g^{\#}, \tag{7.39}$$

$$XP = X_{ji}y_j\partial_{y_i}P. \tag{7.40}$$

7.2 Reprezentacje $SL(2,\mathbb{C})$, $sl(2,\mathbb{C})$, $SU(2)$, $su(2)$

$SL(2,\mathbb{C})$, $sl(2,\mathbb{C})$, $SU(2)$, $su(2)$ mają reprezentację na $\mathbb{C}^2$, którą nazywamy fundamentalną. $SL(2,\mathbb{C})$ działa w naturalny sposób w $\mathbb{C}^2$. Działa więc również w $\otimes_{\mathrm{s}}^{2l}\mathbb{C}^2$ dla $l=0,\frac{1}{2},1,\dots$.

Oznaczmy bazę kanoniczną w $\mathbb{C}^2$ przez $|\uparrow)$ i $|\downarrow)$. Wprowadźmy bazę w $\otimes_{\mathrm{s}}^{2l}\mathbb{C}^2$

$$v_m := |\uparrow)^{l+m}\otimes_{\mathrm{s}}|\downarrow)^{l-m} \tag{7.41}$$

$$= \frac{(l+m)!(l-m)!}{(2l)!}\sum_{\sigma\in S_{2l}/S_{l+m}\times S_{l-m}}\Theta(\sigma)|\uparrow)^{l+m}\otimes|\downarrow)^{l-m} \tag{7.42}$$

Możemy policzyć kwadrat normy:

$$(v_m|v_m) = \Big(\frac{(l+m)!(l-m)!}{(2l)!}\Big)^2\#\big(S_{2l}/S_{l+m}\times S_{l-m}\big) \tag{7.43}$$

$$= \frac{(l+m)!(l-m)!}{(2l)!}. \tag{7.44}$$

W zapisie wielomianowym v_m odpowiada jednomianowi $x_\uparrow^{l+m} x_\downarrow^{l-m}$.

Można też używać innej bazy:

$$
\begin{aligned}
u_m &:= \sum |j_1) \otimes \cdots \otimes |j_{2l}) && (7.45)\\
&= \sum_{\sigma \in S_{2l}/S_{l+m}\times S_{l-m}} \Theta(\sigma) |\uparrow)^{l+m} \otimes |\downarrow)^{l-m}, && (7.46)
\end{aligned}
$$

gdzie w (7.45) sumujemy po wektorach składających się z $l-m$ czynników $|\downarrow)$ i $l+m$ czynników $|\uparrow)$. Oczywiście,

$$v_m = \frac{(l+m)!(l-m)!}{(2l)!} u_m.$$

$$(u_m|u_m) = \frac{(2l)!}{(l+m)!(l-m)!}.$$

7.3 $sl(2,\mathbb{C})$ i $su(2)$

Niech $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ będą macierzami Pauliego.

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Spełniają one

$$
\begin{aligned}
\sigma_i \sigma_j &= -\mathrm{i}\epsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}\mathbb{1}, && (7.47)\\
(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})\,(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) &= \vec{a}\cdot\vec{b}\,\mathbb{1} - \mathrm{i}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}. && (7.48)
\end{aligned}
$$

Stanowią one bazę algebry $sl(2,\mathbb{C})$ i mają relacje komutacyjne

$$\left[\frac{\mathrm{i}\sigma_i}{2}, \frac{\mathrm{i}\sigma_j}{2}\right] = \epsilon_{ijk}\frac{\mathrm{i}\sigma_k}{2}. \tag{7.49}$$

Będziemy również używać alternatywnej bazy w $sl(2,\mathbb{C})$

$$N = \frac{1}{2}\sigma_3, \quad A_\pm := \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm \mathrm{i}\sigma_2).$$

Mamy

$$A_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_1 = A_+ + A_-, \quad \sigma_2 = -\mathrm{i}A_+ + \mathrm{i}A_-,$$

$$[N, A_\pm] = \pm A_\pm, \quad [A_+, A_-] = 2N.$$

Na $sl(2,\mathbb{C})$ mamy iloczyn skalarny śladowy $\mathrm{Tr}XY$, $X, Y \in sl(2,\mathbb{C})$. Możemy go też ograniczyć do rzeczywistej podprzestrzeni macierzy hermitowskich bezśladowych $\mathrm{i}su(2,\mathbb{C})$, wtedy jest dodatnio określony. Alternatywnie, ten iloczyn skalarny możemy dostać z wyznacznika, mamy bowiem tożsamość

$$\det X = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}X^2, \quad X \in sl(2,\mathbb{C}).$$

$\mathrm{i}\sigma_1, \mathrm{i}\sigma_2, \mathrm{i}\sigma_3$ stanowią bazę ortonormalną algebry Liego $su(2)$.

7.4 $so(3,\mathbb{C})$ i $SO(3,\mathbb{C})$

Pamiętamy, że $A \in SL(2,\mathbb{C})$ możemy przyporządkować

$$\rho_A X := AXA^{-1}, \quad X \in sl(2,\mathbb{C})$$

Zachowuje iloczyn skalarny. Utożsamiając $sl(2,\mathbb{C})$ z $\mathbb{C}^3$ dostajemy homomorfizm $SL(2,\mathbb{C})$ na $SO(3,\mathbb{C})$ z jądrem $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$.

Biorąc $A \in SU(2)$ i ograniczając się do $X \in \mathrm{i}su(2)$, dostajemy homomorfizm $SU(2)$ na $SO(3)$ z takim samym jądrem.

Mamy też infinitezymalne wersje tych homomorfizmów zadane przez

$$\rho_A X := [A, X].$$

Zadają one izomorfizm $sl(2,\mathbb{C})$ na $so(3,\mathbb{C})$ oraz $su(2)$ na $so(3)$.

Bazę w $so(3)$ stanowią

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oczywiście,

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k,$$
$$\rho_{\mathrm{i}\sigma_i/2} = L_i, \quad i = 1,2,3.$$

7.5 Skończenie wymiarowe reprezentacje $sl(2,\mathbb{C})$

Rozważmy reprezentację $\pi : sl(2,\mathbb{C}) \to gl(\mathcal{V})$. Wprowadźmy operator Casimira

$$\begin{aligned} C &:= \frac{1}{4}\Big(\pi(\sigma_1)^2 + \pi(\sigma_2)^2 + \pi(\sigma_3)^2\Big) = \pi(N)^2 + \frac{1}{2}\Big(\pi(A_+)\pi(A_-) + \pi(A_-)\pi(A_+)\Big) \\ &= \pi(N)^2 - \pi(N) + \pi(A_+)\pi(A_-) = \pi(N)^2 + \pi(N) + \pi(A_-)\pi(A_+). \end{aligned}$$

Sprawdzamy, że C komutuje z $\pi\big(sl(2,\mathbb{C})\big)$. Zatem przestrzenie własne operatora C są niezmiennicze dla $\pi\big(sl(2,\mathbb{C})\big)$.

Będziemy pomijać π.

Twierdzenie 7.1 (1) *Dla każdego $n = 1, 2, \ldots$ istnieje jedyna, z dokładnością do równoważności, reprezentacja nieprzywiedlna $sl(2,\mathbb{C})$ w $\mathbb{C}^n$. Nazywamy ją* reprezentacją o spinie l, *gdzie $n = 2l + 1$. Ma ona następujące własności:*

(i) $\mathrm{spec} N = \{-l, -l+1 \cdots, l-1, l\}$.

(ii) $C = l(l+1)$.

(iii) *Istnieje baza $\{v_{-l}, \ldots, v_l\}$ taka, że*

$$\begin{aligned} N v_m &= m v_m, \\ A_- v_m &= (l+m) v_{m-1}, \\ A_+ v_m &= (l-m) v_{m+1}. \end{aligned} \tag{7.50}$$

(2) *Reprezentacja $sl(2,\mathbb{C})$ w przestrzeni $\mathcal{V}$ jest ona równoważna reprezentacji o spinie l wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z poniższych warunków:*

   (i) *Istnieje w $\mathcal{V}$ wektor cykliczny v_+ taki, że $A_+v_+ = 0$ i $Nv_+ = lv_+$. (Wektor ten nazywamy* wektorem najwyższej wagi*).*

   (ii) *Istnieje w $\mathcal{V}$ wektor cykliczny v_- taki, że $A_-v_- = 0$ i $Nv_- = -lv_-$. (Wektor ten nazywamy* wektorem najniższej wagi*).*

   (iii) *Reprezentacja jest nieprzywiedlna i* $\max \mathrm{spec} N = l$.

   (iv) *Reprezentacja jest nieprzywiedlna i* $\min \mathrm{spec} N = -l$.

Dowód. Reprezentację o spinie l można zrealizować w przestrzeni wielomianów rozpiętych przez $v_m := z_+^{l+m} z_-^{l-m}$, $m = -l, \ldots, l$. Zadana jest przez operatory

$$\begin{aligned} N &:= \frac{1}{2}(z_+\partial_{z_+} - z_-\partial_{z_-}), \\ A_- &:= z_-\partial_{z_+}, \\ A_+ &:= z_+\partial_{z_-}. \end{aligned}$$

Sprawdzamy, że dostajemy wtedy reprezentację (7.50).

Pokażmy, że jest ona nieprzywiedlna. Niech $\mathcal{V}_0$ będzie podprzestrzenią niezmienniczą. Niech $x = \sum\limits_{m=-l}^{l} x_m v_m \in \mathcal{V}_0$. Operator N zachowuje $\mathcal{V}_0$. Zatem $\prod\limits_{m\neq n}(N-m)x = cx_nv_n \in \mathcal{V}_0$, gdzie $c \neq 0$. Zatem jeśli $x_n \neq 0$, to $v_n \in \mathcal{V}_0$. Ale wtedy, działając A^+ i A^- dostajemy wszystkie v_m

Załóżmy teraz, że $sl(2,\mathbb{C})$ działa nieprzywiedlnie w skończenie wymiarowej przestrzeni $\mathcal{V}$. Pokażmy najpierw, że jeśli $\lambda \in \mathrm{spec}N$, to $\mathrm{spec}N \subset \lambda + \mathbb{Z}$. W istocie, N posiada wektor własny $v \in \mathcal{V}$:

$$Nv = \lambda v.$$

Ponieważ $\mathcal{V}$ jest nieprzywiedlna, dowolny wektor w $\mathcal{V}$ jest liniową kombinacją $A_1 \cdots A_n v$, gdzie $A_i = A_\pm$ lub $A_i = N$. Poza tym,

$$NA_+v = (\lambda+1)A_+v, \qquad NA_-v = (\lambda-1)A_-v.$$

Korzystając, z tego, że $\mathcal{V}$ jest skończenie wymiarowa, dostajemy $\lambda_\pm$ takie, że $\lambda_- = \min \mathrm{spec}N$, $\lambda_+ = \max \mathrm{spec}N$. Niech $Nv_\pm = \lambda_\pm v_\pm$, $v_\pm \neq 0$. Mamy $\lambda_+ - \lambda_- \in \mathbb{Z}$ i $A_\pm v_\pm = 0$. Mamy

$$\begin{aligned} Cv_+ &= \left(N^2 + N\right) v_+ = (\lambda_+^2 + \lambda_+)v_+, \\ Cv_- &= \left(N^2 - N\right) v_- = (\lambda_-^2 - \lambda_-)v_-. \end{aligned}$$

Ponieważ reprezentacja jest nieprzywiedlna, C jest liczbą. Równanie

$$\lambda_+^2 + \lambda_+ = \lambda_-^2 - \lambda_-$$

ma dwa rozwiązania: $\lambda_+ = \lambda_- - 1$, które odrzucamy, bo wtedy $\lambda_+ < \lambda_-$, i $\lambda_- = -\lambda_+$. Kładziemy $l := \lambda_+$. Oczywiście, $2l = \lambda_+ - \lambda_- \in \mathbb{Z}$. Rozważmy $\mathrm{Span}(A_-^j v_+,\ j = 0, \ldots, 2l\}$. Korzystając z relacji komutacyjnych sprawdzamy, że jest to niezmiennicza przestrzeń dla $sl(2,\mathbb{C})$. Zatem jest ona równa $\mathcal{V}$. Poza tym, $A_-^{2l}v_+$ jest proporcjonalny do v_-. Kładziemy

$$v_m := \frac{(l+m)!}{(2l)!}A_-^{l-m}v_+.$$

Oczywiście, $A_-v_m = (l+m)v_{m-1}$ i $Nv_m = mv_m$. Poza tym,

$$\begin{aligned} l(l+1)A_-^{l-m-1}v_+ &= \left(N^2 - N + A_+A_-\right)A_-^{l-m-1}v_+ \\ &= m(m+1)A_-^{l-m-1}v_+ + A_+A_-^{l-m}v_+. \end{aligned}$$

Stąd

$$A_+A_-^{l-m}v_+ = (l-m)(l+m+1)A_-^{l-m-1}v_+.$$

Zatem $A_+v_m = (l-m)A_{m+1}$. To dowodzi jedyności w punkcie (1). □

Alternatywną naturalną bazą dla reprezentacji $sl(2,\mathbb{C})$ jest

$$u_m := \frac{(2l)!}{(l-m)!(l+m)!}v_m = \frac{A_-^{l-m}v_+}{(l-m)!}.$$

Dostajemy wtedy

$$\begin{aligned} Nu_m &= mu_m, \\ A_-u_m &= (l-m+1)u_{m-1}, \\ A_+u_m &= (l+m+1)u_{m+1}. \end{aligned}$$

7.6 Reprezentacje unitarne $su(2)$

Twierdzenie 7.2 *Każda nieprzywiedlna reprezentacja infinitezymalnie unitarna $su(2)$ jest skończenie wymiarowa. Jest ona obcięciem reprezentacji opisanych w poprzednim twierdzeniu. Bazę unitarną dostajemy kładąc*

$$|l,m) = \frac{\sqrt{(2l)!}}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!}}v_m = \frac{\sqrt{(l-m)!(l+m)!}}{\sqrt{(2l)!}}u_m.$$

Mamy wtedy

$$\begin{aligned} N|l,m) &= m|l,m), \\ A_-|l,m) &= \sqrt{(l+m)(l-m+1)}|l,m-1), \\ A_+|l,m) &= \sqrt{(l+m+1)(l-m)}|l,m+1). \end{aligned} \tag{7.51}$$

Dowód. Rozważmy infinitezymalnie unitarną reprezentację nieprzywiedlną $su(2)$. (Nie zakładamy skończonego wymiaru przestrzeni). Operatory $\mathrm{i}\sigma_i$ muszą być antysamosprzężone, czyli N musi być samosprzężony, a $A_+ = A_-^*$. Operator Casimira jest dodatni. Ponieważ $A_+A_- \geq 0$, więc $N^2 - N$ jest ograniczone. To pokazuje, że spec$N$ musi być ograniczone. Zatem Ker$A_+ \neq \{0\}$. Z nieprzywiedlności, operator Casimira jest liczbą. Dlatego na KerA_+ mamy $C = N^2 - N$. N

zachowuje KerA_+. Spektrum N na KerA_+ jest najwyżej dwuelementowe. Zatem można zdiagonalizować N. Zatem dostajemy te same przypadki, które były rozważane w Tw. 4.

Baza opisana w tym twierdzeniu jest ortogonalna, ale nie ortonormalna. Mamy relację

$$\begin{aligned}(A_-^{l-m}v_+|A_-^{l-m}v_+) &= (A_-^{l-m-1}v_+|A_+A_-A_-^{l-m-1}v_+)\\ &= (l-m)(l+m+1)(A_-^{l-m-1}v_+|A_-^{l-m-1}v_+).\end{aligned}$$

Stąd dostajemy

$$\begin{aligned}(A_-^{l-m}v_+|A_-^{l-m}v_+) &= (l-m)\cdots 1(l+m+1)\cdots 2l(v_+|v_+)\\ &= \frac{(l-m)!(2l)!}{(l+m)!}(v_+|v_+).\end{aligned} \tag{7.52}$$

Stąd, żeby dostać bazę ortonormalną, kładziemy

$$|l,m) := \frac{\sqrt{(l+m)!}}{\sqrt{(l-m)!(2l)!}}A_-^{l-m}v_+. \tag{7.53}$$

□

7.7 Reprezentacje $SL(2,\mathbb{C})$ i $SU(2)$

Twierdzenie 7.3 *Dla każdego $n = 2l+1 = 1,2,\dots$ istnieje jedyna, z dokładnością do równoważności, ciągła reprezentacja nieprzywiedlna $SL(2,\mathbb{C})$ w $\mathbb{C}^n$. Odpowiada ona reprezentacji $sl(2,\mathbb{C})$ omawianej powyżej. Dla $l \in \mathbb{Z}$ zadaje ona reprezentację $SO(3,\mathbb{C})$.*

Dowód. Istnienie: Oznaczmy bazę w $\mathbb{C}^2$ przez $|\uparrow)$ i $|\downarrow)$. $SL(2,\mathbb{C})$ działa w naturalny sposób w $\mathbb{C}^2$. Działa więc również w $\otimes_{\mathrm{s}}^{2l}\mathbb{C}^2$.

Wprowadźmy bazę w $\otimes_{\mathrm{s}}^{2l}\mathbb{C}^2$

$$v_m = \sum |j_1)\otimes\cdots\otimes|j_{2l}),$$

gdzie sumujemy po wektorach składających się z $l-m$ czynników $|\downarrow)$ i $l+m$ czynników $|\uparrow)$. Latwo sprawdzamy, że dostajemy reprezentację $SL(2,\mathbb{C})$ i że jest ona nieprzywiedlna.

Jednoznaczność: Jeśli mamy ciągłą nieprzywiedlną reprezentację $SL(2,\mathbb{C})$ w $\mathbb{C}^n$, to generuje ona nieprzywiedlną reprezentację $sl(2,\mathbb{C})$ w $\mathbb{C}^n$. Takie reprezentacje już zbadaliśmy. □

Twierdzenie 7.4 *Dla każdego $n = 2l+1 = 1,2,\dots$ istnieje jedyna, z dokładnością do równoważności, ciągła unitarna reprezentacja nieprzywiedlna $SU(2)$ w $\mathbb{C}^n$. Odpowiada ona reprezentacji $su(2)$ omawianej powyżej. Dla $l \in \mathbb{Z}$ zadaje ona reprezentację $SO(3)$.*

Dowód. Powtażamy te same argumenty. Możemy jeszcze zauważyć, że jeśli $SU(2)$ działa na $\mathbb{C}^2$ unitarnie, to na $\otimes_{\mathrm{s}}^{2l}\mathbb{C}^2$ też. □

Mamy $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi N} = (-1)^{2l}$. Dlatego dla $l \in \mathbb{Z}$ reprezentacje $SU(2)$ odpowiadają reprezentacjom $SO(3)$.

7.8 $SL(2,\mathbb{C})$ jako sfera zespolona

Niech

$$(a_0, \vec{a}) \in \mathbb{C}^4, \quad A = a_0 1\!\!1 + \mathrm{i}\vec{a}\vec{\sigma}. \tag{7.54}$$

Wtedy

$$\det A = a_0^2 + (\vec{a})^2.$$

Zatem $SL(2,\mathbb{C})$ jest 3-wymiarową sferą zespoloną w $\mathbb{C}^4$:

$$SL(2,\mathbb{C}) = \left\{a_0 1\!\!1 + \mathrm{i}\vec{a}\vec{\sigma} \ : \ a_0^2 + \vec{a}^2 = 1\right\}. \tag{7.55}$$

Odwzorowanie eksponencjalne przekształca $sl(2,\mathbb{C})$ na $SL(2,\mathbb{C})$. W rzeczy samej, używając (7.48) dostajemy

$$\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\vec{\theta}\vec{\sigma}} = \cos\frac{\theta}{2} 1\!\!1 + \frac{\mathrm{i}\vec{\theta}\vec{\sigma}}{\theta}\sin\frac{\theta}{2}, \quad \vec{\theta} \in \mathbb{C}^3,$$

gdzie $\theta = \sqrt{\vec{\theta}^2}$. W szczególności, jeśli $\frac{\theta}{2} = \pi$, to dostajemy $-1\!\!1$.

7.9 $SU(2)$ jako sfera rzeczywista

Mamy $A^* = \overline{a}_0 - \mathrm{i}\vec{a}\vec{\sigma}$. Liczymy:

$$AA^* = |a_0|^2 + |\vec{a}|^2 + \mathrm{i}(\overline{a}_0\vec{a} - a_0\overline{\vec{a}}) \cdot \vec{\sigma}. \tag{7.56}$$

Zatem $AA^* = 1\!\!1$ jest równoważne

$$|a_0|^2 + |\vec{a}|^2 = 1, \quad \overline{a}_0\vec{a} - a_0\overline{\vec{a}} = 0. \tag{7.57}$$

Drugi warunek implikuje

$$a_0 = \alpha\overline{a}, \quad \vec{a} = \alpha\overline{\vec{a}} \tag{7.58}$$

dla pewnego $\alpha \in \mathbb{C}$. Jeśli $A \in SU(2)$, to

$$1 = \det A = a_0^2 + \vec{a}^2 = \alpha(|a_0|^2 + |\vec{a}|^2) = \alpha. \tag{7.59}$$

Zatem $(a_0, \vec{a}) \in \mathbb{R}^4$. Czyli $SU(2)$ jest 3-wymiarową sferą rzeczywistą:

$$SU(2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix} \ : \ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\} \tag{7.60}$$

$$= \{a_0 1\!\!1 + \mathrm{i}\vec{a}\vec{\sigma} \ : \ a_0^2 + \vec{a}^2 = 1\}. \tag{7.61}$$

A oto alternatywne wyprowadzenie tego, że $SU(2)$ jest 3-wymiarową sferą rzeczywistą. Niech $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ będzie macierzą w $SU(2)$. Wtedy

$$\begin{aligned} |a|^2 + |b|^2 &= 1, & |c|^2 + |d|^2 &= 1, \\ a\overline{c} + b\overline{d} &= 0, & c\overline{a} + d\overline{b} &= 0, \\ ad - bc &= 1. \end{aligned}$$

Wyliczamy c z (7.62) i wstawiamy do (7.62) dostając

$$d(|a|^2 + |b|^2) = \overline{a}.$$

Stąd wynika, że

$$c = -\overline{b}, \quad d = \overline{a}, \quad |a|^2 + |b^2| = 1.$$

Czyli $SU(2)$ jest sferą 3-wymiarową.

Odwzorowanie eksponencjalne przekształca również $su(2)$ na $SU(2)$. $SU(2)\backslash\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$ jest sparametryzowana przez $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^3$, $|\vec{\theta}| \in]0, 2\pi[$.

7.10 Kąty Eulera

Wyjmijmy z $SU(2)$ $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$, odpowiadające $a = \pm 1$, $b = 0$. Wtedy można napisać

$$a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \cos\frac{\beta}{2}, \quad b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} \sin\frac{\beta}{2}, \quad \beta \in]0, 2\pi[, \ \phi \in [0, \pi[, \ \psi \in [0, 2\pi[.$$

(Zauważmy, że dla $\beta \in]0, 2\pi[$, $\cos\frac{\beta}{2}$ przyjmuje oba znaki, ale $\sin\frac{\beta}{2}$ jest zawsze dodatni). Połóżmy $\alpha = \phi + \psi$, $\gamma = \phi - \psi$. Dostajemy wtedy parametryzację przy pomocy kątów Eulera

$$a = \cos\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha+\gamma)}, \quad b = \sin\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha-\gamma)}, \ \beta \in]0, 2\pi[, \quad \alpha, \gamma \in [0, 2\pi[.$$

Czasami stosuje się inny zasięg kątów: $\beta \in]0, \pi]$, $\alpha \in [0, 4\pi[$, $\gamma \in [0, 2\pi[$. Gdy stosujemy kąty Eulera do parametryzacji $SO(3)$ używamy zasięgu $\beta \in]0, \pi]$, $\alpha, \gamma \in [0, 2\pi[$.

Element $SU(2)$ odpowiadający α, β, γ oznaczamy przez

$$\begin{aligned}
D(\alpha, \beta, \gamma) &:= \begin{bmatrix} \cos\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha+\gamma)} & \sin\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha-\gamma)} \\ -\sin\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(-\alpha+\gamma)} & \cos\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(-\alpha-\gamma)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\alpha} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & \sin\frac{\beta}{2} \\ -\sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma} \end{bmatrix} \\
&= D(\alpha, 0, 0)D(0, \beta, 0)D(0, 0, \gamma).
\end{aligned}$$

Stwierdzenie 7.5 *Oto wzór, które pozwala wyrazić θ w kątach Eulera:*

$$\cos\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\theta}{2}\mathbb{1} + \frac{\mathrm{i}\vec{\theta}\vec{\sigma}}{\theta}\sin\frac{\theta}{2} &= \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\vec{\theta}\vec{\sigma}} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\alpha\sigma_3}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\beta\sigma_1}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma\sigma_3} \\
&= \Big(\cos\frac{\alpha}{2}\mathbb{1} + \mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2}\sigma_3\Big)\Big(\cos\frac{\beta}{2}\mathbb{1} + \mathrm{i}\sin\frac{\beta}{2}\sigma_1\Big)\Big(\cos\frac{\gamma}{2}\mathbb{1} + \mathrm{i}\sin\frac{\gamma}{2}\sigma_3\Big).
\end{aligned}$$

Przykładamy ślad do obu stron:

$$2\cos\frac{\theta}{2} = 2\cos\frac{\theta}{2}\Big(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\Big).$$

□

7.11 D-macierze Wignera

Niech $D^j(\alpha,\beta,\gamma)$ oznacza operator $D(\alpha,\beta,\gamma)$ w reprezentacji o spinie j:

$$D^j(\alpha,\beta,\gamma) \quad = \quad D^j(\alpha,0,0)D^j(0,\beta,0)D^j(0,0,\gamma).$$

Macierz $D^j(\alpha,\beta,\gamma)$ w bazie $|jm)$ nazywamy *D^j-macierzą Wignera.*

Macierz $D^j(\alpha,0,0) = D^j(0,0,\alpha)$ jest macierzą diagonalną, która na m-tym miejscu ma $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha m}$. Bardziej skomplikowana jest tzw. d^j-macierz Wignera

$$d^j(\beta) = D^j(0,\beta,0).$$

Wyrazimy ją najpierw w ortogonalnej ale nieortonormalnej bazie $v^j_m = z_+^{j+m} z_-^{j-m}$:

$$\begin{aligned}
d^j(\beta) z_+^{j+m} z_-^{j-m} &= \Big(z_+ \cos\frac{\beta}{2} - z_- \sin\frac{\beta}{2}\Big)^{j+m}\Big(z_+ \sin\frac{\beta}{2} + z_- \cos\frac{\beta}{2}\Big)^{j-m} \\
&= \sum_{p=0}^{j+m} \frac{(j+m)!}{(j+m-p)!p!} z_+^{j+m-p}\Big(\cos\frac{\beta}{2}\Big)^{j+m-p} z_-^p \Big(-\sin\frac{\beta}{2}\Big)^p \\
&\quad \times \sum_{q=0}^{j-m} \frac{(j-m)!}{(j-m-q)!q!} z_+^q \Big(\sin\frac{\beta}{2}\Big)^q z_-^{j-m-q}\Big(\cos\frac{\beta}{2}\Big)^{j-m-q} \\
&= \sum_{m'} \tilde{d}^j_{m'm}(\beta) z_+^{j+m'} z_-^{j-m'},
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\tilde{d}^j_{m'm}(\beta) &:= \sum_p \frac{(j+m)!(j-m)!}{p!(m'-m+p)!(j+m-p)!(j-m'-p)!} \\
&\quad \times(-1)^{m'-m-p}\Big(\cos\frac{\beta}{2}\Big)^{2j+m-m'+p}\Big(\sin\frac{\beta}{2}\Big)^{2j-m+m'-p},
\end{aligned}$$

i sumujemy po tych wskaźnikach, dla których argumenty silni w mianowniku są nieujemne. Zamieniając bazę v^j_m na ortonormalną bazę $|j,m)$

$$d^j_{m'm}(\beta) = \tilde{d}^j_{m'm}(\beta)\frac{\sqrt{(j+m')!}\sqrt{(j-m')!}}{\sqrt{(j+m)!}\sqrt{(j-m)!}}$$

dostajemy ostatecznie

$$\begin{aligned}
d^j_{m'm}(\beta) &:= \sum_p \frac{\sqrt{(j+m)!}\sqrt{(j-m)!}\sqrt{(j+m')!}\sqrt{(j-m')!}}{p!(m'-m+p)!(j+m-p)!(j-m'-p)!} \\
&\quad \times(-1)^{m'-m-p}\Big(\cos\frac{\beta}{2}\Big)^{2j+m-m'+p}\Big(\sin\frac{\beta}{2}\Big)^{2j-m+m'-p}.
\end{aligned}$$

Możemy wyrazić d-macierze Wignera przez wielomiany Jacobiego:

$$\begin{aligned}
& d^j_{m'm}(\beta) \\
= \ & (-1)^{m'-m}\frac{\sqrt{(j+m)!}\sqrt{(j-m)!}}{\sqrt{(j+m')!}\sqrt{(j-m')!}}\Big(\sin\frac{\beta}{2}\Big)^{-m+m'}\Big(\cos\frac{\beta}{2}\Big)^{-m-m'}P_{j+m}^{-m+m',-m-m'}(\cos\beta) \\
= \ & \frac{\sqrt{(j+m)!}\sqrt{(j-m)!}}{\sqrt{(j+m')!}\sqrt{(j-m')!}}\Big(\sin\frac{\beta}{2}\Big)^{m-m'}\Big(\cos\frac{\beta}{2}\Big)^{m+m'}P_{j-m}^{m-m',m+m'}(\cos\beta) \\
= \ & \frac{\sqrt{(j+m')!}\sqrt{(j-m')!}}{\sqrt{(j+m)!}\sqrt{(j-m)!}}\Big(\sin\frac{\beta}{2}\Big)^{m-m'}\Big(\cos\frac{\beta}{2}\Big)^{-m-m'}P_{j+m'}^{m-m',-m-m'}(\cos\beta) \\
= \ & (-1)^{m'-m}\frac{\sqrt{(j+m')!}\sqrt{(j-m')!}}{\sqrt{(j+m)!}\sqrt{(j-m)!}}\Big(\sin\frac{\beta}{2}\Big)^{-m+m'}\Big(\cos\frac{\beta}{2}\Big)^{m+m'}P_{j-m'}^{-m+m',m+m'}(\cos\beta).
\end{aligned}$$

Zauważmy, że we wszystkich przypadkach wielomiany Jacobiego są postaci $P_n^{\alpha,\beta}$, gdzie

$$2n+\alpha+\beta+1 = 2j+1.$$

Jeśli podstawimy $m, 0$ zamiast m', m, dostajemy zwykłe harmoniki sferyczne:

$$d^j_{m0}(\beta) = (-1)^m\frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}{j!}\Big(\frac{\sin\beta}{2}\Big)^m P_{j-m}^{m,m}(\cos\beta), \tag{7.62}$$

$$= \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}{j!}\Big(\frac{\sin\beta}{2}\Big)^{-m} P_{j+m}^{-m,-m}(\cos\beta), \tag{7.63}$$

$$Y_{jm}(\cos\beta,\alpha) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\alpha}d^j_{m0}(\beta). \tag{7.64}$$

7.12 Typ reprezentacji grupy $SL(2,\mathbb{C})$

Niech

$$\epsilon := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mamy $\epsilon^2 = -\mathbb{1}$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Zatem jeśli $X \in SL(2,\mathbb{C})$, to

$$\epsilon X\epsilon^{-1} = X^{\#(-1)},$$

zaś jeśli $A \in sl(2,\mathbb{C})$, to

$$\epsilon A\epsilon^{-1} = -A^{\#},$$

Czyli reprezentacja fundamentalna $SL(2,\mathbb{C})$ jest równoważna swojej reprezentacji kontragradientnej. Zatem reprezentacja fundamentalna $SU(2)$ jest równoważna swojej zespolenie sprzężonej. Operator realizujący tę równoważność ma kwadrat $-\mathbb{1}$. Czyli reprezentacja fundamentalna $SU(2)$ jest typu kwaternionowego.

Łatwo sprawdzić, że reprezentacje o spinie całkowitym są typu rzeczywistego, a o spinie połówkowym, typu kwaternionowego.

7.13 Miara Haara na $SU(2)$

$SU(2)$ jest 3-wymiarową sferą. Miara Haara jest standardową unormowaną miarą niezmienniczą na tej sferze. Jeśli używamy parametryzacji $\vec{\theta} = \theta\Omega \in \mathbb{R}^3$, $\theta \in]0, 2\pi[$, $\Omega \in \mathbb{S}^2$ to jest ona równa

$$\frac{1}{\pi}\sin^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi},$$

gdzie $\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}$ jest unormowaną miarą na sferze 2-wymiarowej

Jeśli używamy kątów Eulera $\alpha, \gamma \in [0, 2\pi[$, $\beta \in]0, 2\pi[$, to jest ona równa

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\gamma}{2\pi}\frac{|\sin\beta|\mathrm{d}\beta}{4}.$$

Aby to zobaczyć, wystarczy policzyć wektory styczne

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha &= \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} & \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} \\ \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(-\alpha+\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} & -\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(-\alpha-\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} \end{bmatrix}, \\
\partial_\gamma &= \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} & -\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} \\ -\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(-\alpha+\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} & -\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(-\alpha-\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} \end{bmatrix}, \\
\partial_\beta &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha+\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} & \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha-\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} \\ -\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(-\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} & -\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(-\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Następnie liczymy wyznacznik macierzy Gramma

$$\det\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \cos\beta & 0 \\ \cos\beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\sin^2\beta.$$

dostając miarę $\frac{\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\gamma|\sin\beta|\mathrm{d}\beta}{2\sqrt{2}}$, którą następnie normujemy.

7.14 Charaktery reprezentacji $SU(2)$

Jeśli używamy parametryzacji $SU(2)$ poprzez odwzorowanie eksponencjalne

$$\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\vec{\theta}\vec{\sigma}} = \cos\frac{\theta}{2}\mathbb{1} + \frac{\mathrm{i}\vec{\theta}\vec{\sigma}}{\theta}\sin\frac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta = |\vec{\theta}| \leq 2\pi,$$

to klasy sprzężoności elementów $SU(2)$ są parametryzowane przez θ. Jeśli bowiem $\vec{\theta}_1$ ma tę samą długość co $\vec{\theta}$, to znajdziemy $\vec{\mu}$ ortogonalny do $\vec{\theta}$ taki, że

$$\vec{\theta}_1 = \cos\mu\vec{\theta} + \theta\frac{\sin\mu}{\mu}\vec{\mu}.$$

Mamy wtedy

$$\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\vec{\mu}\vec{\sigma}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\vec{\theta}\vec{\sigma}}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\vec{\mu}\vec{\sigma}} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\cos\mu\vec{\theta}+\theta\frac{\sin\mu}{\mu}\vec{\mu})\cdot\vec{\sigma}}. \tag{7.65}$$

$N = \frac{\sigma_3}{2}$ ma w l-tej reprezentacji wartości własne $-l$, $-l+1$,... l. Dlatego $\frac{|\vec{\theta}|}{2}\sigma_3$ ma w l-tej reprezentacji wartości własne $-l\theta$, $(-l+1)\theta$,... $l\theta$. $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\vec{\theta}\vec{\sigma}}$ jest sprzężone do $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\theta\sigma_3}$. Zatem charakter $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\vec{\theta}\vec{\sigma}}$ dla reprezentacji o spinie l jest równy

$$\chi_l(\theta) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-l+1)\theta} + \cdots + \mathrm{e}^{\mathrm{i}l\theta} = \frac{\sin\left((2l+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Rozważmy iloczyn tensorowy reprezentacji o spinie j_1 i j_2. Jej charakter jest równy

$$\begin{aligned} \chi_{j_1}(\theta)\chi_{j_2}(\theta) &= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m_1+m_2)\theta} \\ = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}\sum_{M=-J}^{J} \mathrm{e}^{\mathrm{i}M\theta} &= \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \chi_J(\theta). \end{aligned}$$

Dlatego też mamy rozkład reprezentacji,

$$j_1 \otimes j_2 = \bigoplus_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} J.$$

7.15 Współczynniki Clebscha-Gordana

Jak pamiętamy, w przestrzeni dla reprezentacji j mamy bazę ortonormalną

$$|j,m), \quad -j \le m \le j.$$

W przestrzeni reprezentacji $j_1 \otimes j_2$ mamy bazę o.n.

$$|j_1 m_1) \otimes |j_2 m_2) =: |j_1, m_1, j_2, m_2), \quad -j_1 \le m_1 \le j_1, \quad -j_2 \le m_2 \le j_2.$$

Przestrzeń ta rozkłada się na podprzestrzenie o spinie $|j_1 - j_2| \le J \le j_1 + j_2$. W każdej z nich mamy bazę o.n.

$$|j_1 j_2 JM), \quad -J \le M \le J,$$

ze standardowym działaniem $su(2)$. Mamy rozkład

$$|j_1 j_2 JM) = \sum_{m_1+m_2=M} |j_1 m_1 j_2 m_2)(j_1 m_1 j_2 m_2|JM).$$

Wzór ten definiuje współczynniki $(j_1 m_1 j_2 m_2|JM)$ jednoznacznie z wyjątkiem czynnika fazowego, niezależnego dla każdej trójki j_1, j_2, J. Aby go ustalić żądamy aby

$$(j_1 j_1 j_2 J{-}j_1|JJ) > 0.$$

(Zauważmy, że $|J - j_1| \le j_2$).

$$(j_1 m_1 j_2 m_2|JM) = (JM|j_1 m_1 j_2 m_2)$$

nazywają się *współczynnikami Clebscha-Gordana*. Jak pamiętamy, $Q_J(j_1 \otimes j_2)$ oznacza rzut izotypowy w reprezentacji $j_1 \otimes j_2$ na podreprezentację J (która ma tu krotność 1). Mamy

$$\begin{aligned} Q_J(j_1 \otimes j_2) &= \sum_M |j_1 j_2 J M)(j_1 j_2 J M| \\ &= \sum_{M=m_1+m_2=m_1'+m_2'} |j_1 m_1 j_2 m_2)\big(j_1 m_1 j_2 m_2 | J M\big) \\ &\qquad \times \big(J M | j_1 m_1' j_2 m_2'\big)(j_1 m_1' j_2 m_2'|. \end{aligned}$$

Oto wzór rekurencyjny:

$$\begin{aligned} &\sqrt{(J \mp M)(J \pm M + 1)}(j_1 m_1 j_2 m_2 | J M \pm 1) \\ = &\sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)}(j_1 m_1 \mp 1 j_2 m_2 | J M) \\ &+ \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)}(j_1 m_1 j_2 m_2 \mp 1 | J M). \end{aligned}$$

7.16 $3j$-symbole

Przestrzeń reprezentacji $j_1 \otimes j_2 \otimes j_3$ ma bazę

$$|j_1 m_1) \otimes |j_2 m_2) \otimes |j_3 m_3) =: |j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3).$$

Podprzestrzeń niezmiennicza w tej przestrzeni jest najwyżej jednowymiarowa. Jeśli

$$|j_1 j_2 j_3 0) = \sum_{m_1+m_2+m_3=0} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} |j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3)$$

jest takim unormowanym wektorem, to współczynniki $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ są zdefiniowane jednoznacznie z dokładnością do czynnika fazowego. Aby go ustalić żądamy

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_1 & -j_2 & -j_1 + j_2 \end{pmatrix} > 0.$$

Tak zdefiniowane współczynniki nazywają się *$3j$-symbolami Wignera.*

$$\begin{aligned} Q_0(j_1 \otimes j_2 \otimes j_3) &= |j_1 j_2 j_3 0)(j_1 j_2 j_3 0| \\ &= \sum_{m_1+m_2+m_3=0} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} |j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3) \\ &\qquad \times \sum_{m_1'+m_2'+m_3'=0} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1' & m_2' & m_3' \end{pmatrix} (j_1 m_1' j_2 m_2' j_3 m_3'|. \end{aligned}$$

(6.28) implikuje

$$(2j_3 + 1)\mathrm{Tr}_{j_3} Q_0(j_1 \otimes j_2 \otimes j_3) = Q_{\bar{j}_3}(j_1 \otimes j_2). \tag{7.66}$$

Zatem, dla $m_1' + m_2' + m_3 = m_1 + m_2 + m_3 = 0$,

$$
\begin{aligned}
&(2j_3+1)\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} |j_1 m_1 j_2 m_2)(j_1 m_1' j_2 m_2'| \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1' & m_2' & m_3 \end{pmatrix} && (7.67)\\
=&|j_1 m_1 j_2 m_2)(j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 - m_3)(j_3 - m_3 | j_1 m_1' j_2 m_2')(j_1 m_1' j_2 m_2'|. && (7.68)
\end{aligned}
$$

Ta tożsamość prawie wystarcza aby wyprowadzić następujący związek pomiędzy współczynnikami Clebscha-Gordana a $3j$-symbolami:

$$
(j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 - m_3) = (-1)^{j_1 - j_2 - m_3}\sqrt{2j_3+1}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}.
$$

Jedynie znak $(-1)^{j_1-j_2}$ jest tu wynikiem odpowiedniej konwencji i bliższej analizy.

Wyprowadźmy teraz wzór rekurencyjny.

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(J^{\pm}\otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes J^{\pm}\otimes \mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes J^{\pm}\right) \\
&\quad \times \sum_{m_1+m_2+m_3=0} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} |j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3) \\
&= \sum_{m_1+m_2+m_3=0} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \sqrt{(j_1 \mp m_1)(j_1 \pm m_1 + 1)} |j_1 m_1 \pm 1 j_2 m_2 j_3 m_3) + \ldots \\
&= \sum_{m_1+m_2+m_3=\pm 1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 \mp 1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)} |j_1 m_1 j_2 m_2 j_3 m_3) + \ldots
\end{aligned}
$$

Stąd dla każdej trójki m_1, m_2, m_3 spełniającej $m_1 + m_2 + m_3 = \pm 1$ mamy związek rekurencyjny

$$
\begin{aligned}
0 &= \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 \mp 1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \\
&\quad + \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 \mp 1 & m_3 \end{pmatrix} \\
&\quad + \sqrt{(j_3 \mp m_3 + 1)(j_3 \pm m_3)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \mp 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ustalmy trójkę j_1, j_2, j_3. Nośnik $3j$-symbolu leży w przestrzeni $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ i jest zawarty w części wspólnej trzech pasów

$$
-j_1 \le m_1 \le j_1, \quad -j_2 \le m_2 \le j_2, \quad -j_3 \le m_3 \le j_3
$$

przecinających się pod kątem $\frac{2\pi}{3}$. Warunek

$$
j_1 \le j_2 + j_3, \quad j_2 \le j_3 + j_1, \quad j_3 \le j_1 + j_2
$$

oznacza, że to przecięcie ma sześć wierzchołków (być może pokrywających się) typu

$$\begin{aligned}
&(j_1, -j_2, -j_1 + j_2),\\
&(j_2 - j_3, -j_2, j_3),\\
&(-j_1, j_1 - j_3, j_3),\\
&(-j_1, j_2, j_1 - j_2),\\
&(-j_2 + j_3, j_2, -j_3),\\
&(j_1, -j_1 + j_3, -j_3).
\end{aligned}$$

Rozwiązywanie rekurencji można zacząć od brzegu, gdzie jest ona 2-elementowa i kontynuować ją do wewnątrz.

Zastosowanie wzoru (6.26) daje

$$Q_0(j_1 \otimes j_2 \otimes j_3) = \int D_{j_1}(g) \otimes D_{j_2}(g) \otimes D_{j_3}(g)\mathrm{d}g. \tag{7.69}$$

Jeśli obłożymy (7.69) przez $(j_1m_1j_2m_2j_3m_3|$ i $|j_1k_1j_2k_2j_3k_3)$, i wyrazimy g przez kąty Eulera, dostaniemy

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{16\pi^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\alpha\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\gamma\int_0^{2\pi}|\sin\beta|\mathrm{d}\beta\; D^{j_1}_{m_1k_1}(\alpha,\beta,\gamma)D^{j_2}_{m_2k_2}(\alpha,\beta,\gamma)D^{j_3}_{m_3,k_3}(\alpha,\beta,\gamma)\\
=\;&\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3\\ m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3\\ k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Możemy ograniczyć całkowanie względem β do $[0,\pi]$, zastępując $\frac{1}{16\pi^2}$ przez $\frac{1}{8\pi^2}$. Oto wniosek:

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}\Omega Y_{j_1,m_1}(\Omega)Y_{j_2,m_2}(\Omega)Y_{j_3,m_3}(\Omega)\\
=\;&\sqrt{\frac{(2j_1+1)(2j_2+1)(2j_3+3)}{4\pi}}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3\\ m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Oto inne własności

Twierdzenie 7.6

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3\\ m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix} = \mathrm{sgn}(\sigma)^{j_1+j_2+j_3}\begin{pmatrix} j_{\sigma(1)} & j_{\sigma(2)} & j_{\sigma(3)}\\ m_{\sigma(1)} & m_{\sigma(2)} & m_{\sigma(3)}\end{pmatrix}, \tag{7.70}$$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3\\ m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3\\ -m_1 & -m_2 & -m_3\end{pmatrix}. \tag{7.71}$$

$$(2j+1)\sum_{m_1,m_2}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j\\ m_1 & m_2 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j'\\ m_1 & m_2 & m'\end{pmatrix} = \delta_{jj'}\delta_{mm'}, \tag{7.72}$$

$$\sum_{j,m}(2j+1)\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j\\ m_1 & m_2 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j\\ m_1' & m_2' & m\end{pmatrix} = \delta_{m_1m_1'}\delta_{m_2m_2'}. \tag{7.73}$$

Dowód. Stosujemy (6.24) do $|j_1 j_2 j 0)$, $|j_1 j_2 j' 0)$:

$$(2j+1)\mathrm{Tr}_{j_1\otimes j_2}|j_1 j_2 j 0)(j_1 j_2 j' 0| = \delta_{jj'}\mathbb{1}_j (j_1 j_2 j' 0|j_1 j_2 j 0), \tag{7.74}$$

aby dostać (7.72).

Stosujemy (6.23)

$$\sum_j (2j+1)\mathrm{Tr}_j Q_0(j_1\otimes j_2\otimes j) = \mathbb{1}_{j_1\otimes j_2} \tag{7.75}$$

aby dostać (7.73). □

7.17 Iloczyn tensorowy z reprezentacją o spinie $\frac{1}{2}$

Szczególnie łatwy jest przypadek gdy jeden ze spinów jest równy $\frac{1}{2}$. Można wtedy ograniczyć się do dwuelementowych relacji rekurencyjnych:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2j+1}\begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ j-\frac{1}{2} & -j & \frac{1}{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ j+\frac{1}{2} & -j & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} &= 0, \qquad j+\tfrac{1}{2}, -j, \tfrac{1}{2}\ ; \\
\sqrt{j+m+1}\begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ -m+\frac{1}{2} & m-1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} + \sqrt{j+m}\begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ -m-\frac{1}{2} & m & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} &= 0, \qquad -m-\tfrac{1}{2}, m-1, \tfrac{1}{2}\ ; \\
\begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ -j-\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2}\end{pmatrix} + \sqrt{2j+1}\begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ -j+\frac{1}{2} & j & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} &= 0, \qquad -j-\tfrac{1}{2}, j, -\tfrac{1}{2}\ ; \\
\sqrt{j-m+1}\begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ -m-\frac{1}{2} & m+1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} + \sqrt{j-m}\begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ -m+\frac{1}{2} & m & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} &= 0, \qquad -m-\tfrac{1}{2}, m+1, -\tfrac{1}{2}\ ;
\end{aligned}$$

Dostajemy stąd

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ -m+\frac{1}{2} & m & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} &= \frac{(-1)^{j+m}\sqrt{j-m+1}}{\sqrt{(2j+1)(2j+2)}} \\
\begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ -m-\frac{1}{2} & m & \frac{1}{2}\end{pmatrix} &= \frac{(-1)^{-j-m+1}\sqrt{j+m+1}}{\sqrt{(2j+1)(2j+2)}}.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=-j}^{j}\begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ -m+\frac{1}{2} & m & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^2 + \sum_{m=-j}^{j}\begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j & \frac{1}{2} \\ -m-\frac{1}{2} & m & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^2 \\
=\ &\sum_{m=-j}^{j}\frac{(j-m+1)+(j+m+1)}{(2j+1)(2j+2)} = 1.
\end{aligned}$$

A oto odpowiadające im współczynniki Clebscha-Gordana:

$$\begin{aligned}
\left(jm\frac{1}{2}\frac{1}{2}\middle|j+\frac{1}{2}\ m+\frac{1}{2}\right) &= \frac{\sqrt{j+m+1}}{\sqrt{2j+1}}, \\
\left(jm\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\middle|j+\frac{1}{2}\ m-\frac{1}{2}\right) &= \frac{\sqrt{j-m+1}}{\sqrt{2j+1}}, \\
\left(jm\frac{1}{2}\frac{1}{2}\middle|j-\frac{1}{2}\ m+\frac{1}{2}\right) &= -\frac{\sqrt{j-m}}{\sqrt{2j+1}}, \\
\left(jm\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\middle|j-\frac{1}{2}\ m-\frac{1}{2}\right) &= \frac{\sqrt{j+m}}{\sqrt{2j+1}}.
\end{aligned}$$

8 Kwaterniony

8.1 Definicje

Algebra nad $\mathbb{R}$ oznaczana przez $\mathbb{H}$ z bazą $1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ spełniająca relacje

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1, \quad \mathrm{ij} = \mathrm{k}, \quad \mathrm{jk} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{ki} = \mathrm{j},$$

nazywa się algerą *kwaternionów*. Jest wyposażona w $*$ działającą jako

$$1^* = 1, \quad \mathrm{i}^* = -\mathrm{i}, \quad \mathrm{j}^* = -\mathrm{j}, \quad \mathrm{k}^* = -\mathrm{k}.$$

$*$ jest *inwolucją*: $x^{**} = x$, $(xy)^* = y^* x^*$, $x, y \in \mathbb{H}$.

Dla $x \in \mathbb{H}$ kładziemy

$$\mathrm{Re}x := \frac{1}{2}(x + x^*), \quad |x| := \sqrt{x^* x}.$$

(Zauważmy, że $x^* x$ jest zawsze dodatnie rzeczywiste)

Jeśli $x = x_1 + x_\mathrm{i}\mathrm{i} + x_\mathrm{j}\mathrm{j} + x_\mathrm{k}\mathrm{k}$, gdzie $x_1, x_\mathrm{i}, x_\mathrm{j}, x_\mathrm{k} \in \mathbb{R}$, to

$$\mathrm{Re}x = x_1, \qquad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_\mathrm{i}^2 + x_\mathrm{j}^2 + x_\mathrm{k}^2}.$$

Zauważmy, że $|\cdot|$ jest normą na $\mathbb{H}$. Jeśli $x, y \in \mathbb{H}$, to $|xy| = |x||y|$.

$\mathbb{H}$ posiada kwaternionowy iloczyn skalarny $x^* y$ i rzeczywisty iloczyn skalarny

$$\langle x|y\rangle := \mathrm{Re}x^* y = x_1 y_1 + x_\mathrm{i} y_\mathrm{i} + x_\mathrm{j} y_j + x_\mathrm{k} y_\mathrm{k}, \quad x, y \in \mathbb{H}.$$

$\mathbb{H}$ ma tę własność, że wszystkie niezerowe elementy są odwracalne. Algebry z tą własnością są zwane *algebrami z dzieleniem*.

Kwaterniony jednostkowe, czyli $\{x \in \mathbb{H} \ : \ |x| = 1\}$ tworzą grupę izomorficzną z $SU(2)$. Grupa automorfizmów kwaternionów jest izomorficzna z $SO(3)$. Każdy automorfizm jest postaci

$$\mathbb{H} \ni x \mapsto uxu^{-1} \in \mathbb{H}, \tag{8.76}$$

gdzie u jest jednostkowym kwaternionem.

8.2 Zanurzanie liczb zespolonych w kwaternionach

Oczywiście, istnieje dokładnie jeden ciągły injektywny homomorfizm $\mathbb{R} \to \mathbb{H}$. Jego obrazem jest centrum algebry $\mathbb{H}$, które identyfikujemy z $\mathbb{R}$.

Ale istnieje wiele ciągłych injektywnych homomorfizmów $\mathbb{C} \to \mathbb{H}$. Aby go ustalić, trzeba wybrać $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ w $\mathbb{H}$. Też go nazywamy i.

Kwaterniony można zdefiniować, jako algebra nad $\mathbb{C}$ rozpięta na 1, j, spełniająca relacje

$$z\mathrm{j} = \mathrm{j}\overline{z}. \tag{8.77}$$

Ustala to homomorfizm $\mathbb{C} \to \mathbb{H}$. $\mathbb{H}$ jest wtedy przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{C}$ o wymiarze 2. Odwzorowanie

$$\mathbb{H} \ni x \mapsto \frac{1}{2}(x - \mathrm{i}x\mathrm{i}) \in \mathbb{C} \tag{8.78}$$

jest rzutem. $\mathbb{H}$ ma zespolony półtoraliniowy iloczyn skalarny

$$(x|y) := \frac{1}{2}(yx^* - \mathrm{i}yx^*\mathrm{i}) \tag{8.79}$$

(W rzeczy samej, na mocy (8.78), wartości tego iloczynu skalarnego są w $\mathbb{C}$. Rachunek

$$\begin{aligned} (x|zy) &= \frac{1}{2}(zyx^* - \mathrm{i}zyx^*\mathrm{i}) = z(x|y), \\ (zx|y) &= \frac{1}{2}(yx^*\overline{z} - \mathrm{i}yx^*\overline{z}\mathrm{i}) = (x|y)\overline{z}, \quad z \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

pokazuje, że (8.78) jest półtoraliniowy.

$1, \mathrm{j}$ jest przykładem bazy ortonormalnej w $\mathbb{H}$ ze względu na (8.79).

8.3 Macierzowa reprezentacja kwaternionów

Kwaterniony mogą być reprezentowane przez macierze Pauliego pomnożone przez i:

$$\pi(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \pi(\mathrm{i}) = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix}, \quad \pi(\mathrm{j}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pi(\mathrm{k}) = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}.$$

W ten sposób dostajemy reprezentację kwaternionów w przestrzeni Hilberta $\mathbb{C}^2$

$$\pi : \mathbb{H} \to B(\mathbb{C}^2). \tag{8.80}$$

W tej reprezentacji,

$$\pi(x^*) = \pi(x)^*, \quad |x| = \sqrt{\det \pi(x)}. \tag{8.81}$$

Mamy

$$\pi(\mathbb{H}) = \{\lambda U \ : \ U \in SU(2), \quad \lambda \in [0, \infty[\}.$$

Inną użyteczną relacją, która zależy od powyższej reprezentacji jest

$$\pi(\mathbb{H}) = \{A \in B(\mathbb{C}^2) \ : \ A = \pi(\mathrm{j})\overline{A}\pi(\mathrm{j})^{-1}\}, \tag{8.82}$$

gdzie $\overline{A}$ oznacza zwykłe zespolone sprzężenie macierzy A.

Zastępując (8.80) przez $W\pi(\cdot)W^{-1}$ dla jakiegoś odwracalnego W, zastępujemy $\pi(\mathrm{j})$ przez $R := W\pi(\mathrm{j})\overline{W}^{-1}$. Zauważmy, że mamy

$$R\overline{R} = -\mathbb{1}. \tag{8.83}$$

8.4 Wyznacznik kwaternionowy

Jeśli $A \in L(\mathbb{H}^n)$, to możemy zdefiniować *wyznacznik kwaternionowy* jako

$$\det A := \det \pi(A),$$

gdzie z prawej strony mamy zwykły wyznacznik (w sensie macierzy zespolonej). Zauważmy, że $\det AB = \det A \det B$. $\det A$ nie zależy od zanurzenia $\mathbb{C}$ w $\mathbb{H}$ i ma zawsze wartość rzeczywistą ≥ 0.

8.5 Rzeczywiste proste algebry

Przypomnijmy, że algebra, która nie posiada nietrywialnych ideałów i jest różna od $\mathbb{K}$ z zerowym iloczynem nazywa się algebrą prostą.

Dobrze wiadomo, że można sklasyfikować wszystkie proste skończenie wymiarowe algebry nad $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$. Przypadek zespolony jest szczególnie łatwy:

Twierdzenie 8.1 *Niech $\mathfrak{A}$ będzie zespoloną skończenie wymiarową algebrą prostą. Wtedy istnieje $n \in \mathbb{N}$ taki, że $\mathfrak{A}$ jest izomorficzny do $L(\mathbb{C}^n)$.*

Odpowiadająca temu klasyfikacja rzeczywista jest bardziej skomplikowana:

Twierdzenie 8.2 *Niech $\mathfrak{A}$ będzie rzeczywistą skończenie wymiarową algebrą prostą. Wtedy istnieje $n \in \mathbb{N}$ taki, że $\mathfrak{A}$ jest izomorficzna z $L(\mathbb{C}^n)$, $L(\mathbb{R}^n)$ lub $L(\mathbb{H}^n)$.*

W szczególności, można zanurzyć $L(\mathbb{R}^n)$ w $L(\mathbb{C}^n)$:

$$L(\mathbb{R}^n) = \{A \in L(\mathbb{C}^n) \ : \ A = \overline{A}\}.$$

$L(\mathbb{H}^n)$ można zanurzyć w $L^2(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^n)$. wtedy

$$L(\mathbb{H}^n) = \{A \in L(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^n) \ : \ RA = \overline{A}R\},$$

gdzie $R = \pi(\mathrm{j}) \otimes \mathbb{1}$.

8.6 Kwaternionowe przestrzenie wektorowe

Mówimy, że $(\mathcal{V}, +, 0, -)$ jest *kwaternionową przestrzenią wektorową*, gdy jest to grupa abelowa wyposażona w działania

$$\mathbb{H} \times \mathcal{V} \ni (x, v) \mapsto xv \in \mathcal{V}, \quad \mathcal{V} \times \mathbb{H} \ni (v, x) \mapsto vx \in \mathcal{V},$$

takie, że

$$(x + y)v = xv + yv, \quad (xy)v = x(yv), \quad x, y \in \mathbb{H}, \quad v \in \mathcal{V}.$$

$$v(x + y) = vx + vy, \quad v(xy) = (vx)y, \quad x, y \in \mathbb{H}, \quad v \in \mathcal{V}.$$

Przykładem kwaternionowych przestrzeni są $\mathbb{H}^n$. Kwaternionowe przestrzenie wektorowe izomorficzne z $\mathbb{H}^n$ nazywamy *przestrzeniami wymiaru n*

Transformacje $\mathbb{H}$-liniowe z prawej/z lewej na kwaternionowej przestrzeni wektorowej mają oczywistą definicję. Zbiór transformacji $\mathbb{H}$-liniowych z prawej z $\mathcal{V}$ do $\mathcal{W}$ oznaczamy przez $L(\mathcal{V},\mathcal{W})$. Jak zwykle $L(\mathcal{V}) := L(\mathcal{V},\mathcal{V})$.

Transformacje z $L(\mathbb{H}^n,\mathbb{H}^m)$ można w oczywisty sposób reprezentować macierzami $m\times n$ o elementach kwaternionowych.

Niech $\mathcal{V}$ będzie kwaternionową przestrzenią wektorową. $\mathbb{R}$-liniowe odwzorowanie

$$\mathcal{V}\ni v\mapsto f(v)\in\mathbb{H}$$

jest antyliniowe z prawej/z lewej gdy

$$f(v\lambda)=f(v)\lambda^* \ / \ f(\lambda w)=\lambda^* f(v),\quad v\in\mathcal{V},\quad \lambda\in\mathbb{H}.$$

Mówimy, że

$$\mathcal{V}\times\mathcal{V}\ni(v,w)\mapsto(v|w)\in\mathbb{H}$$

jest *kwaternionową formą hermitowską* jeśli jest ono anty-liniowe z prawej ze względu na pierwszy argument i liniowe ze względu na drugi argument i

$$(v|w)=(w|v)^* \tag{8.84}$$

Jeśli zamiast (8.84) mamy

$$(v|w)=-(w|v)^* \tag{8.85}$$

Mówimy, że jest ona *antyhermitowska.*

Formę hermitowską spełniającą $(v|v)\geq 0$ nazywamy *dodatnio określoną.* Jeśli jest w dodatku niezdegenerowana, nazywamy ją *kwaternionowym iloczynem skalarnym.* Każda skończenie wymiarowa przestrzeń kwaternionowa z kwaternionowym iloczynem skalarnym jest izomorficzna z $\mathbb{H}^n$ i

$$(v|w):=\sum v_i^* w_i,\quad v,w\in\mathbb{H}^n.$$

Jeśli ustalimy zanurzenie (8.78), wtedy kwaternionowe przestrzenie wektorowe można zreinterpretować jako zespolone przestrzenie wektorowe, zaś kwaternionowe przestrzenie Hilberta jako zespolone przestrzenie Hilberta

Jeśli $\mathcal{V}$ jest kwaternionową przestrzenią wektorową, to $\mathcal{V}_\mathbb{C}$ będzie oznaczało $\mathcal{V}$ rozumianą jako zespoloną przestrzeń. Będzie ona zwana *zespoloną formą przestrzeni* $\mathcal{V}$.

9 Koincydencje wśród grup macierzowych

9.1 $SL(2,\mathbb{K})=Sp(1,\mathbb{K})$

Niech

$$J:=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że dla $A\in L(\mathbb{K}^2)$ mamy

$$A^\# JA=(\det A)J,$$
$$A^\# J+JA=(\mathrm{Tr}A)J.$$

Stąd $SL(2,\mathbb{K}) = Sp(1,\mathbb{K})$ i $sl(2,\mathbb{K}) = sp(1,\mathbb{K})$. Dla późniejszych referencji zanotujmy następujące tożsamości dla macierzy 2×2:

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr} JA^{\#}JA = -\det A, \quad \mathrm{Tr}A = 0 \quad \Rightarrow \quad JA^{\#}J = A. \tag{9.86}$$

9.2 $SU(2)/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(3)$

Utożsamiamy $\mathbb{R}^3$ z macierzami hermitowskimi 2×2 o śladzie 0:

$$\mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \mapsto X = \begin{bmatrix} z & x + \mathrm{i}y \\ x - \mathrm{i}y & -z \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr} X_1 X_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

zadaje standardowy iloczyn skalarny. Alternatywnie, możemy iloczyn skalarny zdefiniować poprzez wyznacznik:

$$-\det X = x^2 + y^2 + z^2.$$

Dla $A \in SU(2)$ kładziemy

$$\rho_A X := AXA^*.$$

Wtedy

$$\det \rho_A X = \det X.$$

Zatem ρ_A zachowuje iloczyn skalarny.

$$SU(2) \ni A \mapsto \rho_A \in SO(3).$$

jest surjektywnym homomorfizmem. Jego jądrem jest $\pm 1\!\!1$.

Dla $Y \in su(2)$ kładziemy

$$\rho_Y X := YX + XY^* = [Y, X].$$

(Pamiętajmy, że $Y = -Y^*$).

9.3 $SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2 \simeq SO_0(1,2)$, $SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(3,\mathbb{C})$,

Utożsamiamy $\mathbb{K}^3$ z macierzami 2×2 o śladzie 0:

$$\mathbb{K}^3 \ni (x,y,z) \mapsto X = \begin{bmatrix} z & x + y \\ -x + y & -z \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr} X_1 X_2 = -x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Czyli dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dostajemy iloczyn pseudoskalarny o sygnaturze $(1,2)$. Dla $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ jest to zwykły iloczyn skalarny. Alternatywnie można użyć wyznacznika:

$$-\det X = -x^2 + y^2 + z^2.$$

Dla $A \in SL(2,\mathbb{K})$ kładziemy
$$\rho_A X := AXA^{-1}.$$
Wtedy
$$\det \rho_A X = \det X.$$
Zatem ρ_A zachowuje iloczyn (pseudo-)skalarny.
$$\begin{aligned} SL(2,\mathbb{R}) \ni A \mapsto \rho_A \in SO_0(1,2), \\ SL(2,\mathbb{C}) \ni A \mapsto \rho_A \in SO(3,\mathbb{C}), \end{aligned}$$
są surjektywnymi homomorfizmami. Ich jądrem jest $\pm\mathbb{1}$.

Dla $Y \in sl(2,\mathbb{K})$
$$\rho_Y X := [Y, X].$$

9.4 $SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 \simeq SO_0(1,3)$

Utożsamiamy $\mathbb{R}^4$ z macierzami 2×2 hermitowskimi
$$\mathbb{R}^4 \ni (t,x,y,z) \mapsto X = \begin{bmatrix} t+z & x+\mathrm{i}y \\ x-\mathrm{i}y & t-z \end{bmatrix}.$$
Zauważmy, że
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathrm{Tr} JX_1JX_2 &= -t_1t_2 + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2, \\ -\det X &= -t^2 + x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$
Czyli dostajemy iloczyn pseudo-skalarny o sygnaturze $(1,3)$.

Dla $A \in SL(2,\mathbb{C})$ kładziemy
$$\rho_A X := AXA^*.$$
Wtedy
$$\det \rho_A X = \det X.$$
Zatem ρ_A zachowuje iloczyn pseudo-skalarny.
$$SL(2,\mathbb{C}) \ni A \mapsto \rho_A \in SO_0(1,3).$$
jest surjektywnym homomorfizmem. Jego jądrem jest $\pm\mathbb{1}$.

9.5 $(SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R}))/\mathbb{Z}_2 \simeq SO_0(2,2)$, $(SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C}))/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(4,\mathbb{C})$,

Utożsamiamy $\mathbb{K}^4$ z macierzami 2×2:
$$\mathbb{K}^4 \ni (t,x,y,z) \mapsto X = \begin{bmatrix} t+z & x+y \\ x-y & t-z \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{Tr} JX_1JX_2 &= -t_1t_2 + x_1x_2 - y_1y_2 + z_1z_2,\\ -\det X &= -t^2 + x^2 - y^2 + z^2.\end{aligned}$$

Czyli dostajemy iloczyn pseudo-skalarny o sygnaturze $(2,2)$.

Dla $(A,B) \in SL(2,\mathbb{K}) \times SL(2,\mathbb{K})$ kładziemy

$$\rho_{(A,B)}X := AXB^{-1}.$$

Wtedy

$$\det \rho_{(A,B)}X = \det X.$$

Zatem $\rho_{(A,B)}$ zachowuje iloczyn (pseudo-)skalarny.

$$\begin{aligned}SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R}) \ni (A,B) &\mapsto \rho_{(A,B)} \in SO_0(2,2),\\ SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{R}) \ni (A,B) &\mapsto \rho_A \in SO(4,\mathbb{C}),\end{aligned}$$

są surjektywnymi homomorfizmami. Ich jądrem jest $\pm(\mathbb{1},\mathbb{1})$.

9.6 $(SU(2) \times SU(2))/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(4)$

Niech $J := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Utożsamiamy $\mathbb{R}^4$ z macierzami zespolonymi 2×2 spełniającymi $J\overline{X} = XJ$ (czyli kwaternionami) w następujący sposób:

$$\mathbb{R}^4 \ni (t,x,y,z) \mapsto X = \begin{bmatrix} t + \mathrm{i}z & \mathrm{i}x + y \\ \mathrm{i}x - y & t - \mathrm{i}z \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{Tr} X_1^*X_2 &= t_1t_2 + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,\\ \det X &= t^2 + x^2 + y^2 + z^2.\end{aligned}$$

Czyli zadaje standardowy iloczyn skalarny.

Dla $(A,B) \in SU(2) \times SU(2)$ kładziemy

$$\rho_{(A,B)}X := AXB^*.$$

Wtedy

$$\det \rho_{(A,B)}X = \det X.$$

Zatem $\rho_{(A,B)}$ zachowuje iloczyn skalarny.

$$SU(2) \times SU(2) \ni (A,B) \mapsto \rho_{(A,B)} \in SO(4).$$

jest surjektywnym homomorfizmem. Jego jądrem jest $\pm(\mathbb{1},\mathbb{1})$.

10 Struktura klasycznych prostych algebr Liego

10.1 Reprezentacje przemiennych algebr Liego

Niech A będzie operatorem na skończenie wymiarowej przestrzeni $\mathcal{V}$. Definiujemy wtedy jego spektrum jako

$$\mathrm{spec}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ \exists v \in \mathcal{V}, \quad v \neq 0, \ Av = \lambda\}.$$

Mamy wtedy rozkład przestrzeni na podprzestrzenie pierwiastkowe:

$$\mathcal{V}_{\lambda,k}(A) := \mathrm{Ker}(A-\lambda)^k, \quad \mathcal{V}_\lambda(A) := \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{V}_{\lambda,k}(A), \quad \mathcal{V} = \underset{\lambda \in \mathrm{spec}(A)}{\oplus} \mathcal{V}_\lambda(A).$$

Niech teraz $A_1, \ldots, A_n$ komutują ze sobą. Wtedy łatwo widać, że $\mathcal{V}_{\lambda,k}(A_1)$ jest podprzestrzenią niezmienniczą dla $A_2, \ldots, A_n$. Połóżmy

$$\mathrm{spec}(A_1, \ldots, A_n) := \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n \ : \ \exists v \in \mathcal{V}, \quad v \neq 0 \ A_i v = \lambda_i v, \quad i = 1, \ldots, n\}, \quad (10.87)$$

$$\mathcal{V}_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}(A_1, \ldots, A_n) := \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{V}_{\lambda_i}(A_i).$$

Wtedy

$$\mathcal{V} = \underset{(\lambda,\ldots,\lambda_n) \in \mathrm{spec}(A_1,\ldots,A_n)}{\oplus} \mathcal{V}_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}(A_1, \ldots, A_n).$$

Jeśli $A = c_1 A_1 + \cdots + c_n A_n$, to

$$\mathrm{spec} A = \{c_1\lambda_1 + \cdots + c_n\lambda_n \ : \ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathrm{spec}(A_1, \ldots, A_n)\}.$$

Zatem definicję (10.87) można przeformułować. Niech $\mathfrak{h} := \mathbb{C}^n$. $\mathfrak{h}$ jest oczywiście przemienną algebrą Liego z bazą kanoniczną e_j, $j = 1, \ldots, n$. Kładąc $\pi_j(e_j) := A_j$ dostajemy reprezentację $\mathfrak{h}$. Wtedy

$$\mathrm{spec}(\pi(\mathfrak{h})) := \{\alpha \in \mathfrak{h}^\# \ : \ \exists v \in \mathcal{V}, \ v \neq 0, \quad Av = \alpha(A)v\}.$$

nazywamy zbiorem wag reprezentacji π a

$$\mathcal{V}_\alpha := \{v \in \mathcal{V} \ : \ Av = \alpha(A)v\}$$

przestrzenią wagową.

10.2 Proste algebry Liego

Mówimy, że algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest prosta jeśli nie posiada różnych od siebie samej ideałów przemiennych. (Zatem zgodnie z tą definicją $\mathbb{K}$ nie jest prosta).

Twierdzenie 10.1 *Każda prosta algebra Liego posiada niezdegenerowany niezmienniczy iloczyn skalarny zdefiniowany z dokładnością do stałej. Można go wybrać dodatnio określonym wtedy i tylko wtedy gdy odpowiadająca jej grupa Liego jest zwarta. Mówimy, że algebra Liego jest zwarta. Każda zespolona algebra Liego posiad zwartą formę rzeczywistą.*

Niech $\mathfrak{g}$ będzie zespoloną prostą algebrą Liego. Każda maksymalna przemienna podalgebra nazywa się algebrą Cartana.

Twierdzenie 10.2 *Niech $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ będą dwiema algebrami Cartana w $\mathfrak{g}$. Wtedy istnieje automorfizm α algebry $\mathfrak{g}$ taki, że $\alpha(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$.*

10.3 Pierwiastki i wagi

W dalszym ciągu wyróżniamy pewną algebrę Cartana w prostej algebrze Liego $\mathfrak{g}$. Załóżmy, że $\rho : \mathfrak{g} \to gl(\mathcal{V})$ jest reprezentacją na skończenie wymiarowej przestrzeni $\mathcal{V}$. Można ją obciąć do $\mathfrak{h}$. Wtedy $\mathrm{spec}\big(\rho(\mathfrak{h})\big) \subset \mathfrak{h}^{\#}$ nazywamy zbiorem wag reprezentacji π.

Jedną z reprezentacji jest reprezentacja dołączona na samej $\mathfrak{g}$.

$$\pi_{\mathrm{ad}}(B)A := [B, A].$$

W szczególności, w reprezentacji dołączonej mamy zerową wagę. Jej przestrzeń wektorów własnych to dokładnie cała algebra Cartana $\mathfrak{h}$. Niezerowe wagi dla reprezentacji dołączonej nazywamy pierwiastkami algebry $\mathfrak{g}$. Oznaczmy przez $\mathcal{R} \subset \mathfrak{h}^{\#}$ zbiór pierwiastków. Czyli dla każdego $\alpha \in \mathcal{R}$ istnieje $A \in \mathfrak{g}$ taki, że

$$[A, H] = \alpha(H)A, \quad H \in \mathfrak{h}.$$

Ten operator nazywamy operatorem pierwiastkowym. Kratę składającą się z całkowitoliczbowych kombinacji liniowych $\mathcal{R}$ nazywamy kratą pierwiastkową.

Jeśli ustalimy iloczyn skalarny na $\mathfrak{g}$, możemy traktować $\mathfrak{h}$ jako przestrzeń euklidesową. Możemy utożsamić $\mathfrak{h}^{\#}$ z $\mathfrak{h}$. Element $\mathfrak{h}$ który dostajemy przez to utożsamienie z $\alpha \in \mathcal{R}$ nazywamy kopierwiastkiem i oznaczamy H_α.

Stwierdzenie 10.3 *Niech ρ będzie reprezentacją. Niech β będzie wagą tej reprezentacji. Niech $A \in \mathfrak{g}_\alpha$. Wtedy*

$$\rho(A)\mathcal{V}_\beta \subset \mathcal{V}_{\beta+\alpha}$$

Dowód.

$$\begin{aligned}\rho(H)\rho(A)v &= \rho([H, A])v + \rho(A)\rho(H)v \\ &= \alpha(H)\rho(A)v + \beta(H)\rho(A)v.\end{aligned}$$

□

W szczególności, jeśli ρ jest reprezentacją nieprzywiedlną, to wagi reprezentacji należą do $\beta+$ krata pierwiastkowa.

10.4 $sl(n, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned}sl(n, \mathbb{C}) &= \{A \in gl(n, \mathbb{C}) \ : \ \mathrm{Tr}A = 0\}, \\ su(n) &= \{A \in gl(n, \mathbb{C}) \ : \ \mathrm{Tr}A = 0, \quad A^* = -A\}.\end{aligned}$$

$sl(n,\mathbb{C})$ jest kompleksyfikacją $su(n)$. To znaczy,

$$sl(n,\mathbb{C}) = su(n) + \mathrm{i}su(n).$$

$A \in sl(n,\mathbb{C})$ rozkłada się na $A = \frac{1}{2}(A - A^*) + \frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}(A + A^*)$.

Wprowadzamy iloczyn skalarny

$$\langle X|Y\rangle := \mathrm{Tr}XY.$$

Oznaczmy

$$A_{ij} := |i\rangle\langle j|.$$

Niech

$$\mathfrak{h} := \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i A_{ii} \;:\; \sum_{i=1}^{n} c_i = 0 \right\}.$$

$\mathfrak{h}$ jest maksymalną przemienną podalgebrą w $sl(n,\mathbb{C})$ – jest to przykład *algebry Cartana*. Połóżmy

$$H_{ij} := A_{ii} - A_{jj} = -H_{ji}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} [H_{kl}, A_{ij}] &= \alpha_{ij}(H_{kl})A_{ij}, \\ \alpha_{ij}(H_{kl}) &= \delta_{ik} + \delta_{jl} - \delta_{jk} - \delta_{il} = \langle H_{ij}|H_{kl}\rangle. \end{aligned}$$

Czyli A_{ij} są *operatorami pierwiastkowymi*, czyli wektorami własnymi dla działania algebry Cartana, a $\alpha_{ij} \in \mathfrak{h}^{\#}$ są wartościami własnymi, zwanymi *pierwiastkami*. Korzystając z dwoistości zadanej przez iloczyn skalarny, można pierwiastki utożsamić z *kopierwiastkami* H_{ij}, elementami algebry Cartana.

W szczególności,

$$\langle H_{ij}|H_{ij}\rangle = 2, \quad \langle H_{ij}|H_{kj}\rangle = 1, \quad \langle H_{ij}|H_{jk}\rangle = -1, \quad i \neq k. \tag{10.88}$$

Jako bazę kraty pierwiastkowej można przyjąć $H_{12}, H_{23}, \ldots, H_{n-1,n}$. Mają one wszystkie długość $\sqrt{2}$ i są prostopadłe do siebie z wyjątkiem

$$\angle(H_{12}, H_{23}) = \cdots = \angle(H_{n-2,n-1}, H_{n-1,n}) = \frac{2\pi}{3}.$$

Kratę wagową definiujemy jako podzbiór funkcjonałów w $\mathfrak{h}^{\#}$ przyjmujących całkowite wartości na H_{ij}.

Dla każdego $i < j$ mamy podalgebrę izomorficzną z $sl(2,\mathbb{C})$ rozpiętą na H_{ij}, A_{ij}, A_{ji}:

$$[A_{ij}, A_{ji}] = H_{ij}, \; [H_{ij}, A_{ij}] = 2A_{ij}, \; [H_{ij}, A_{ji}] = -2A_{ji}.$$

Zatem wartości własne H_{ij} muszą być liczbami całkowitymi. Stąd wynika, że wagi każdej reprezentacji muszą należeć do kraty wagowej. Z (10.88) widać, że krata pierwiastkowa jest zawarta w kracie wagowej.

Niech

$$
\begin{aligned}
L_n &:= \frac{1}{n}\big(H_{12} + 2H_{23} + \cdots + (n-1)H_{n-1n}\big),\\
L_j &:= H_{jj+1} + \cdots + H_{n-1n} + L_n.
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że

$$\langle L_k | H_{ij}\rangle = \mathrm{Tr}|k\rangle\langle k|H_{ij} = \delta_{ki} - \delta_{kj}.$$

Krata wagowa jest rozpięta przez $L_1, \ldots, L_{n-1}$.

10.5 $so(n,\mathbb{C})$

Jeśli przyjmiemy, że iloczyn skalarny ma postać

$$\langle x|y\rangle = \sum x_i y_j,$$

to mamy

$$
\begin{aligned}
so(n,\mathbb{C}) &= \{A \in gl(n,\mathbb{C}) \ : \ A^{\#} = -A\},\\
so(n,\mathbb{R}) &= \{A \in gl(n,\mathbb{R}) \ : \ A^{\#} = -A\}.
\end{aligned}
$$

$so(n,\mathbb{C})$ jest kompleksyfikacją $so(n,\mathbb{R})$:

$$so(n,\mathbb{C}) = so(n,\mathbb{R}) \oplus \mathrm{i}so(n,\mathbb{R}).$$

$A = \mathrm{Re}A + \mathrm{i}\mathrm{Im}A$. Wprowadzamy iloczyn skalarny $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}XY$. Bazę ortonormalną stanowią

$$L_{ij} = |i\rangle\langle j| - |j\rangle\langle i|, \quad 1 \le i < j \le n.$$

Zatem, wymiar $so(n,\mathbb{C})$ jest równy $\frac{n(n-1)}{2}$.

10.6 $so(2m)$

Załóżmy, że $n = 2m$ Wygodnie jest przyjąć inną postać iloczynu skalarnego w $\mathbb{C}^{2m}$. Niech współrzędne będą indeksowane przez $\pm i$, $i = 1, \ldots m$.

$$\langle z|w\rangle = \sum_i z_i w_{-i} = \sum_{i=1}^{m} 2 z_i w_{-i}.$$

Aby przejść do współrzędnych kartezjańskich kładziemy

$$z_{\pm j} = x_{2j-1} \pm \mathrm{i}x_{2j}.$$

Wprowadzamy iloczyn skalarny $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}XY$.
Wprowadźmy operatory

$$B_{ij} := |i\rangle\langle -j| - |j\rangle\langle -i|.$$

Oczywiście, $B_{ij} = -B_{ji}$. W szczególności, $B_{ii} = 0$. Kładziemy

$$N_i := B_{i-i} = |i\rangle\langle i| - |-i\rangle\langle -i|. \tag{10.89}$$

Niech $\mathfrak{h}$ będzie rozpięta przez N_i, $i = 1, \dots, m$, które stanowią bazę ortonormalną. Jest to algebra Cartana.

Bazę $so(2m, \mathbb{C})$ stanowią N_i, $i = 1, \dots, m$, oraz

$$B_{ij}, \quad 1 \leq |i| < |j| \leq m.$$

Kładziemy dla $|i| \neq |j|$,

$$N_{ij} = N_{ji} = -N_{-i-j} = -N_{-j-i} = \mathrm{sgn}(i) N_i + \mathrm{sgn}(j) N_j.$$

Mamy dla $k = 1, \dots, m$,

$$\begin{aligned}
[N_k, B_{ij}] &= \beta_{ij}(N_k) B_{ij}, \\
\beta_{ij}(N_k) &= \mathrm{sgn}(i)\delta_{|i|k} + \mathrm{sgn}(j)\delta_{|j|k} = \langle N_{ij}|N_k\rangle.
\end{aligned}$$

$$\langle N_{ij}|N_{ij}\rangle = 2, \ \langle N_{ij}|N_{i-j}\rangle = 0, \ \langle N_{ij}|N_{ik}\rangle = 1, \ |j| \neq |k|.$$

Czyli B_{ij} są operatorami pierwiastkowymi, β_{ij} są pierwiastkami, wreszcie N_{ij} są kopierwiastkami. Mają one długość $\sqrt{2}$.

Jako bazę kraty pierwiastkowej można wybrać $N_{12}, \dots, N_{m-2,m-1}, N_{m-1,m}, N_{m-1,-m}$. Są wzajemnie prostopadłe z wyjątkiem

$$\angle(N_{12}, N_{23}) = \cdots = \angle(N_{m-2,m-1}, N_{m-1,m}) = \angle(N_{m-2,m-1}, N_{m-1,m}) = \frac{2\pi}{3}.$$

Definiujemy kratę wagową jako zbiór funkcjonałów liniowych przyjmujących całkowite wartości na operatorach N_{ij}.

Mamy podalgebry izomorficzne z $sl(2, \mathbb{C})$: $\mathrm{Span}(N_{ij}, \quad B_{ij}, \quad B_{-i-j})$:

$$[B_{ji}, B_{-j-i}] = N_{ij}, \ [N_{ij}, B_{ij}] = 2B_{ij}, \ [N_{ij}, B_{-i-j}] = -2A_{-i-j}.$$

Dlatego też wagi skończeniewymiarowych reprezentacji są zawarte w kracie wagowej.

10.7 $so(2m+1)$

Do $\mathbb{C}^{2m}$ dodajemy współrzędną indeksowaną przez 0. Iloczyn skalarny ma postać

$$\langle z|w\rangle = \sum_i z_i w_{-i} = z_0 w_0 + \sum_{i=1}^{m} 2 z_i w_i.$$

Aby przejść do współrzędnych kartezjańskich kładziemy

$$z_{\pm j} = x_{2j-1} \pm \mathrm{i} x_{2j}, \qquad z_0 = x_{2m+1}.$$

Prócz operatorów B_{ij} wprowadźmy operatory

$$B_j := B_{0j} = |0\rangle\langle -j| - |j\rangle\langle 0|, \quad 1 \le |j| \le m.$$

Algebra Cartana $\mathfrak{h}$ jest nadal rozpięta przez N_i, $i = 1, \ldots, m$.
Bazę $so(2m+1, \mathbb{C})$ stanowią N_i, $i = 1, \ldots, m$, oraz

$$B_{ij}, \quad 1 \le |i| < |j| \le m,$$

$$B_j, \quad 1 \le |j| \le m.$$

Mamy dodatkowe w porównaniu z $so(2m)$ relacje dla $k = 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned} [N_k, B_j] &= \beta_j(N_k) B_j, \\ \beta_j(N_k) &= \mathrm{sgn}(j)\delta_{|j|k} = \langle N_j | N_k \rangle. \end{aligned}$$

$$\langle N_i | N_i \rangle = 1, \quad \langle N_i | N_{ij} \rangle = 1,$$

Czyli B_{ij} i B_j są operatorami pierwiastkowymi, β_{ij} i β_j są pierwiastkami, wreszcie N_{ij} i N_j są kopierwiastkami. N_j mają długość 1.

Jako bazę kraty pierwiastkowej można wybrać $N_{12}, \ldots, N_{m-2,m-1}, N_{m-1,m}, N_m$. Mają one długość $\sqrt{2}$ z wyjątkiem ostatniego, który ma długość 1. Są wzajemnie prostopadłe z wyjątkiem

$$\angle(N_{12}, N_{23}) = \cdots = \angle(N_{m-2,m-1}, N_{m-1,m}) = \frac{2\pi}{3}, \quad \angle(N_{m-1,m}, N_m) = \frac{3\pi}{4}.$$

Definiujemy kratę wagową jako zbiór funkcjonałów liniowych przyjmujących całkowite wartości na operatorach N_j. Mamy dodatkowe podalgebry izomorficzne z $sl(2, \mathbb{C})$: $\mathrm{Span}(B_{0i}, B_{0,-i}, N_j)$. Dlatego też wagi skończeniewymiarowych reprezentacji są zawarte w kracie wagowej.

10.8 $sp(2m, \mathbb{C})$

Współrzędne będą indeksowane przez $\pm i$, $i = 1, \ldots m$:

$$\omega = \sum_i \mathrm{sgn}(i)|i\rangle\langle -i|.$$

Wprowadźmy operatory

$$C_{ij} := \mathrm{sgn}(i)|i\rangle\langle -j| + \mathrm{sgn}(j)|j\rangle\langle -i|.$$

$$C_i := C_{ii} = 2|i\rangle\langle -i|, \quad 1 \le |i| \le m.$$

Niech N_i będą zdefiniowane jak dla $so(n)$. Zauważmy, że

$$N_i = C_{i-i} = |i\rangle\langle i| - |-i\rangle\langle -i|, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{10.90}$$

Bazę $sp(2m, \mathbb{C})$ stanowią N_i, $i = 1, \ldots, m$, oraz

$$C_{ij}, \quad 1 \le |i| < |j| \le m, \quad C_j, \quad 1 \le j \le m.$$

Wprowadzamy iloczyn skalarny $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}XY$. Niech $\mathfrak{h}$ będzie rozpięta przez N_i, $i = 1, \ldots, m$, które stanowią bazę ortonormalną. Niech N_{ij}, β_{ij}, β_j będą zdefiniowane jak dla $so(n)$. Mamy dla $k = 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned}[N_k, C_{ij}] &= \beta_{ij}(N_k)C_{ij}, \\ [N_k, C_j] &= 2\beta_j(N_k)C_j.\end{aligned}$$

Czyli C_{ij} i C_j są operatorami pierwiastkowymi, β_{ij} i $2\beta_j$ są pierwiastkami, wreszcie N_{ij} i $2N_j$ są kopierwiastkami. Mają one długość, odpowiednio, $\sqrt{2}$ i 2.

Jako bazę kraty pierwiastkowej można wybrać $N_{12}, \ldots, N_{m-2,m-1}, N_{m-1,m}, 2N_m$. Jest to prawie ta sama baza co dla $so(2m+1)$. W szczególności, ma te same kąty.

10.9 Koincydencje

$\phi : so(3, \mathbb{C}) \to sl(2, \mathbb{C})$

$$\phi(N_1) = H_{12}/2,\ \phi(B_1) = A_{12},\ \phi(B_{-1}) = A_{21}.$$

$\phi : so(4, \mathbb{C}) \to sl(2, \mathbb{C}) \oplus sl(2, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned}\phi(N_{12}) = H_{12}/2, &\quad \phi(B_{12}) = A_{12},\ \phi(B_{-1-2}) = A_{21}, \\ \phi(N_{1-2}) = H_{-1-2}/2, &\quad \phi(B_{-12}) = A_{-1-2},\ \phi(B_{1-2}) = A_{-2-1}.\end{aligned}$$

$\phi : so(5, \mathbb{C}) \to sp(4, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned}\phi(N_{12}) = N_{12}, &\quad \phi(B_{12}) = C_{12},\ \phi(B_{-1-2}) = C_{21}, \\ \phi(N_{1-2}) = N_{1-2}, &\quad \phi(B_{-12}) = C_{-12},\ \phi(B_{1-2}) = C_{2-1}, \\ &\quad \phi(B_i) = C_i.\end{aligned}$$

$\phi : so(6, \mathbb{C}) \to sl(4, \mathbb{C})$

Jeśli (ij) jest parą w zbiorze $\{1, 2, 3, 4\}$, wtedy $\overline{(ij)}$ będzie oznaczało taką parę (kl), że $ijkl$ jest parzystą permutacją 1234.

Poniżej, ij są parami w zbiorze $\{1, 2, 3\}$.

$$\begin{aligned}\phi(N_{ij}) = H_{ij}/2, &\quad \phi(B_{ij}) = A_{ij},\ \phi(B_{-i-j}) = A_{ji}, \\ \phi(N_{i-j}) = H_{\overline{ij}}/2, &\quad \phi(B_{-ij}) = A_{\overline{ij}},\ \phi(B_{i-j}) = A_{\overline{ji}}.\end{aligned}$$

11 Grupa $SU(3)$ i jej zastosowanie w fizyce cząstek

11.1 Reprezentacje $su(3)$

Każda skończenie wymiarowa reprezentacja $su(3)$ rozszerza się do reprezentacji $sl(3, \mathbb{C})$ w tym samym wymiarze. I na odwrót, dla każdej skończenie wymiarowej reprezentacji $sl(3, \mathbb{C})$ można dobrać iloczyn skalarny tak, by jej ograniczenie do $su(3)$ było infinitezymalnie unitarne. Reprezentacja $su(3)$ jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy gdy taka jest reprezentacja $sl(3, \mathbb{C})$.

Wśród reprezentacji nieprzywiedlnych $sl(3,\mathbb{C})$ uprzywilejowane miejsce zajmuje reprezentacja *fundamentalna* na $\mathbb{C}^3$ i jej reprezentacja kontragradientna. Tę ostatnią będziemy nazywać reprezentacją *antyfundamentalną*. Będziemy pisać, że działa na $\mathbb{C}^{3\#}$. Dla $su(3)$ reprezenacja kontragrandientna jest tożsama z reprezentacją zespolenie sprzężoną. Wtedy też można pisać $\overline{\mathbb{C}}^3$ zamiast $\mathbb{C}^{3\#}$.

Wszystkie skończenie wymiarowe reprezentacje nieprzywiedlne $sl(3,\mathbb{C})$ można łatwo opisać. Tworzymy iloczyn tensorowy

$$\otimes_{\mathrm{s}}^{p}\mathbb{C}^3 \otimes \otimes_{\mathrm{s}}^{q}\mathbb{C}^{3\#}.$$

Elementami tej przestrzeni są tensory

$$\sum e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_q} t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q},$$

które są w skrócie zapisywane jako $[t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}]$. Mamy zwężenie

$$[t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}] \mapsto [t^{i_1,\dots,i_{p-1},k}_{j_1,\dots,j_{q-1},k}],$$

gdzie stosujemy konwencję sumacyjną Einsteina. Operator zwężenia splata reprezentację na $\otimes_{\mathrm{s}}^{p}\mathbb{C}^3 \otimes \otimes_{\mathrm{s}}^{q}\mathbb{C}^{3\#}$ z reprezentacją na $\otimes_{\mathrm{s}}^{p-1}\mathbb{C}^3 \otimes \otimes_{\mathrm{s}}^{q-1}\mathbb{C}^{3\#}$. Jądro tego operatora jest niezmienniczą przestrzenią. Są to wszystkie reprezentacj nieprzywiedlne dla $sl(3,\mathbb{C})$.

Oczywiście, $sl(3,\mathbb{C})$ można również reprezentować w antysymetrycznym iloczynie tensorowym. Nie prowadzi to jednak do dodatkowych reprezentacji. Zauważmy bowiem, że $\otimes_{\mathrm{a}}^{3}\mathbb{C}^3$ i $\otimes_{\mathrm{a}}^{3}\mathbb{C}^{\#3}$ są jednowymiarowe, zatem $sl(3,\mathbb{C})$ są na niej trywialne. Natomiast reprezentacja na $\otimes_{\mathrm{a}}^{2}\mathbb{C}^3$ jest równoważna reprezentacji antyfundamentalnej, zaś na $\otimes_{\mathrm{a}}^{2}\mathbb{C}^{3\#}$ —fundamentalnej.

11.2 Algebra Cartana

$sl(3,\mathbb{C})$ jest oczywisty sposób zanurzona w $gl(3,\mathbb{C})$, która jest rozpięta przez operatory $A_{ij} := |i\rangle\langle j|$. $gl(3,\mathbb{C})$ posiada naturalny iloczyn skalarny

$$\langle A|B\rangle = \mathrm{Tr} A^{\#}B, \tag{11.91}$$

w którym A_{ij} stanowią bazę ortonormalną.

Zbiór elementów diagonalnych algebry $sl(3,\mathbb{C})$ nazywamy *algebrą Cartana* dla $sl(3,\mathbb{C})$ i oznaczamy przez $\mathfrak{h}$. Jest to maksymalna przemienna podalgebra w $sl(3,\mathbb{C})$. Jest ona rozpięta przez $H_{ij} = -H_{ji} = A_{ii} - A_{jj}$, $i \neq j$. Oczywiście,

$$H_{12} + H_{23} + H_{31} = 0.$$

$\mathfrak{h}$ ma 2 wymiary i jako jej bazę można wybrać H_{12}, H_{23}. Zauważmy, że $\langle H_{12}|H_{23}\rangle = -1$, $\langle H_{12}|H_{12}\rangle = \langle H_{23}|H_{23}\rangle = 2$. Dlatego też kąt między H_{12} i H_{23} wynosi $\frac{2\pi}{3}$. Zbiór elementów $\mathfrak{h}^{\#}$, które na H_{ij}, H_{jk}, H_{ki} przyjmują wartości całkowite nazywa się *kratą wagową* $\mathcal{W}$.

11.3 Wagi reprezentacji

Załóżmy, że mamy reprezentację π algery Liego $su(3)$ (albo $sl(3,\mathbb{C})$) w skończenie wymiarowej przestrzeni $\mathcal{V}$. Dla $A \in sl(2,\mathbb{C})$ będziemy pisać A zamiast $\pi(A)$. Wektory w $\mathcal{V}$ które są wektorami własnymi dla algebry Cartana nazywamy *wektorami wagowymi* tej reprezentacji. Ich wartości własne zależą liniowo od $\mathfrak{h}$, można więc je interpretować jako elementy $\mathfrak{h}^{\#}$. Nazywamy je *wagami.* Oznaczmy przez $\mathcal{V}_\beta$ przestrzeń wektorów własnych dla wagi $\beta \in \mathfrak{h}^{\#}$. Mamy

$$Hv = \langle \beta | H \rangle v, \quad v \in \mathcal{V}_\beta, \quad H \in \mathfrak{h}.$$

11.4 Reprezentacja fundamentalna i antyfundamentalna

Wagi reprezentacji fundamentalnej L_i spełniają dla różnych i,j,k

$$\langle L_i | H_{ij} \rangle = 1, \ \langle L_i | H_{jk} \rangle = 0, \ \langle L_i | H_{ki} \rangle = -1.$$

Zatem

$$L_i = \frac{1}{3}(H_{ij} + H_{ik}), \quad H_{ij} = L_i - L_j.$$

Oczywiście, $L_1 + L_2 + L_3 = 0$. Jeśli wybierzemy L_1, L_2 jako bazę, to

$$\begin{aligned} H_{12} &= L_1 - L_2, \\ H_{23} &= L_2 - L_3 = L_1 + 2L_2, \\ H_{31} &= L_3 - L_1 = -2L_1 - L_2. \end{aligned}$$

Wektory L_i rozpinają kratę wagową. Razem z wektorami $-L_i$ leżą na wierzchołkach sześciokąta foremnego:

$$\begin{array}{ccc} & -L_3 & \\ L_2 & & L_1 \\ -L_1 & & -L_2 \\ & L_3 & \end{array}$$

11.5 Pierwiastki

Elementy A_{ij} dla $i \neq j$ należą do $sl(3,\mathbb{C})$ i nazywamy je *operatorami pierwiastkowymi.* Elementy A_{ij}, A_{ji} i H_{ij} spełniają relacje $sl(2,\mathbb{C})$

$$[A_{ij}, A_{ji}] = H_{ij}, \ [H_{ij}, A_{ij}] = 2A_{ij}, \ [H_{ij}, A_{ji}] = -2A_{ji}.$$

Zatem wartości własne H_{ij} muszą być liczbami całkowitymi. Stąd wynika, że wagi każdej reprezentacji muszą należeć do kraty wagowej.

Jedną z reprezentacji jest reprezentacja dołączona, czyli reprezentacja dla której przestrzenią jest samo $sl(3,\mathbb{C})$ zaś działaniem jest komutator. Dla reprezentacji dołączonej mamy wagę zerową, dla której wektorami wagowymi jest algebra Cartana. Operatory pierwiastkowe spełniają

$$[H, A_{ij}] = \alpha_{ij}(H) A_{ij}, \quad H \in \mathfrak{h},$$

gdzie α_{ij} jest funkcjonałem liniowym na $\mathfrak{h}$ zwanym *pierwiastkiem*. Innymi słowy, pierwiastek α_{ij} jest wagą dla A_{ij} w reprezentacji dołączonej. Jeśli i, j, k są różne, można to zapisać jako

$$\alpha_{ij}(H_{ij}) = 2, \quad \alpha_{ij}(H_{jk}) = -1, \quad \alpha_{ij}(H_{ki}) = -1.$$

Identyfikując $\mathfrak{h}^{\#}$ z $\mathfrak{h}$ przy pomocy iloczynu skalarnego (11.91) dostajemy utożsamienie $\alpha_{ij} = H_{ij}$. Zbiór elementów $\mathfrak{h}^{\#}$ będących całkowitoliczbowymi kombinacjami liniowymi pierwiastków nazywamy *kratą pierwiastkową* $\mathcal{U}$. Oczywiście, $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$.

Niech $\beta \in \mathcal{W}$ będzie wagą pewnej reprezentacji. Mamy

$$A_{ij}\mathcal{V}_\beta \subset \mathcal{V}_{\beta+\alpha_{ij}}.$$

Oczywiście, elementy algebry Cartana zachowują $\mathcal{V}_\beta$. Dlatego, jeśli reprezentacja jest nieprzywiedlna i ma wagę $\beta \in \mathcal{W}$, to wszystkie inne wagi należą do $\beta + \mathcal{U}$.

11.6 Trialność

Krata $\mathcal{W}$ dzieli się na trzy podkraty:

$$\mathcal{W}_k \quad := \quad \{n_1 L_1 + n_2 L_2 \ : \ n_1 + n_2 \in 3\mathbb{Z} + k\}.$$

Równoważnie,

$$\mathcal{W}_0 = \mathcal{U}, \quad \mathcal{W}_1 = L_1 + \mathcal{U}, \quad \mathcal{W}_2 = 2L_1 + \mathcal{U}.$$

$k \in \mathbb{Z}_3$ nazywa się *trialnością* kraty. Wagi reprezentacji typu (p, q) leżą na kracie $\mathcal{W}_{p-q}$.

$SU(3)$ ma centrum $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{3}}\mathbb{1} \ : \ k = 0, 1, 2\} \simeq \mathbb{Z}_3$. $\mathbb{Z}_3$ ma 3 reprezentacje nieprzywiedlne, też numerowane przez $\mathbb{Z}_3$. Trialność danej reprezentacji odpowiada reprezentacji centrum.

11.7 Pierwiastki ujemne i dodatnie

Wśród operatorów pierwiastkowych wyróżniamy pierwiastki ujemne:

$$A_{12}, \ A_{13}, \ A_{23}$$

i pierwiastki dodatnie:

$$A_{21}, \ A_{31}, \ A_{32}.$$

Wektor najwyższej wagi to taki, który jest zabijany przez pierwiastki ujemne. Każda reprezentacja nieprzywiedlna posiada dokładnie jeden (z dokładnością do czynnika) wektor najwyższej wagi Ψ. Wtedy każdy wektor jest kombinacją liniową wektorów postaci $B_1 \cdots B_n \Psi$, gdzie $B_1, \dots$ są pierwiastkami dodatnimi.

Niech e_1, e_2, e_3 będzie bazą $\mathbb{C}^3$ a e^1, e^2, e^3 bazą dualną w $\mathbb{C}^{\#3}$. Reprezentacja nieprzywiedlna na $\otimes_{\mathrm{s}}^p \mathbb{C}^3 \otimes \otimes_{\mathrm{s}}^q \mathbb{C}^{3\#}$ ma wektor najwyższej wagi $\otimes^p e_1 \otimes \otimes^q e^3$ z wagą $pL_1 - qL_3 = (p+q)L_1 + qL_2$.

11.8 Diagramy wagowe przykładowych reprezentacji

$\mathbb{C}^3$: wagi $\{L_i\}$, najwyższa waga L_1

$$\begin{array}{ccc} 1 & & \underline{1} \\ & 1 & \end{array}$$

$\otimes_s^2 \mathbb{C}^3$: wagi $\{L_i + L_j\}$, najwyższa waga $2L_1$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 1 & & \underline{1} \\ & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

$\otimes_s^3 \mathbb{C}^3$: wagi $\{L_i + L_j + L_k\}$, najwyższa waga $3L_1$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 1 & & 1 & & \underline{1} \\ & 1 & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

$\mathbb{C}^{3\#}$: wagi $\{-L_i\}$, najwyższa waga $-L_3$

$$\begin{array}{ccc} & \underline{1} & \\ 1 & & 1 \end{array}$$

$\otimes_s^2 \mathbb{C}^{3\#}$: wagi $\{-L_i - L_j\}$, najwyższa waga $-2L_3$

$$\begin{array}{ccccc} & & \underline{1} & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & 1 & & 1 \end{array}$$

$\otimes_s^3 \mathbb{C}^{3\#}$: wagi $\{-L_i - L_j - L_k\}$, najwyższa waga $-3L_3$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \underline{1} & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & & 1 & \\ 1 & & 1 & & 1 & & 1 \end{array}$$

reprezentacja dołączona, działa w $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^{3\#}$, wagi $\{L_i - L_j,\ i \neq j;\ \ 2 \times 0\}$, najwyższa waga $L_1 - L_3$

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & & \underline{1} & \\ 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 1 & \end{array}$$

reprezentacja w $\otimes_s^2 \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^{3\#}$, wagi $\{2L_i - L_j,\ i \neq j;\ -2L_i;\ 2 \times L_i\}$ najwyższa waga $2L_1 - L_3$

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & & 1 & & \underline{1} & \\ 1 & & 2 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ & & 1 & & 1 & & \end{array}$$

Zbiór wag reprezentacji wraz z krotnościami musi spełniać następujące własności:

(1) Jest symetryczny względem odbicia w każdej z osi zadanej przez L_k.

(2) Po przecięciu dowolną prostą prostopałą do L_k dostajemy krotności pewnej reprezentacji $SU(2)$.

(3) Jeśli reprezentacja jest nieprzywiedlna, to jej wagi znajdują się w jednej z podkrat $\mathcal{W}_0$, $\mathcal{W}_1$ lub $\mathcal{W}_2$.

(1) wynika z tego, że $B \mapsto W_{ij} A W_{ij}^{-1}$ jest izomorfizmem algebry $sl(3, \mathbb{C})$, gdzie

$$W_{ij} = W_{ij}^{-1} := A_{kk} + A_{ij} + A_{ji}.$$

Ten izomorfizm zamienia H_{ij} na $-H_{ji}$ i H_{ik} na H_{jk}.

(2) Wynika z tego, że jeśli $\mathcal{H}_\beta$ jest przestrzenią wagową, to $\oplus \mathcal{H}_{\beta+\mu}$ gdzie μ to kombinacje liniowe α_{ij} rozpinają reprezentację $sl(2, \mathbb{C})$.

Mamy następującą regułę dla krotności wag (wymiaru przestrzeni wagowych) reprezentacji nieprzywiedlnych. Wagi na obrzeżach mają krotność 1. W każdej następnej warstwie zwiększają się o 1, chyba że dochodzimy do warstwy w formie trójkąta, i wtedy nie zwiększamy krotności. W szczególności, dla reprezentacji w $\otimes_{\mathrm{s}}^n \mathbb{C}^3$ i $\otimes_{\mathrm{s}}^n \mathbb{C}^{3\#}$, które mają obrzeża trójkątne, wszystkie krotności są równe 1.

11.9 Symetrie w mechanice kwantowej

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta a $G \ni g \mapsto U(g) \in U(\mathcal{H})$ reprezentacją unitarną grupy.

Najczęstsze zastosowanie teorii grup to *symetrie przybliżone*. Załóżmy, że $A_1, \ldots, A_n$ jest układem komutujących samosprzężonych obserwabli, które powoli zmieniają się z czasem. Na przykład, jeśli $H = H_0 + V$ jest hamiltonianem i V jest w odpowiednim sensie małe, to jedną z tych obserwabli może być H_0. Załóżmy, że $U(g)$, $g \in G$, komutują z $A_1, \ldots, A_n$. Wtedy przestrzenie własne dla $A_1, \ldots, A_n$ są niezmiennicze dla G.

Inne zastosowanie to *grupy cechowania*. Oznacza to, że zarówno hamiltonian H jak i wszystkie obserwable fizyczne komutują z $U(g)$, $g \in G$.

11.10 Konwencje

Reprezentacje unitarne $u(1)$ są jednowymiarowe i zadane są przez $q \in \mathbb{R}$, zwany ładunkiem

$$u(1) \ni \theta \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta q}.$$

Przy iloczynie tensorowym ładunki się dodają.

Reprezentacje nieprzywiedlne $su(n)$, $so(n)$ są z reguły oznaczane liczbami odpowiadającymi ich wymiarowi. Dla reprezentacji sprzężonej dopisujemy kreskę. Tak więc reprezentacja fundamentalna $su(n)$ jest oznaczana przez n a antyfundamentalna przez $\overline{n}$.

11.11 Zachowane ładunki

Każda cząstka pozostawiona samej sobie w końcu rozpadnie się na fotony, neutrina, elektrony, protony i ich antycząstki.

Następujące wielkości nie zależą od kanałów rozpadu: ładunek elektryczny

$$Q := \#p + \#\overline{e} - \#\overline{p} - \#e,$$

i ładunek barionowy

$$B := \#p - \#\overline{p}.$$

Są to liczby, które są zawsze zachowane.

11.12 Izospin

Proton p i neutron n mają podobne masy i własności nie związane z oddziaływaniem elektromagnetycznym. Podobnie mezony π^+, π^0, π^-.

Heisenberg zaproponował, że hamiltonian ma rozkład

$$H = H_{\mathrm{strong}} + H_{\mathrm{em}},$$

gdzie H_{strong} to hamiltonian oddziaływań silnych niezmienniczy względem grupy $SU(2)$, w odróżnieniu od hamiltonianu elektromagnetycznego H_{em}. Oznaczmy przez I_1, I_2, I_3 generatory $su(2)$, zwane izospinem. Oddziaływanie elektromagnetyczne komutuje jedynie z I_3.

Proton p i neutron n byłyby wektorami własnymi I_3 należącymi do reprezentacji fundamentalnej $SU(2)$. Przyjmujemy, że proton i neutron należą do reprezentacji o izospinie $\frac{1}{2}$:

$$I_3 p = \frac{1}{2} p, \quad I_3 n = -\frac{1}{2} n.$$

Podobnie, mezony π należą do reprezentacji o izospinie 1:

$$I_3 \pi^+ = \pi^+, \quad I_3 \pi^0 = 0, \quad I_3 \pi^- = -\pi^-.$$

Ogólniej, zaobserwowano, że możemy pogrupować cząstki w multiplety izospinowe. W obrębie tego samego multipletu izospinowego cząstki są bardzo podobne pod względem masy i innych własności, natomiast mają inny ładunek elektryczny i I_3.

Zauważono, że oddziaływania między cząstkami można podzielić na silne, które następują bardzo szybko, słabe, które są znacznie wolniejsze i elektromagnetyczne. Izospin zachowywany jest w oddziaływaniach silnych, ale nie słabych, np:

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu, \quad \mu^+ \to e^+ + \nu_e + \overline{\nu}_\mu.$$

Biorąc pod uwagę oddziaływania silne każdej cząstce można przypisać wartość I_3.

Zwróćmy uwagę na to, że dla multipletu nukleonowego i pionowego zachodzi związek

$$Q = I_3 + \frac{1}{2} B. \tag{11.92}$$

11.13 Dziwność

Zauważono, że istnieje jeszcze jedna liczba, która jest zachowana w reakcjach silnych, a w reakcjach słabych zmienia się o ± 1. Nazwano ją dziwnością i oznaczono przez S. Przyjęto, że "standardowe cząstki" takie jak p, n, π, e mają dziwność zero.

Okazało się, że cząstki oddziałujące silnie można pogrupować w większe multiplety, w obrębie których cząstki róznią się o wartość S i I_3. W obrębie multipletów mamy stosunkowo podobne masy, ten sam spin i tę samą liczbę barionową. Okazało się, że multiplety te mają symetryczną postać, jeśli za współrzędne wybierze się I_3 i hiperładunek

$$Y = B + S.$$

Znaleziono też związek zwany formułą Gell-Manna – Nishijimy uogólniający (11.92):

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y.$$

Hadrony z zerowym ładunkiem barionowym nazywane są mezonami. Na poniższych diagramach na osi pionowej odkładamy Y, na osi poziomej I_3.

Najważniejsze multiplety mezonów ($B = 0$):

Nonet pseudoskalarny składa się z oktetu

$$\begin{array}{ccccc} & K^0 & & K^+ & \\ \pi^- & & \pi^0, \eta & & \pi^+ \\ & K^- & & K^{\bar{0}} & \end{array}$$

i singletu η'.

Nonet pseudowektorowy składa się z oktetu

$$\begin{array}{ccccc} & K^{*0} & & K^{*+} & \\ \rho^- & & \rho^0, \omega & & \rho^+ \\ & K^{*-} & & K^{*\bar{0}} & \end{array}$$

i singletu ω'.

Oto podstawowe multiplety barionów ($B = 1$):

Oktet ze spinem $\frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{ccccc} & n & & p & \\ \Sigma^- & & \Sigma^0, \Lambda^0 & & \Sigma^+ \\ & \Xi^- & & \Xi^0 & \end{array}$$

Dekuplet ze spinem $\frac{3}{2}$:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\Delta^- & & \Delta^0 & & \Delta^+ & & \Delta^{++} \\
& \Sigma^{*-} & & \Sigma^{*0} & & \Sigma^{*+} & \\
& & \Xi^{*-} & & \Xi^{*0} & & \\
& & & \Omega^- & & &
\end{array}
$$

11.14 Kwarki

Wprowadźmy 3 kwarki: u, d i s. Traktujemy je jako wektory wagowe dla fundamentalnej reprezentacji $SU(3)$:

$$
\begin{array}{ccc}
d & & u \\
& s &
\end{array}
$$

Mamy też antykwarki odpowiadające reprezentacji antyfundamentalnej:

$$
\begin{array}{ccc}
& \overline{s} & \\
\overline{u} & & \overline{d}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{1}{3}(2\#u - \#d - \#s), \\
B &= \frac{1}{3}(\#u + \#d + \#s), \\
S &= -\#s, \\
Y &= \frac{1}{3}(\#u + \#d - 2\#s), \\
I_3 &= \frac{1}{2}(\#u - \#d).
\end{aligned}
$$

Rozważmy grupę $SU(3)_{\text{fl}}$ opisującą flavory u, d, s, grupę $SU(2)_{\text{spin}}$ opisującą spin i $SU(3)_{\text{col}}$ odpowiedzialna za kolor. Kwarki można traktować jako elementy $\mathbb{C}^3_{\text{fl}} \otimes \mathbb{C}^2_{\text{spin}} \otimes \mathbb{C}^3_{\text{col}}$, zaś antykwarki jako elementy $\overline{\mathbb{C}}^3_{\text{fl}} \otimes \overline{\mathbb{C}}^2_{\text{spin}} \otimes \overline{\mathbb{C}}^3_{\text{col}}$. Działa na nich grupa $SU(3)_{\text{fl}} \times SU(2)_{\text{spin}} \times SU(3)_{\text{col}}$

Kwarki są fermionami, zatem stany są opisywane przez elementy

$$
\otimes^p_{\text{a}} \Big(\mathbb{C}^3_{\text{fl}} \otimes \mathbb{C}^2_{\text{spin}} \otimes \mathbb{C}^3_{\text{col}} \Big) \otimes \otimes^q_{\text{a}} \Big(\overline{\mathbb{C}}^3_{\text{fl}} \otimes \overline{\mathbb{C}}^2_{\text{spin}} \otimes \overline{\mathbb{C}}^3_{\text{col}} \Big). \tag{11.93}
$$

Hipoteza *uwięzienia* mówi, że w fizyce realizowane są tylko stany "bezbarwne", czyli takie na które grupa kolorowa działa trywialnie. Jeśli zanurzymy (11.93) w przestrzeni

$$
\otimes^p \Big(\mathbb{C}^3_{\text{fl}} \otimes \mathbb{C}^2_{\text{spin}} \Big) \otimes \otimes^q \Big(\overline{\mathbb{C}}^3_{\text{fl}} \otimes \overline{\mathbb{C}}^2_{\text{spin}} \Big) \otimes \Big(\otimes^p \mathbb{C}^3_{\text{col}} \otimes \otimes^q \overline{\mathbb{C}}^3_{\text{col}} \Big), \tag{11.94}
$$

to będą one postaci $\Psi\otimes\Phi$, gdzie Φ, odpowiadające "kolorowym" stopniom swobody, jest singletem względem $SU(3)$.

Wśród $\otimes^p\mathbb{C}^3_{\rm col}\otimes\otimes^q\overline{\mathbb{C}}^3_{\rm col}$ reprezentacje singletowe z najmniejszymi $(p,q)\neq(0,0)$ znajdziemy dla $(1\otimes 1)$ (mezony), $(3,0)$ (bariony) i $(0,3)$ (antybariony).

W szczególności, mezony są elementami

$$\begin{aligned}&\mathbb{C}^3_{\rm fl}\otimes\mathbb{C}^2_{\rm spin}\otimes\mathbb{C}^3_{\rm col}\otimes\overline{\mathbb{C}}^3_{\rm fl}\otimes\overline{\mathbb{C}}^2_{\rm spin}\otimes\overline{\mathbb{C}}^3_{\rm col}\\ =\ &\Big(\mathbb{C}^3_{\rm fl}\otimes\mathbb{C}^2_{\rm spin}\otimes\overline{\mathbb{C}}^3_{\rm fl}\otimes\overline{\mathbb{C}}^2_{\rm spin}\Big)\otimes\Big(\mathbb{C}^3_{\rm col}\otimes\overline{\mathbb{C}}^3_{\rm col}\Big).\end{aligned}$$

Warunek bezbarwności daje

$$\Psi\otimes\frac{1}{\sqrt{3}}\big(|1,\overline{1}) + |2,\overline{2}) + |2,\overline{2})\big),$$

gdzie 1,2,3 odpowiada 3 kolorom i

$$\Psi\in\mathbb{C}^3_{\rm fl}\otimes\mathbb{C}^2_{\rm spin}\otimes\overline{\mathbb{C}}^3_{\rm fl}\otimes\overline{\mathbb{C}}^2_{\rm spin}\simeq\big(\mathbb{C}^3_{\rm fl}\otimes\overline{\mathbb{C}}^3_{\rm fl}\big)\otimes\big(\mathbb{C}^2_{\rm spin}\otimes\overline{\mathbb{C}}^2_{\rm spin}\big).$$

Dla reprezentacji $SU(3)_{\rm fl}$ mamy $3\otimes\overline{3}=8+1$. Dla reprezentacji $SU(2)_{\rm spin}$ mamy $2\otimes 2=3+1$, co daje spin 0 i 1. Zatem dostajemy oba nonety mezonów.

Oto "zawartość kwarkowa" nonetów mezonowych:

$$\begin{array}{ccccc} & d\overline{s} & & u\overline{s} & \\ d\overline{u} & & d\overline{d}, u\overline{u}, s\overline{s} & & u\overline{d} \\ & s\overline{u} & & s\overline{d} & \end{array}$$

Mezony o zerowym ładunku różnią się kwarkami:

$$\begin{aligned}\pi^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(d\overline{d}-u\overline{u}),\\ \eta &= \frac{1}{\sqrt{6}}(2s\overline{s}-d\overline{d}-u\overline{u}),\\ \eta' &= \frac{1}{\sqrt{3}}(s\overline{s}+d\overline{d}+u\overline{u}).\end{aligned}$$

Bariony są elementami

$$\begin{aligned}&\otimes^3_{\rm a}\big(\mathbb{C}^3_{\rm fl}\otimes\mathbb{C}^2_{\rm spin}\otimes\mathbb{C}^3_{\rm col}\big)\\ \subset\ &\otimes^3\Big(\mathbb{C}^3_{\rm fl}\otimes\mathbb{C}^2_{\rm spin}\Big)\otimes\otimes^3\mathbb{C}^3_{\rm col}.\end{aligned}$$

Warunek bezbarwności daje

$$\Psi\otimes\frac{1}{\sqrt{3!}}\Big(|1,2,3)+|2,3,1)+|3,1,2)-|1,3,2)-|3,2,1)-|1,3,2)\Big).$$

Kolorowa część wektora jest antysymetryczna. Zatem Ψ musi być elementem $\otimes^3_{\rm s}\big(\mathbb{C}^3_{\rm fl}\otimes\mathbb{C}^2_{\rm spin}\big)$, która ma wymiar $\frac{6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3}=56$. Ze względu na działanie grupy $SU(3)_{\rm fl}\times SU(2)_{\rm spin}$, na pewno w $\otimes^3_{\rm s}\big(\mathbb{C}^3_{\rm fl}\otimes\mathbb{C}^2_{\rm spin}\big)$ znajdziemy reprezentację $\otimes^3_{\rm s}\mathbb{C}^3_{\rm fl}\otimes\otimes^3_{s}\mathbb{C}^2_{\rm spin}$. Ma ona wymiar 10×4. Zatem została reprezentacja $56-40=16$-wymiarowa. Odpowiada ona reprezentacji dołączonej $SU(3)_{rmfl}$ razy $\mathbb{C}^2$. Czyli mamy rozkład

$$\mathbb{C}^{10}\otimes\mathbb{C}^4\oplus\mathbb{C}^8\otimes\mathbb{C}^2,$$

co odpowiada dekupletowi (reprezentacji $\otimes^3_{\rm s}\mathbb{C}^3$) o spinie $\frac32$ i oktetowi (reprezentacji dołączonej) o spinie $\frac12$.

A oto "zawartość kwarkowa" multipletów barionowych:

$$\begin{array}{ccccccc} ddd & & ddu & & duu & & uuu\\ & dds & & dus & & uus & \\ & & dss & & uss & & \\ & & & sss & & & \end{array}$$

A oto stany spinowe barionów leżących w środku diagramu, gdzie występuje największa degeneracja:

$$\begin{array}{ll}
\Sigma^{*0} & d\uparrow u\uparrow s\uparrow,\\
& \dfrac{1}{\sqrt3}(d\uparrow u\uparrow s\downarrow + d\uparrow u\downarrow s\uparrow + d\downarrow u\uparrow s\uparrow),\\
& \dfrac{1}{\sqrt3}(d\downarrow u\downarrow s\uparrow + d\uparrow u\downarrow s\downarrow + d\downarrow u\uparrow s\downarrow),\\
& d\downarrow u\downarrow s\downarrow;\\
\Sigma^{0} & \dfrac{1}{\sqrt6}(2d\uparrow u\uparrow s\downarrow - d\uparrow u\downarrow s\uparrow - d\downarrow u\uparrow s\uparrow),\\
& \dfrac{1}{\sqrt6}(2d\downarrow u\downarrow s\uparrow - d\uparrow u\downarrow s\downarrow - d\downarrow u\uparrow s\downarrow);\\
\Lambda^{0} & \dfrac{1}{\sqrt2}(d\uparrow u\downarrow s\uparrow - d\downarrow u\uparrow s\uparrow),\\
& \dfrac{1}{\sqrt2}(d\uparrow u\downarrow s\downarrow - d\downarrow u\uparrow s\downarrow).
\end{array}$$

Ażeby dostać stany np. Σ^{*-} i Σ^- należy zamienić wszędzie u na d i odrzucić Λ^0.

Wszystkie fizycznie realizowane reprezentacje $SU(3)_{\rm fl}$ mają trialność 0 – to wynika z "bezbarwności".

12 Algebry Clifforda i grupy Spin

12.1 Algebry Clifforda

Będziemy oznaczać przez $\mathbb{K}(n)$ algebrę macierzy $n\times n$ nad $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$.

Niech $\phi_1, ..., \phi_n$ spełniają relacje

$$[\phi_i, \phi_j]_+ = 2\delta_{ij}\mathbb{1}. \tag{12.95}$$

Algebra łączna nad $\mathbb{R}$ generowana przez $\mathbb{1}, \phi_1, \dots, \phi_n$ spełniająca te relacje nazywa się *(rzeczywistą) algebrą Clifforda* $\mathrm{Cl}^+(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Cl}^+(n)$.

Niech $\gamma_1, ..., \gamma_n$ spełniają relacje

$$[\gamma_i, \gamma_j]_+ = -2\delta_{ij}\mathbb{1}. \tag{12.96}$$

Algebra łączna nad $\mathbb{R}$ generowana przez $\mathbb{1}, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ spełniająca te relacje nazywa się *(rzeczywistą) algebrą Clifforda* $\mathrm{Cl}^-(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Cl}^-(n)$.

Algebra łączna nad $\mathbb{C}$ generowana przez $\mathbb{1}, \phi_1, \dots, \phi_n$ spełniająca (12.95) nazywa się *zespoloną algebrą Clifforda* i będzie oznaczana przez $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^n)$. Jest ona izomorficzna algebrze nad $\mathbb{C}$ generowanej przez $\mathbb{1}, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ spełniających (12.96), gdzie izomorfizm jest zadany przez

$$\gamma_i := \mathrm{i}\phi_i. \tag{12.97}$$

Zarówno $\mathrm{Cl}^+(\mathbb{R}^n)$ jak i $\mathrm{Cl}^-(\mathbb{R}^n)$ są rzeczywistymi podalgebrami w $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^n) = \mathrm{Cl}(n, \mathbb{C})$. W dalszym ciągu będziemy traktować algebry $\mathrm{Cl}^+(\mathbb{R}^n)$ i $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^n)$ jako podstawowe obiekty, ponieważ $\mathrm{Cl}^-(\mathbb{R}^n)$ można otrzymać przez (12.97).

Bazę algebry $\mathrm{Cl}^+(\mathbb{R}^n)$ stanowią elementy $\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_k}$, gdzie $i_1 < \cdots < i_k$.

12.2 Algebry Clifforda jako $*$-algebry

Definicja 12.1 *Mówimy, że algebra* $\mathfrak{A}$ *nad* $\mathbb{C}$ *jest* $*$-algebrą *gdy jest wyposażona w antyliniowe odwzorowanie* $\mathfrak{A} \ni A \mapsto A^* \in \mathfrak{A}$ *takie, że* $(AB)^* = B^*A^*$, $A^{**} = A$ *i* $A \neq 0$ *implikuje* $A^*A \neq 0$. $*$ *nazywa się* inwolucją *lub* gwiazdką.

Definicja 12.2 *Jeśli* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *są* $*$*-algebrami, to homomorfizm* $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *spełniający* $\pi(A^*) = \pi(A)^*$ *nazywa się* $*$-homomorfizmem. *(Również definiujemy* $*$-izomorfizmy, $*$-automorfizmy, $*$-ideały*, etc.)*

Zespolone algebry Clifforda są $*$-algebrami, jeśli wyposażymy je w inwolucję jednoznacznie zdefiniowaną przez $\phi_i^* = \phi_i$. W szczególności, można zdefiniować *unitarne* elementy algebry Clifforda, które spełniają $A^*A = AA^* = \mathbb{1}$, a także samosprzężone elementy, spełniające $A = A^*$.

12.3 Parzyste algebry Clifforda

Odwzorowanie $\phi_i \mapsto -\phi_i$ (lub równoważnie $\gamma_i \mapsto -\gamma_i$) rozszerza się jednoznacznie do automorfizmu algebr Clifforda oznaczanego przez α. Elementy zachowywane przez ten automorfizm nazywają się parzystymi. Podalgebrę parzystych elementów w $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^n)$ onaczamy przez $\mathrm{Cl}_0(\mathbb{C}^n)$.

Jeśli rozpatrujemy $\mathrm{Cl}^+(\mathbb{R}^n)$ i $\mathrm{Cl}^-(\mathbb{R}^n)$ jako podalgebry $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^n)$, to zbiór parzystych elementów w obu algebrach się pokrywa. Będziemy go oznaczali przez $\mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^n)$ (nie wskazując na znak $\pm$).

Mamy izomorfizm

$$\mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^n) \simeq \mathrm{Cl}^-(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Aby się o nim przekonać zauważmy, że $\mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^n)$ jest generowana przez $\psi_j := \phi_j\phi_n$, $j = 1, \dots, n-1$, spełniające relacje

$$[\psi_j, \psi_k]_+ = -2\delta_{jk}\mathbb{1}.$$

Podobnie,

$$\mathrm{Cl}_0(\mathbb{C}^n) \simeq \mathrm{Cl}(\mathbb{C}^{n-1}).$$

12.4 Element objętości

Następujący element $\mathrm{Cl}^+(\mathbb{R}^n)$ nazywa się czasem *elementem objetości*:

$$\omega := \phi_1 \cdots \phi_n.$$

Oczywiście, $\mathrm{Cl}^+(\mathbb{R}^n)$ jest generowane przez $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}, \omega$. Mamy

$$\omega^2 = (-\mathbb{1})^{\frac{1}{2}n(n-1)}, \quad \omega\phi_i = -(-1)^n\phi_i\omega.$$

W $\mathrm{Cl}^-(\mathbb{R}^n)$ mamy zamiast tego

$$\mathrm{i}^n\omega = \gamma_1 \cdots \gamma_n.$$

Jeśli n jest parzyste, to ω (jak również $\mathrm{i}\omega$) implementuje automorfzm α:

$$\omega A\omega^{-1} = \alpha(A), \quad A \in \mathrm{Cl}(\mathbb{C}^n). \tag{12.98}$$

12.5 Konstrukcja Jordana-Wignera

Niech $n = 2m$. Rozważmy przestrzeń $\otimes^m\mathbb{C}^2$. Wprowadźmy w niej operatory

$$\begin{aligned} \phi_1 &:= \sigma_1, & \phi_2 &:= \sigma_2, \\ &\dots \\ \phi_{2m-1} &:= \sigma_3^{\otimes(m-1)} \otimes \sigma_1, & \phi_{2m} &:= \sigma_3^{\otimes(m-1)} \otimes \sigma_2. \end{aligned}$$

Latwo sprawdzić, że $\phi_1, \dots, \phi_{2m}$ spełniają relacje algebry Clifforda $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^{2m})$. Dostajemy zatem reprezentację tej algebry na $\otimes^m\mathbb{C}^2$. Korzystając z $\sigma_1\sigma_2 = \mathrm{i}\sigma_3$ dostajemy

$$\omega = \mathrm{i}^m\sigma_3^{\otimes m}.$$

Stwierdzenie 12.3 *Obraz tej reprezentacji jest równy $L(\otimes^m\mathbb{C}^2) = \mathbb{C}(2^m)$.*

Dowód. Wiemy, że $\mathbb{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 = \mathrm{i}\sigma_1\sigma_2$ rozpinają $\mathbb{C}(2)$. Zatem, posługując się konstrukcją Jordana-Wignera,

$$\mathbb{1}, \quad \phi_1 \cdots \phi_{2k}\phi_{2k+1}, \quad \phi_1 \cdots \phi_{2k}\phi_{2k+2}, \quad \phi_1 \cdots \phi_{2k}\phi_{2k+1}\phi_{2k+2}$$

rozpinają $\mathbb{1}_{\mathbb{C}^2}^{k\otimes} \otimes \mathbb{C}(2)$. □

Dla $n = 2m + 1$ dodajemy

$$\phi_{2m+1} := \pm\sigma_3^{\otimes(m+1)}.$$

$\phi_1, \dots, \phi_{2m+1}$ spełniają relacje algebry Clifforda $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^{2m+1})$. Dostajemy zatem dwie nierównoważne reprezentacje tej algebry na $\otimes^m\mathbb{C}^2$. Wtedy

$$\omega = \pm\mathrm{i}^m\mathbb{1}^{\otimes m} \otimes \sigma_3.$$

Twierdzenie 12.4 *Mamy izomorfizmy*

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^{2m}) \simeq \mathbb{C}(2^m), \tag{12.99}$$
$$\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^{2m+1}) \simeq \mathbb{C}(2^m) \oplus \mathbb{C}(2^m). \tag{12.100}$$

Dowód. Najpierw pokazujemy, że $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^{2m})$ jest izomorficzna z $\mathbb{C}(2^m)$.

Następnie kładziemy

$$\pi_\pm := \phi_1 \cdots \phi_{2m} \frac{(\phi_{2m+1} \pm 1\!\!1)}{2}.$$

Wtedy $\pi_\pm$ komutują z $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^{2m+1})$, mamy relacje $\pi_\pm^2 = \pi_\pm$, $\pi_+\pi_- = 0$, $\pi_+ + \pi_- = 1\!\!1$. Poza tym, $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^{2m+1})$ jest generowana przez $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^{2m}) \simeq \mathbb{C}(2^m)$ i $\pi_\pm$. To pokazuje (12.100). □

12.6 Reprezentacja Foka algebry Clifforda

Algebrę Clifforda można zinterpretować jako algebrę generowaną przez fermionowe operatory kreacji i anihilacji.

Załóżmy, że $n = 2m$. Definiujemy następujące elementy $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^n)$:

$$a_i := \frac{1}{2}(\phi_{2i-1} + \mathrm{i}\phi_{2i}), \quad a_i^* := \frac{1}{2}(\phi_{2i-1} - \mathrm{i}\phi_{2i}).$$

Mamy wtedy

$$[a_1, a_j]_+ = [a_i^*, a_j^*]_+ = 0, \quad [a_i, a_j^*]_+ = \delta_{ij} 1\!\!1.$$

Takie relacje, a dodatkowo $a_i\Omega = 0$, są spełnione przez standardowe fermionowe operatory kreacji i anihilacji na $\Gamma_{\mathrm{a}}(\mathbb{C}^m)$. Dostajemy zatem reprezentację $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^{2m})$ na $\Gamma_{\mathrm{a}}(\mathbb{C}^m)$.

Mamy operator liczby cząstek

$$N = \sum_{i=1}^m a_i^* a_i$$

i operator parzystości

$$(-1)^N = (-1)^{\sum_i a_i^* a_i} = \prod_{i=1} (-1)^{a_i^* a_i} = \prod_i (1\!\!1 - 2a_i^* a_i).$$

Mamy

$$[(-1)^N, a_i]_+ = [(-1)^N, a_i^*]_+ = 0, \quad \left((-1)^N\right)^2 = 1\!\!1.$$

Zatem $\pm(-1)^N$ spełniają razem z $\phi_1, \dots, \phi_{2m}$ relacje (12.95). Dostajemy zatem dwie nierównoważne reprezentacje $\mathrm{Cl}^\pm(\mathbb{R}^{2m+1})$ i $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^{2m+1})$ na $\Gamma_{\mathrm{a}}(\mathbb{C}^m)$.

Oczywiście, można również te algebry reprezentować na $\Gamma_{\mathrm{a}}(\mathbb{C}^{m+1})$ dostajemy wtedy reprezentację będącą sumą prostą powyższych reprezentacji.

12.7 Postać algebr Clifforda

Używając rezultatów otrzymanych powyżej można dostać następującą tabelkę:

n	$\mathrm{Cl}^+(\mathbb{R}^n)$	$\mathrm{Cl}^-(\mathbb{R}^n)$	$\mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^n)$	$\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^n)$	$\mathrm{Cl}_0(\mathbb{C}^n)$
0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$		$\mathbb{C}$	
1	$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$,	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$
2	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$
3	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$,	$\mathbb{H}$	$\mathbb{C}(2)\oplus\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(2)$
4	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(2)\oplus\mathbb{C}(2)$
5	$\mathbb{H}(2)\oplus\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)\oplus\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(4)$
6	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(4)\oplus\mathbb{C}(4)$
7	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(8)\oplus\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(8)\oplus\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(8)$
8	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(8)\oplus\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{C}(8)\oplus\mathbb{C}(8)$

Rozważmy na przykład $\mathrm{Cl}^-(4)$. $\mathrm{i} := \gamma_1$, $\mathrm{j} := \gamma_2$, ¿ $= \gamma_1\gamma_2$ daje identyfikację $\mathrm{Cl}^-(2)$ z $\mathbb{H}$. $\pi_\pm := \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_1\gamma_2\gamma_3)$ i $\gamma_3\gamma_4$ komutują z $\mathrm{Cl}^-(2)$. Poza tym,

$$\pi_+\gamma_3\gamma_4 = \gamma_3\gamma_4\pi_-.$$

Mamy homomorfizm

$$\mathbb{H}(2) \ni \begin{bmatrix} x_{++} & x_{+-} \\ x_{-+} & x_{--} \end{bmatrix} \mapsto x_{++}\pi_+ + x_{--}\pi_- + x_{+-}\pi_-\gamma_3\gamma_4 + x_{-+}\pi_+\gamma_3\gamma_4 \in \mathrm{Cl}^-(4).$$

A oto bardziej systematyczne wyprowadzenie powyższej tabelki. Rozważmy najpierw $n = 2m$. Połóżmy

$$\eta_+ := \mathrm{i}^m\phi_2\phi_4\cdots\phi_{2m}, \quad \eta_- := \phi_1\phi_3\cdots\phi_{2m-1}, \quad .$$

W reprezentacji Jordana-Wignera η_+ i η_- są rzeczywiste. Poza tym,

$$\begin{aligned}
&\eta_+^2 = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}, && \eta_-^2 = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}; \\
&\eta_+\phi_i = (-1)^m\phi_i\eta_+ = (-1)^m\overline{\phi_i}\eta_+, && \eta_-\phi_i = -(-1)^m\phi_i\eta_- = (-1)^m\overline{\phi_i}\eta, \quad i = 1,3,\dots,2m-1; \\
&\eta_+\phi_i = -(-1)^m\phi_i\eta_+ = -(-1)^m\overline{\phi_i}\eta_+, && \eta_-\phi_i = (-1)^m\phi_i\eta_- = -(-1)^m\overline{\phi_i}\eta, \quad j = 2,4,\dots,2m.
\end{aligned}$$

Wiemy, że $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^{2m}) = \mathbb{C}(2^m)$. Zatem

$$\begin{aligned}
m &\equiv 0 \mod (4), & \eta_+^2 &= \mathbb{1}, & \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{2m}) &= \{A \in \mathrm{Cl}(\mathbb{C}^{2m}) \ :\ \eta_+A = \overline{A}\eta_+\} = \mathbb{R}(2^m); \\
m &\equiv 1 \mod (4), & \eta_-^2 &= \mathbb{1}, & \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{2m}) &= \{A \in \mathrm{Cl}(\mathbb{C}^{2m}) \ :\ \eta_-A = \overline{A}\eta_-\} = \mathbb{R}(2^m); \\
m &\equiv 2 \mod (4), & \eta_+^2 &= -\mathbb{1}, & \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{2m}) &= \{A \in \mathrm{Cl}(\mathbb{C}^{2m}) \ :\ \eta_+A = \overline{A}\eta_+\} = \mathbb{H}(2^{m-1}); \\
m &\equiv 3 \mod (4), & \eta_-^2 &= -\mathbb{1}, & \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{2m}) &= \{A \in \mathrm{Cl}(\mathbb{C}^{2m}) \ :\ \eta_-A = \overline{A}\eta_-\} = \mathbb{H}(2^{m-1}).
\end{aligned}$$

Załóżmy, że $n = 2m+1$ jest nieparzyste. Wtedy ω należy do centrum $\mathrm{Cl}^+(\mathbb{R}^{2m+1})$ a $\mathrm{i}\omega$ należy do centrum $\mathrm{Cl}^-(\mathbb{R}^{2m+1})$.

Mamy $\omega^2 = (-1)^m$, $(\mathrm{i}\omega)^2 = (-1)^{m+1}$. Dlatego mamy izomorfizmy

$$\begin{aligned}
m \equiv 0 \mod (2), \quad & \mathrm{Cl}^+(\mathbb{R}^{2m}) \oplus \mathrm{Cl}^+(\mathbb{R}^{2m}) \ni (A_1, A_2) \mapsto \frac{1\!\!1 + \omega}{2} A_1 + \frac{1\!\!1 - \omega}{2} A_1 \in \mathrm{Cl}^+(\mathbb{R}^{2m+1}), \\
m \equiv 2 \mod (2), \quad & \mathbb{C}\mathrm{Cl}^+(\mathbb{R}^{2m}) \ni (A_1 + \mathrm{i}A_2) \qquad\qquad\qquad \mapsto A_1 + \omega A_1 \in \mathrm{Cl}^+(\mathbb{R}^{2m+1}).
\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}
m \equiv 0 \mod (4), \quad & \omega^2 = 1\!\!1, & \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{2m+1}) = \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{2m}) \oplus \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{2m}) = \mathbb{R}(2^m) \oplus \mathbb{R}(2^m); \\
m \equiv 1 \mod (4), \quad & \omega^2 = -1\!\!1, & \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{2m+1}) = \mathbb{C}\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{2m}) = \mathbb{C}(2^m); \\
m \equiv 2 \mod (4), \quad & \omega^2 = 1\!\!1, & \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{2m+1}) = \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{2m}) \oplus \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{2m}) = \mathbb{H}(2^{m-1}) \oplus \mathbb{H}(2^{m-1}); \\
m \equiv 3 \mod (4), \quad & \omega^2 = -1\!\!1, & \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{2m+1}) = \mathbb{C}\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{2m}) = \mathbb{C}(2^m).
\end{aligned}$$

12.8 Grupa Pin i Spin

Niech $v \in \mathbb{R}^n$. *Odbiciem względem* v nazywamy odwzorowanie

$$R_v y := y - 2\frac{\langle v|y\rangle}{\langle v|v\rangle} v.$$

Oczywiście, $R_v^2 = 1\!\!1$ i $R_v \in O(\mathbb{R}^n) \backslash SO(\mathbb{R}^n)$.

Twierdzenie 12.5 *Odbicia generują $O(\mathbb{R}^n)$. Zbiór parzystych iloczynów odbić jest równy $SO(\mathbb{R}^n)$.*

Dowód. Niech $A \in O(\mathbb{R}^n)$. Po kompleksyfikacji, można zastosować twierdzenie spektrane. Prowadzi ono do wniosku, że

$$\mathbb{R}^n = \underset{\phi \in [0,\pi]}{\oplus} \mathcal{V}_\phi, \quad A = \underset{\phi \in [0,\pi]}{\oplus} A_\phi,$$

gdzie na $\mathcal{V}_\phi$ dla $\phi \in \{0, \pi\}$, $A_\phi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ a dla $\phi \in]0, \pi[$,

$$A_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}.$$

(ew. razy identyczność). Zatem wystarczy zanalizować te przypadki. □

Dla $v \in \mathbb{R}^n$, zdefiniujmy element $\mathrm{Cl}^+(\mathbb{R}^n)$, odp. $\mathrm{Cl}^-(\mathbb{R}^n)$

$$\phi(v) := \sum_i v_i \phi_i, \quad \gamma(v) := \sum_i v_i \gamma_i.$$

Oczywiście,

$$\phi(v)^* = \phi(v), \quad \gamma(v)^* = -\gamma(v), \quad \phi(v)\phi(v)^* = \gamma(v)\gamma(v)^* = \langle v|v\rangle,$$

Załóżmy, że $\langle v|v\rangle = 1$. Wtedy $\pm\phi(v)$ i $\pm\gamma(v)$ są unitarnymi nieparzystymi elementami $\mathrm{Cl}^+(\mathbb{R}^n)$, odp. $\mathrm{Cl}^-(\mathbb{R}^n)$ i

$$\big(\pm\phi(v)\big)\phi(y)\big(\pm\phi(v)\big)^* = -\phi(R_v y), \tag{12.101}$$

$$\big(\pm\gamma(v)\big)\gamma(y)\big(\pm\gamma(v)\big)^* = -\gamma(R_v y). \tag{12.102}$$

Niech $Pin^+(\mathbb{R}^n)$ będzie grupą w $\mathrm{Cl}^+(\mathbb{R}^n)$ generowaną przez $\phi(v)$, $\langle v|v\rangle = 1$. Analogicznie, niech $Pin^-(\mathbb{R}^n)$ będzie grupą w $\mathrm{Cl}^+(\mathbb{R}^n)$ generowaną przez $\gamma(v)$, $\langle v|v\rangle = 1$.

Oczywiście, wszystkie elementy $Pin^\pm(\mathbb{R}^n)$ są unitarne. Definiujemy też grupę $Spin(\mathbb{R}^n)$ składającą się z parzystych elementów w $Pin^\pm(\mathbb{R}^n)$.

Jeśli $U \in Spin(\mathbb{R}^n)$, to istnieje $R_U \in SO(\mathbb{R}^n)$ taki, że

$$U\phi(y)U^* = \phi(R_U y),$$

Jeśli $U \in Pin^\pm(\mathbb{R}^n)\backslash Spin(\mathbb{R}^n)$, to istnieje $R_U \in O(\mathbb{R}^n)\backslash SO(\mathbb{R}^n)$ taki, że

$$U\phi(y)U^* = -\phi(R_U y).$$

Mamy równoważną definicję $Pin^\pm(\mathbb{R}^n)$: jest to zbiór elementów unitarnych w $\mathrm{Cl}^\pm(\mathbb{R}^n)$ takich, że

$$\{U\phi(v)U^* \ : \ v \in \mathbb{R}^n\} = \{\phi(v) \ : \ v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Zauważmy, że $R_U = R_{-U}$. $U \mapsto R_U$ definiują dwukrotne nakrycia:

$$\begin{gathered} 1 \to \mathbb{Z}_2 \to Spin(\mathbb{R}^n) \to SO(\mathbb{R}^n) \to 1, \\ 1 \to \mathbb{Z}_2 \to Pin^\pm(\mathbb{R}^n) \to O(\mathbb{R}^n) \to 1. \end{gathered}$$

12.9 Koincydencje niskowymiarowe

W niskich wymiarach mamy koincydencje:

$$\begin{aligned} Spin(\mathbb{R}^2) &\simeq SO(\mathbb{R}^2), \\ Spin(\mathbb{R}^3) &\simeq SU(\mathbb{C}^2), \\ Spin(\mathbb{R}^4) &\simeq SU(\mathbb{C}^2) \times SU(\mathbb{C}^2), \\ Spin(\mathbb{R}^5) &\simeq SU(\mathbb{H}^2), \\ Spin(\mathbb{R}^6) &\simeq SU(\mathbb{C}^4). \end{aligned}$$

Pokażmy drugą koincydencję.

$$Spin(\mathbb{R}^3) = \{a_0 1\!\!1 + a_1\phi_2\phi_3 + a_2\phi_3\phi_1 + a_3\phi_1\phi_2 \ : \ a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1\}, \tag{12.103}$$

$$SU(2) = \{a_0 1\!\!1 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 \ : \ a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1\}. \tag{12.104}$$

Niech

$$U\big(\mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^n)\big) := \{A \in \mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^n) \ : \ A^*A = 1\!\!1\}.$$

Zauważmy, że

$$Spin(\mathbb{R}^n) = U\big(\mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^n)\big), \quad n = 1,2,3,4,5,6 \tag{12.105}$$

$$Spin(\mathbb{R}^n) \subsetneq U\big(\mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^n)\big), \quad n \geq 6. \tag{12.106}$$

Aby to zobaczyć, wystarczy zauważyć, że inkluzja $\subset$ w (12.105) jest oczywista. Następnie należy policzyć wymiary. W tym celu przypomnijmy sobie:

$$\dim SO(n) = \frac{n(n-1)}{2}, \tag{12.107}$$

$$\dim SU(\mathbb{C}^n) = (n+1)(n-1), \quad U(\mathbb{C}^n) = n^2, \tag{12.108}$$

$$\dim SU(\mathbb{H}^n) = n(2n+1). \tag{12.109}$$

Dostajemy (drobne oszustwo!)

n	$\dim SO(n) = \dim Spin(n)$	$\dim U\big(\mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^n)\big)$
1	0	$0 = \dim O(1)$
2	1	$1 = \dim U(1)$,
3	3	$3 = \dim SU(\mathbb{H}) = \dim SU(2)$,
4	6	$6 = \dim SU(\mathbb{H}) \times SU(\mathbb{H}) = \dim SU(2) \times SU(2)$,
5	10	$10 = \dim SU(\mathbb{H}^2)$,
6	15	$15 = \dim SU(4)$,
7	21	$28 = \dim O(8)$.

12.10 Reprezentacje grupy $Spin(n)$

Grupa $Spin(2m)$ ma reprezentację w przestrzeni $\Gamma_{\mathrm{a}}(\mathbb{C}^m)$. Jest ona przywiedlna – rozkłada się na reprezentację o parzystej liczbie "cząstek" i reprezentację o nieparzystej liczbie. Te reprezentacje są już nieprzywiedlne.

Grupa $Spin(2m+1)$ ma reprezentację nieprzywiedlną w $\Gamma_{\mathrm{a}}(\mathbb{C}^m)$.

Wszystkie te reprezentacje nazywają się spinorowymi. Nie odpowiadają one reprezentacjom $SO(n)$.

13 Zastosowanie teorii grup w modelu standardowym i modelach wielkiej unifikacji

13.1 Model standardowy

Model standardowy oparty jest na grupie cechowania $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

Oznaczmy (samosprzężone) generatory $su(2)$ przez T_1, T_2, T_3. Stanowią one generatory tzw. słabego izospinu. Samosprzężony generator $u(1)$ oznaczamy przez Y. Jest to tzw. słaby hiperładunek, nie mylić z hiperładunkiem, który ma to samo oznaczenie.

Podstawowym założeniem modelu Weinberga-Salama (który jest częścią modelu standardowego opisującą oddziaływania słabe i elektromagnetyczne) jest to, że ładunek elektryczny Q pochodzi częściowo z $SU(2)$ a częściowo z $U(1)$. Wyrazić to można wzorem

$$Q = T_3 + Y. \tag{13.110}$$

(Stosujemy konwencję z podręcznika Srednicki'ego. Często zastępuje się Y przez $2Y$, tak by był spełniony wzór $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$, analogiczny do wzoru Gell-Manna – Nishijimy).

Poza bozonami cechowania – odpowiadającymi algebrze Liego $su(3) \oplus su(2) \oplus u(1)$ – w lagranżjanie występują naładowane cząstki odpowiadające różnym nieprzywiedlnym reprezentacjom (multipletom) grupy $SU(3) \oplus SU(2) \oplus U(1)$. Każda z nich posiada antycząstki posiadające odwrotną chiralność i ładunki. Można je podzielić następująco:

(1) Multiplet (albo więcej multipletów) zespolonych skalarnych bozonów (Higgsa) służących do złamania symetrii cechowania $SU(2) \times U(1)$.

(2) Kilka multipletów weylowskich (chiralnych) fermionów. Każdy multiplet występuje w 3 generacjach. Multiplety fermionów można podzielić na dwie rodziny

   (i) Leptony, które nie uczestniczą w oddziaływaniach silnych, czyli są singletami ze względu na $SU(3)$.

   (ii) Kwarki, które transformują się nietrywialnie względem $SU(3)$.

(Multiplet – nieprzywiedlna, na ogół wielowymiarowa reprezentacja grupy cechowania).

Istnieją dwie wersje modelu standardowego: pierwotna wersja, którą oznaczamy SM, nie zawierała neutrin prawochiralnych. W nowszej wersji, oznaczanej przez νSM są dodatkowo neutrina prawochiralne.

Będziemy stosowali nazewnictwo odnoszące się do pierwszej generacji.

13.2 Leptony

Leptony można podzielić na elektrony i neutrina. Elektrony są zarówno lewo- i prawochiralne. Mają tę samą masę. Z punktu widzenia oddziaływań e.m. i silnych można traktować je jako fermiony dirakowskie, czyli para fermion lewochiralny i prawochiralny. Oznaczane są przez $e = (e_\mathrm{L}, e_\mathrm{R})$, Mają one $Q = -1$. Antycząstka dla elektronu nazywa się pozytonem i jest oznaczana przez $\overline{e}$.

Neutrina mają $Q = 0$. Neutrina elektronowe, oznaczane ν_e lub $\nu_{e,\mathrm{L}}$, w SM są lewochiralne i mają masę zerową,

$(e_\mathrm{L}, \nu_{e,\mathrm{L}})$ tworzą dublet ze względu na $SU(2)$. Mamy

$$T_3 e_\mathrm{L} = -\frac{1}{2} e_\mathrm{L}, \quad T_3 \nu_{e,\mathrm{L}} = \frac{1}{2} \nu_{e,\mathrm{L}}.$$

Korzystając z (13.110), dostajemy stąd

$$Y e_\mathrm{L} = -\frac{1}{2} e_\mathrm{L}, \quad Y \nu_{e,\mathrm{L}} = -\frac{1}{2} \nu_{e,\mathrm{L}}.$$

e_R jest singletem dla $SU(2)$. Dlatego też (13.110) implikuje

$$Y e_\mathrm{R} = -e_\mathrm{R}.$$

Przy zestawianiu multipletów, wygodnie jest odwoływać się wyłącznie do multipletów lewochiralnych. Dlatego zamiast elektronu prawochiralnego bierzemy pod uwagę pozyton lewochiralny. Ma on $Q = 1$ i $T_3 = 0$. Oto jego hiperładunek:

$$Y \overline{e}_\mathrm{R} = \overline{e}_\mathrm{R}.$$

W νSM wprowadza się dodatkowe neutrino prawochiralne $\nu_{e,\mathrm{R}}$, które transformują się trywialnie ze względu na grupę cechowania. Przy zestawianiu multipletów bierzemy pod uwagę jego antycząstkę $\overline{\nu}_{e,\mathrm{R}}$, która jest lewochiralna.

Reasumując, mamy następujące multiplety lewochiralnych leptonów:

$$\begin{array}{ccc} L & := (e_{\mathrm{L}}, \nu_{e,\mathrm{L}}) & (1,2,-\frac{1}{2}), \\ \overline{E} & := \overline{e}_{\mathrm{R}} & (1,1,1), \\ \overline{N} & := \overline{\nu}_{e,\mathrm{R}} & (1,1,0). \end{array}$$

13.3 Skalar Higgsa

Aby zbudować niezmiennicze człony masowe w lagranżjanie potrzebujemy dodatkowego skalara, ϕ, który jest singletem dla $SU(3)$, dubletem dla $SU(2)$. Ma $Q = 0$ i izospin $-\frac{1}{2}$. Zatem $Y = \frac{1}{2}$. Czyli jego reprezentacja to

$$(1,2,\frac{1}{2}).$$

13.4 Kwarki

Mamy dwa kwarki, u i d. Na przykład, proton i neutron są zbudowane następująco:

$$p = uud, \quad n = udd.$$

Oto ich ładunek elektryczny:

$$Qu = \frac{2}{3}u, \quad Qd = -\frac{1}{3}d.$$

Są one trypletami ze względu na $SU(3)$ – transformują się wzgl. reprezentacji fundamentalnej.

Mamy też antykwarki:

$$Q\overline{u} = -\frac{2}{3}\overline{u}, \quad Q\overline{d} = \frac{1}{3}\overline{d}.$$

Transformują się wzgl. reprezentacji antyfundamentalnej.

Lewochiralne kwarki są dubletem ze wzgl. na $SU(2)$:

$$T_3 u_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}u_{\mathrm{L}}, \quad T_3 d_{\mathrm{L}} = -\frac{1}{2}d_{\mathrm{L}}.$$

Stąd

$$Y u_{\mathrm{L}} = \frac{1}{6}u_{\mathrm{L}}, \quad Y d_{\mathrm{L}} = \frac{1}{6}d_{\mathrm{L}}.$$

Prawochiralne kwarki są singletami dla $SU(2)$. Dla nich

$$T_3 u_{\mathrm{R}} = 0, \quad T_3 d_{\mathrm{R}} = 0.$$

Stąd

$$Y u_{\mathrm{R}} = \frac{2}{3}u_{\mathrm{R}}, \quad Y d_{\mathrm{R}} = -\frac{1}{3}d_{\mathrm{R}}.$$

Reasumując, mamy następujące multiplety lewochiralnych kwarków:

$$
\begin{aligned}
Q = (u_{\mathrm{L}}, d_{\mathrm{L}}) \qquad & (3, 2, \frac{1}{6}), \\
\overline{U} = \overline{u}_{\mathrm{R}} \qquad & (\overline{3}, 1, -\frac{2}{3}), \\
\overline{D} = \overline{d}_{\mathrm{R}} \qquad & (\overline{3}, 1, \frac{1}{3}).
\end{aligned}
$$

13.5 Lagranżjan modelu standardowego

Lagranżjan modelu standardowego jest singletem ze względu na grupę cechowania. Można wyróżnić w nim następujące człony:

(1) Człon kinetyczny dla pól cechowania.

(2) Człony kinetyczne dla fermionów.

(3) Człon kinetyczny dla bozonów skalarnych.

(4) Potencjał dla bozonów skalarnych ("kapelusz meksykański"?) – ze względu na renormalizowalność powinien to być wielomian maksymalnie 4 stopnia. Zakładamy, że jest niezmienniczy przy zamianie ϕ na $-\phi$.

(5) Wyrazy masowe – wyrazy 2-liniowe w fermionach. Muszą być singletami ze względu na grupę cechowania, i dlatego z regułu mnożone są przez bozon skalarny.

Niech ψ, ψ' transformują się zgodnie z reprezentacją fundamentalną SU(3). Wtedy niezmiennicze rzeczywiste dwuliniowe wyrażenia zbudowane z ψ, ψ' są postaci

$$
\overline{\psi}^{\alpha} \psi'_{\alpha}
$$

i wyrażenia sprzężone.

Niech ψ, ψ' transformują się zgodnie z reprezentacją fundamentalną SU(2). Wtedy niezmiennicze dwuliniowe wyrażenia zbudowane z ψ, ψ' są postaci

$$
\begin{aligned}
&\overline{\psi}^{i} \psi'_{i}, \\
&\epsilon^{ij} \psi_i \psi'_j,
\end{aligned}
$$

i wyrażenia sprzężone.

Jeśli mamy $\psi_1, \ldots, \psi_n$ mające ładunki $y_1, \ldots, y_n$ ze względu na $U(1)$, to $\psi_1 \cdots \psi_n$ jest niezmiennicze jeśli $y_1 + \cdots + y_n = 0$. Dlatego też mamy następujące możliwe wyrazy niekinetyczne w lagranżjanie ν SM (uwzględniamy jedynie fermiony lewochiralne)

$$
\overline{\phi}_i \phi^i, \quad \left(\overline{\phi}_i \phi^i\right)^2, \tag{13.111}
$$

$$
\epsilon^{ij} \phi_i \overline{E} L_j, \ \epsilon^{ij} \phi_i \overline{D}^{\alpha} Q_{\alpha j}, \ \overline{\phi}^{i} \overline{U}^{\alpha} Q_{\alpha i}, \tag{13.112}
$$

$$
\overline{\phi}^{i} L_i \overline{N}, \quad \overline{N} C \overline{N}. \tag{13.113}
$$

Fermiony prawochiralne występują w wyrażeniach sprzężonych do (13.112) i (13.113). α przebiega indeks kolorowy, i, j przebiegają indeksy $1, 2$. C jest macierzą sprzężenia ładunkowego. W SM tylko (13.111) i (13.112) są możliwe.

13.6 $SU(n)$

$SU(n)$ ma reprezentację fundamentalną $\mathbb{C}^n$ i antyfundamentalną $\overline{\mathbb{C}}^n$. Wśród reprezentacji nieprzywiedlnych są

$$\otimes_{\mathrm{s}}^p \mathbb{C}^n, \quad p = 1, 2, \ldots, \qquad\qquad \dim \otimes_{\mathrm{s}}^n \mathbb{C}^d = \frac{(d+n-1)!}{(d-1)!n!}.$$

$$\otimes_{\mathrm{a}}^q \mathbb{C}^n, \quad q = 1, \ldots, n-1, \qquad\qquad \dim \otimes_{\mathrm{a}}^n \mathbb{C}^d = \frac{n!}{d!(n-d)!}.$$

Mamy

$$\otimes_{\mathrm{a}}^q \mathbb{C}^n \simeq \otimes_{\mathrm{a}}^{n-q} \overline{\mathbb{C}}^n.$$
$$\otimes^2 \mathcal{Z} = \otimes_{\mathrm{s}}^2 \mathcal{Z} \oplus \otimes_{\mathrm{a}}^2 \mathcal{Z}.$$

A oto użyteczne relacje dla dowolnych dwóch przestrzeni $\mathcal{Z}, \mathcal{W}$:

$$\otimes_{\mathrm{s/a}}^p (\mathcal{Z} \oplus \mathcal{W}) \simeq \bigoplus_{j=0}^{p} \otimes_{\mathrm{s/a}}^j \mathcal{Z} \oplus \otimes_{\mathrm{s/a}}^{p-j} \mathcal{W}.$$

13.7 Rozszerzanie $SU(3) \otimes SU(2) \times U(1)$ do $SU(5)$

Poniższa analiza jest oparta częściowo na książce Srednicki'ego i artykule Baez-Huerta.

Mamy inkluzję

$$su(5) \supset su(3) \oplus su(2) \oplus u(1),$$

gdzie generator $u(1)$ ma postać

$$Y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & & & & \\ & -\frac{1}{3} & & & \\ & & -\frac{1}{3} & & \\ & & & \frac{1}{2} & \\ & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Fundamentalną reprezentację $SU(5)$ rozkłada się następująco:

$$5 \to (3, 1, -\frac{1}{3}) \oplus (1, 2, \frac{1}{2}).$$

Stąd,

$$\otimes_{\mathrm{a}}^4 5 = \overline{5} \quad \to \quad (\overline{3}, 1, \frac{1}{3}) \oplus (1, 2, -\frac{1}{2}). \tag{13.114}$$

Względem $SU(5)$, mamy $\otimes_{\mathrm{a}}^2 5 = 10$. Względem $SU(3)$ mamy $\otimes_{\mathrm{a}}^2 3 = \overline{3}$. Zatem

$$\begin{aligned} 10 = \otimes_{\mathrm{a}}^2 5 \quad &\to \quad \otimes_{\mathrm{a}}^2 (3, 1, -\frac{1}{3}) \oplus (3, 1, -\frac{1}{3}) \otimes (1, 2, \frac{1}{2}) \oplus \otimes_{\mathrm{a}}^2 (1, 2, \frac{1}{2}) \\ &= \quad (\overline{3}, 1, -\frac{2}{3}) \oplus (3, 2, \frac{1}{6}) \oplus (1, 1, 1). \end{aligned} \tag{13.115}$$

Wszystkie multiplety lewochiralne SM względem $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ znajdziemy w następujących dwóch multipletach względem $SU(5)$: (13.114) i (13.115).

13.8 Pola w GUT opartej na $SU(5)$

W GUT opartym na $SU(5)$, bez prawoskrętnego neutrina, poza bozonami cechowania parametryzowanymi przez $su(5)$, mamy następujące pola:

(1) Zespolone bozony skalarne

  (1) Bozon Φ w reprezentacji dołączonej odpowiedzialny za łamanie $SU(5)$ do $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Sprzęga się tylko do bozonów cechowania i ϕ.

  (2) Bozon ϕ w reprezentacji fundamentalnej odpowiedzialny za łamanie $SU(2) \times U(1)$ do $U(1)$.

(3) Weylowskie lewochiralne fermiony

  (1) Multiplet $\psi = (L, \overline{D}) = (e_{\mathrm{L}}, \nu_{\mathrm{L}}, \overline{d}_{\mathrm{R}})$ w reprezentacji $\overline{5}$ (antyfundamentanej).

  (2) Multiplet $\chi = (\overline{E}, Q, \overline{U}) = (\overline{e}_{\mathrm{R}}, u_{\mathrm{L}}, d_{\mathrm{L}}, \overline{u}_{\mathrm{R}})$ w reprezentacji 10 (antysymetrycznej).

Możliwe wyrazy niekinetyczne w lagranżjanie:

$$\begin{gathered}\mathrm{Tr}\Phi^2,\ \mathrm{Tr}\Phi^4,\ (\mathrm{Tr}\Phi)^2,\\ \overline{\phi}\cdot\phi,\ (\overline{\phi}\cdot\phi)^2,\ \overline{\phi}\cdot\Phi^2\phi,\\ \phi^i\psi^j\chi_{ij},\quad \epsilon^{ijklm}\overline{\phi}_i\chi_{jk}\chi_{lm}.\end{gathered}$$

Jeśli chcemy, żeby neutrina miały masę, musimy dodać pole ν_{R} będące singletem dla $SU(5)$ i wyraz

$$\overline{\phi}_i\psi^i\overline{\nu}_{\mathrm{R}}.$$

13.9 Rozszerzanie $SU(3) \otimes SU(2) \times U(1)$ do $Spin(10)$

Wszystkie multiplety lewochiralne SM względem $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ znajdziemy w następujących dwóch multipletach względem $SU(5)$: $\otimes_{\mathrm{a}}^4 5$ (13.114) i $\otimes_{\mathrm{a}}^2 5$ (13.115). Żeby dostać antycząstki wystarczy dodać $\otimes_{\mathrm{a}}^1 5$ i $\otimes_{\mathrm{a}}^3 5$. Aby dodać neutrina prawochiralne i ich antycząstki wystarczy dołączyć $\otimes_{\mathrm{a}}^0 5$ i $\otimes_{\mathrm{a}}^5 5$. Dostajemy przestrzeń $\Gamma_{\mathrm{a}}(\mathbb{C}^5)$. Przestrzeń ta rozkłada się na dwie nieprzywiedlne reprezentacje $Spin(10)$ (dwukrotnego nakrycia $SO(10)$) odpowiadające lewochiralnym i prawochiralnym cząstkom.

W poniższej liście c oznacza jeden z kolorów r, g, b, zaś c, c', c'' jest jedną z cyklicznych permutacji r, g, b. Piszemy $a_1 \cdots a_n$ zamiast $\frac{1}{\sqrt{n!}} a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$.

$1, \mathrm{L}$	$5, \mathrm{R}$	$10, \mathrm{L}$	$\overline{10}, \mathrm{R}$	$\overline{5}, \mathrm{L}$	$1, \mathrm{R}$
$\overline{\nu}_{\mathrm{R}} = 1$	$\overline{e}_{\mathrm{L}} = u$	$\overline{e}_{\mathrm{R}} = ud$	$e_{\mathrm{R}} = cc'c''$	$e_{\mathrm{L}} = cc'c''d$	$\nu_{\mathrm{R}} = cc'c''ud$
	$\overline{\nu}_{\mathrm{L}} = d$	$u^c_{\mathrm{L}} = cu$	$\overline{u}^c_{\mathrm{L}} = c'c''d$	$\nu_{\mathrm{L}} = cc'c''u$	
	$d^c_{\mathrm{R}} = c$	$d^c_{\mathrm{L}} = cd$	$\overline{d}^c_{\mathrm{L}} = c'c''u$	$\overline{d}^c_{\mathrm{R}} = c'c''ud$	
		$\overline{u}^c_{\mathrm{R}} = c'c''$	$u^c_{\mathrm{R}} = cud$		

13.10 Rozszerzanie $SU(3) \otimes SU(2) \times U(1)$ do $SU(2) \times SU(2) \times SU(4)$

W Teorii Pati-Salama zakładamy, że istnieje czwarty kolor "biały", oznaczany przez w reprezentujący leptony. Grupa $SU(4)$ działa w dwóch reprezentacjach: fundamentalnej z bazą r, g, b, w i antyfundamentalnej z bazą $\overline{r}, \overline{g}, \overline{b}, \overline{w}$.

"Lewa" grupa $SU(2)$ działa na $\mathbb{C}^2$ z bazą u_L, d_L. "Prawa" grupa $SU(2)$ działa na $\mathbb{C}^2$ z bazą u_R, d_R. Ozdnaczenia u i d odnoszą się teraz do "izospinu". Sprzężenie ładunkowe zamienia "izospin" i chiralność. Dlatego $\overline{u}_\mathrm{L} = d_\mathrm{R}$, $\overline{d}_\mathrm{L} = u_\mathrm{R}$.

Cząstki materii (łącznie z prawym neutrinem) organizujemy w cztery reprezentacje grupy $SU(2) \times SU(2) \times SU(4)$:

$(2,1,4)$	$(1,2,4)$	$(2,1,\overline{4})$	$(1,2,\overline{4})$
$\nu_\mathrm{L} = u_\mathrm{L} \otimes w$	$\nu_\mathrm{R} = u_\mathrm{R} \otimes w$	$\overline{e}_\mathrm{R} = u_\mathrm{L} \otimes \overline{w}$	$\overline{e}_\mathrm{L} = u_\mathrm{R} \otimes \overline{w}$
$e_\mathrm{L} = d_\mathrm{L} \otimes w$	$e_\mathrm{R} = d_\mathrm{R} \otimes w$	$\overline{\nu}_\mathrm{R} = d_\mathrm{L} \otimes \overline{w}$	$\overline{\nu}_\mathrm{L} = d_\mathrm{R} \otimes \overline{w}$
$u^c_\mathrm{L} = u_\mathrm{L} \otimes c$	$u^c_\mathrm{R} = u_\mathrm{R} \otimes c$	$\overline{d}^{\overline{c}}_\mathrm{R} = u_\mathrm{L} \otimes \overline{c}$	$\overline{d}^{\overline{c}}_\mathrm{L} = u_\mathrm{R} \otimes \overline{c}$
$d^c_\mathrm{L} = d_\mathrm{L} \otimes c$	$d^c_\mathrm{R} = d^c_\mathrm{R} \otimes c$	$\overline{u}^{\overline{c}}_\mathrm{R} = d_\mathrm{L} \otimes \overline{c}$	$\overline{u}^{\overline{c}}_\mathrm{L} = d_\mathrm{R} \otimes \overline{c}$

Możemy przeorganizować

$$\mathbb{C}^4 \oplus \overline{\mathbb{C}}^4 \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C} \simeq \Gamma_\mathrm{a}(\mathbb{C}^3),$$

używając słownika

$$\begin{aligned} w &= rgb, & \overline{w} &= 1, \\ \overline{r} &= gb, \quad \overline{g} = br, & \overline{b} &= rg. \end{aligned}$$

To daje $SU(4) \simeq Spin(6)$.

Również mamy

$$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C} \simeq \Gamma_\mathrm{a}(\mathbb{C}^2).$$

To daje $SU(2) \times SU(2) \simeq Spin(4)$. Zatem grupa $SU(2) \times SU(2) \times SU(4)$ to to samo co grupa $Spin(4) \times Spin(6)$. Oczywiście, $Spin(4) \times Spin(6)/\mathbb{Z}_2$ jest podgrupą $Spin(10)$.

14 Struktura algebr Liego

14.1 Nilpotentne i rozwiązalne algebry Liego

Niższą serią centralną nazywamy podalgebry $\mathcal{D}_k\mathfrak{g}$ zdefiniowane indukcyjnie

$$\mathcal{D}_1\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad \mathcal{D}_k\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathcal{D}_{k-1}\mathfrak{g}].$$

Serią pochodną nazywamy podalgebry

$$\mathcal{D}^1\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad \mathcal{D}^k\mathfrak{g} := [\mathcal{D}^{k-1}\mathfrak{g}, \mathcal{D}^{k-1}\mathfrak{g}].$$

$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathcal{D}\mathfrak{g} = \mathcal{D}_1\mathfrak{g} = \mathcal{D}^1\mathfrak{g}$ nazywamy *pochodną algebry* $\mathfrak{g}$.

Na przykład, $\mathcal{D}t(\mathbb{K}^n) = n(\mathbb{K}^n)$.

Twierdzenie 14.1 *$\mathcal{D}^k\mathfrak{g}$ i $\mathcal{D}_k\mathfrak{g}$ są ideałami charakterystycznymi w $\mathfrak{g}$. Jeśli $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ jest homomorfizmem, to $\phi(\mathcal{D}^k\mathfrak{g}) = \mathcal{D}^k\phi(\mathfrak{g})$, $\phi(\mathcal{D}_k\mathfrak{g}) = \mathcal{D}_k\phi(\mathfrak{g})$.*

Stwierdzenie 14.2 (1) *Jeśli $\mathfrak{a}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ jest przemienna, to $\mathfrak{a} \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

(2) *Jeśli $\mathfrak{a}$ jest przestrenią liniową taką, że $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{a} \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, to $\mathfrak{a}$ jest ideałem i $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ jest przemienna.*

Dowód. (1): Jeśli $A+\mathfrak{a}, B+\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, to $[A+\mathfrak{a}, B+\mathfrak{a}] = \mathfrak{a}$ oznacza $[A, B] \in \mathfrak{a}$. Więc $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$.
(2) wynika z $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$ i z (1).□

Mówimy, że algebra $\mathfrak{g}$ jest *nilpotentna*, jeśli $\mathcal{D}_k\mathfrak{g} = \{0\}$ dla pewnego k i *rozwiązalna*, jeśli $\mathcal{D}^k\mathfrak{g} = \{0\}$ dla pewnego k. Mówimy, że $\mathfrak{g}$ jest półprosta, jeśli nie ma rozwiązalnych ideałów.

Stwierdzenie 14.3 (1) *$\mathfrak{h}$ jest rozwiązalna $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}\mathfrak{h}$ jest rozwiązalna.*

(2) *$\mathfrak{h}$ jest nilpotentna $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}\mathfrak{h}$ jest nilpotentna.*

(3) *$\mathfrak{h}$ jest półprosta $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}\mathfrak{h}$ jest półprosta.*

Dowód. 5) $\Leftarrow$. Niech $\mathfrak{a}$ będzie niezerowym ideałem rozwiązalnym w $\mathbb{C}\mathfrak{h}$. Wtedy $\overline{\mathfrak{a}}$ też. Również $\mathfrak{b} := \mathfrak{a} + \overline{\mathfrak{a}}$ jest rozwiązalny. Wtedy $\mathbb{C}(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}) = \mathfrak{b}$. $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}$ jest niezerowym ideałem rozwiązalnym w $\mathfrak{h}$. □

Algebra $\mathfrak{n}(\mathbb{K}^n)$ ściśle górnotrójkątnych macierzy jest nilpotentna, jak również każda jej podalgebra. Można pokazać, że każda algebra nilpotentna jest izomorficzna do podalgebry $\mathfrak{n}(\mathbb{K}^n)$.

Twierdzenie 14.4 (1) *Każda podalgebra, obraz homomorficzny, suma prosta algebr nilpotentnych jest nilpotentna.*

(2) *Niech $\mathfrak{a}$ będzie podprzestrzenią w $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (a więc ideałem w $\mathfrak{g}$). Jeśli $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ jest nilpotentna, to $\mathfrak{g}$ też.*

(3) *$\mathfrak{g}$ jest nilpotentna $\Leftrightarrow$ $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ jest nilpotentna.*

Dowód. (2) Wiemy, że dla pewnego n, $\mathcal{D}_n(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) = \{0\}$. Z tego wynika, że $\mathcal{D}_n\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}$. Zatem $\mathcal{D}_{n+1}\mathfrak{g} = \{0\}$.
(3) $\Rightarrow$ jest oczywiste. By pokazać $\Leftarrow$ zauważmy, że $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ i zastosujmy (2). □

Algebra $t(\mathbb{K}^n)$ górnotrójkątnych macierzy jest rozwiązalna jak również każda jej podalgebra. Można pokazać, że każda algebra rozwiązalna jest izomorficzna do podalgebry $t(\mathbb{K}^n)$. Każda reprezentacja algebry rozwiązalnej na przestrzeni $\mathcal{V}$ ma obraz izomorficzny do podalgebry w $\mathfrak{t}(\mathcal{V})$.

Twierdzenie 14.5 (1) *Każda podalgebra, obraz homomorficzny, suma prosta algebr rozwiązalnych jest rozwiązalny.*

(2) *Niech $\mathfrak{a}$ będzie ideałem w $\mathfrak{g}$. Jeśli $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ są rozwiązalne, to $\mathfrak{g}$ też.*

(3) *$\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna $\Leftrightarrow$ $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ jest rozwiązalna.*

Dowód. (2) Niech $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ będzie kanonicznym homomorfizmem.

Niech $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) = 0$. Mamy $\pi(\mathcal{D}^n\mathfrak{g}) \subset \mathcal{D}^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$. Zatem $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) \subset \ker\pi = \mathfrak{a}$.

Niech $\mathcal{D}^k\mathfrak{a} = \{0\}$. Wtedy $\mathcal{D}^{k+n}\mathfrak{g} = \mathcal{D}^k\mathcal{D}^n\mathfrak{g} \subset \mathcal{D}^k\mathfrak{a} = \{0\}$.

(2) implikuje (3). $\square$

W twierdzeniu tym nie można zamienić "rozwiązalny" przez "nilpotentny", co pokazuje przykład $0 \to n(\mathbb{K}^n) \to t(\mathbb{K}^n) \to d(\mathbb{K}^n) \to 0$..

Twierdzenie 14.6 *Niech* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *będą ideałami w* $\mathfrak{g}$.

(1) *Jeśli* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *są rozwiązalne, to* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ *też.*

(2) *Jeśli* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *są nilpotentne, to* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ *też.*

Dowód. (1) Z rozwiązalności $\mathfrak{a}$ wynika rozwiązalność $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$. Mamy $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b} \simeq \mathfrak{a}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$, zatem $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ jest rozwiązalna. W ciągu dokładnym $0 \to \mathfrak{b} \to \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \to (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ wyrazy brzegowe są rozwiązalne, więc wyraz środkowy też.

(2) Rozważmy A_i, $i = 1, \dots 2k + 1$, z których każdy należy do $\mathfrak{a}$ lub $\mathfrak{b}$. Pokażemy, że

$$[A_1.[A_2, \cdots [A_{2k}, A_{2k+1}] \cdots]$$

należy do $\mathcal{D}_k\mathfrak{a}$ lub $\mathcal{D}_k\mathfrak{b}$.

Rzeczywiście, wtedy co najmniej $k + 1$ wyrazów należy do $\mathfrak{a}$ lub $\mathfrak{b}$. Załóżmy, że do $\mathfrak{a}$. Korzystamy następnie z tego, że $\mathcal{D}_j\mathfrak{a}$ jest ideałem charakterystycznym w $\mathfrak{a}$.

Zatem, jeśli $\mathcal{D}_k\mathfrak{a} = \mathcal{D}_k\mathfrak{b} = \{0\}$, to $\mathcal{D}_{2k+1}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \{0\}$. $\square$

Zatem w każdej alebrze Liego istnieje największy ideał rozwiązalny, zwany *radykałem*, i największy ideał nilpotentny.

14.2 Twierdzenie Liego

Twierdzenie 14.7 (Liego) *Niech* $\mathcal{V}$ *będzie przestrzenią zespoloną a* $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ *będzie rozwiązalną algebrą Liego. Wtedy istnieje* $\alpha \in \mathfrak{g}^\#$ *taki, że*

$$\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{g}) := \bigcap_{A \in \mathfrak{g}} \mathrm{Ker}\,(A - \alpha(A)) \neq \{0\}. \tag{14.116}$$

Przestrzeń $\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{g})$ nazwiemy *przestrzenią własną algebry* $\mathfrak{g}$ *dla pierwiastka* α. $\alpha \in \mathfrak{g}^\#$ dla którego ta przestrzeń jest niezerowa nazywamy *pierwiastkiem algebry* $\mathfrak{g}$.

Dowód Twierdzenia Liego opiera się na następującym stwierdzeniu.

Stwierdzenie 14.8 *Niech* $\mathcal{V}$ *będzie przestrzenią zespoloną,* $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ *będzie algebrą Liego i* $\alpha \in \mathfrak{g}^\#$. *Niech* $B \in gl(\mathcal{V})$ *spełnia*

$$[B, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}.$$

Wtedy B *zachowuje podprzestrzeń* $\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{g})$ *zdefiniowaną w (14.116).*

Dowód. Niech x należy do $\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{g})$ i $x_j := B^j x$, $j = 0, 1, \ldots$. Niech k będzie najmniejszą liczbą taką , że x_m jest kombinacją liniową $x_0, \ldots, x_{m-1}$. Wykażemy, że istnieje macierz $\alpha_{ij} \in \mathfrak{g}^\#$ taka, że $\alpha_{ij} = 0$, $i < j$, $\alpha_{ii} = \alpha$ i

$$Ax_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}(A) x_j. \tag{14.117}$$

Jest to oczywiste dla $i = 1$. Załóżmy, że to prawda dla $i = k$.

$$\begin{aligned} Ax_{k+1} = ABx_k &= [A, B]x_k + BAx_k \\ &= \sum_i \alpha_{ki}([A, B])x_i + \alpha_{ki}(A)x_{i+1}. \end{aligned}$$

Czyli

$$\alpha_{k+1,i}(A) = \alpha_{k,i}([A, B]) + \alpha_{k,i-1}(A),$$

co kończy dowód (14.117).

Niech $\mathcal{X}$ będzie przestrzenią rozpiętą przez $x_0, \ldots, x_k$. Jest ona B-niezmiennicza i $\mathfrak{g}$-niezmiennicza. Macierz $\mathfrak{g}$ obcięta do $\mathcal{X}$ jest górnotrójkątna i na diagonali ma α. Zatem, dla $A \in \mathfrak{g}$,

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{X}} A = k\alpha(A), \quad A \in \mathfrak{g}.$$

W szczególności,

$$0 = \mathrm{Tr}_{\mathcal{X}}[A, B] = k\alpha([A, B]).$$

Zatem $\alpha([A, B]) = 0$. Dlatego też, $\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij}$. Więc,

$$ABx = \alpha(A)Bx.$$

Dowód Tw. 14.7. Stosujemy indukcję względem $\dim \mathfrak{g}$. Dla $\dim \mathfrak{g} = 1$ jest to znany fakt.

Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $\dim \mathfrak{g} = k-1$. Niech $\dim \mathfrak{g} = k$. $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$ kowymiaru $j > 0$. Dowolna podprzestrzeń $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$ jest ideałem. W szczególności, niech $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathbb{C}B = \mathfrak{g}$. Z założenia indukcyjnego istnieje funkcjonał pierwiastkowy α_1 na $\mathfrak{g}_1$. $\mathrm{ad}(B)$ zachowuje $\mathfrak{g}_1$. Zatem, ze Stw. 14.8 wynika, że B zachowuje $\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{g})$. B posiada wektor własny $v \in \mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{g})$, czyli $Bv = \mu v$. Każdy $A \in \mathfrak{g}$ jest postaci $A = A_1 + tB$, $A_1 \in \mathfrak{g}_1$, $t \in \mathbb{K}$. Wtedy

$$(A_1 + tB)v = (\alpha_1(A) + t\mu)v.$$

□

Twierdzenie 14.9 *Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią zespoloną a $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mathfrak{g}$ *jest rozwiązalna.*

(2) *Istnieje ciąg niezmienniczych przestrzeni* $\{0\} = \mathcal{V}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{V}_n = \mathcal{V}$, $\dim \mathcal{V}_j = j$.

(3) *Istnieje baza w $\mathcal{V}$ taka, że $\mathfrak{g}$ jest zawarta w macierzach górnotrójkątnych.*

Dowód. (1)⇒(2) Stosujemy indukcję względem $\dim \mathcal{V}$. Dla $\dim \mathcal{V} = 1$ jest to oczywiste. Niech będzie prawdziwe dla $\dim \mathcal{V} = n$. Niech $\dim \mathcal{V} = n+1$. Na mocy Tw. Liego istnieje pierwiastek $\alpha \in \mathfrak{g}^\#$ z wektorem własnym $v \in \mathcal{V}$. Przestrzeń $\mathbb{C}v$ jest niezmiennicza. Dlatego mamy reprezentację ilorazową w $\mathcal{V}/\mathbb{C}v$, $\dim \mathcal{V}/\mathbb{C}v = n$. Zatem istnieją przestrzenie $\{0\} = \mathcal{W}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{W}_n = \dim \mathcal{V}/\mathbb{C}v$, $\dim \mathcal{W}_j = j$ niezmiennicze względem tej reprezentacji. Niech $\mathcal{V}_{j+1}$ będzie przeciwobrazem $\mathcal{W}_j$ względem homomorfizmu kanonicznego.

(2)⇒(3) Wybieramy bazę $e_1, \ldots, e_n$ taką, że $\mathcal{V}_j = \mathrm{Span}\{e_1, \ldots, e_j\}$.

(3)⇒(1) Podalgebra algebry rozwiązalnej jest rozwiązalna. □

Twierdzenie 14.10 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie zespoloną algebrą Liego. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mathfrak{g}$ *jest rozwiązalna.*

(2) *Istnieje ciąg ideałów* $\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ *taki, że* $\dim \mathfrak{g}_j = j$.

(3) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *jest nilpotentna.*

Dowód. (1)⇒(2) Rozważmy reprezentację $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g})$. $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset gl(\mathfrak{g})$ jest algebrą rozwiązalną. Zatem istnieje ciąg podprzestrzeni $\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$, $\dim \mathfrak{g}_j = j$, które są $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$-niezmiennicze. $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$-niezmienniczość oznacza bycie ideałem.

(2)⇒(1) Z tego, że $\mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_{j-1}$ jest 1-wymiarowa, wynika, że jest przemienna. Dlatego, ze Stw. 14.2 (1) dostajemy $[\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{j-1}$. Stąd $\mathcal{D}^k\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_{n-k}$.

(3)⇒(1) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest nilpotentne, więc rozwiązalna. $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest przemienna wiąc rozwiązalna. Zatem $\mathfrak{g}$ iest rozwiązalna.

(1)⇒(3) Rozważmy $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset gl(\mathfrak{g})$. W pewnej bazie, $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset t(\mathbb{C}^n)$. Zatem $[\mathrm{ad}(\mathfrak{g}), \mathrm{ad}(\mathfrak{g})] \subset n(\mathbb{C}^n)$. Więc $\mathrm{ad}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = [\mathrm{ad}(\mathfrak{g}), \mathrm{ad}(\mathfrak{g})]$ jest nilpotentna. Czyli, z Tw. 14.5 (3) wynika, że $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest nilpotentna. □

Stwierdzenie 14.11 *Każda nietrywialna skończenie wymiarowa reprezentacja nieprzywiedlna algebry rozwiązalnej jest* 1*-wymiarowa.*

Dowód. Zgodnie z Tw. Liego, każda algebra Liego działająca na skończenie wymiarowej przestrzeni posiada wektor własny. □

14.3 Dolny ciąg centralny

Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. *Dolny ciąg centralny* $\mathcal{C}_j\mathfrak{g}$ definiujemy indukcyjnie w sposób następujący: $\mathcal{C}_0\mathfrak{g} = \{0\}$. Jeśli zdefiniowaliśmy $\mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g}$, $\pi_{k-1}\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g}$ jest homomorfizmem kanonicznym, to

$$\mathcal{C}_k\mathfrak{g} := \pi_{k-1}^{-1}\left(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}/\mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g})\right).$$

(Automatycznie, $\mathcal{C}_k$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$, jako przeciwobraz ideału względem homomorfizmu).

Twierdzenie 14.12 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mathfrak{g}$ *jest nilpotentna.*

(2) *Istnieje ciąg ideałów* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_n = \{0\}$ *takich, że* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{j+1}$.

(3) *Istnieje* m *takie, że* $\mathcal{C}_m\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$.

Dowód. (1)⇒(2) jest oczywiste, jeśli położyć $\mathfrak{g}_j = \mathcal{D}_j\mathfrak{g}$.

(2)⇒(1). Pokazujemy indukcyjnie, że $\mathcal{D}_j\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_j$.

(2)⇒(3) Pokażemy indukcyjnie, że $\mathfrak{g}_{m-k} \subset \mathcal{C}_k\mathfrak{g}$. Dla $k = 0$, $\mathfrak{g}_m = \mathcal{C}_0\mathfrak{g} = \{0\}$.

Załóżmy, że $\mathfrak{g}_{m-(k-1)} \subset \mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g}$. Mamy

$$\begin{aligned}[]
[\mathfrak{g}/\mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g}, \pi_{k-1}(\mathfrak{g}_{m-k})] &= \pi_{k-1}\left([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{m-k}]\right) \\
\subset \ \pi_{k-1}(\mathfrak{g}_{m-(k-1)}) &\subset \pi_{k-1}(\mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g}) \ = \ \{0\}.
\end{aligned}$$

Zatem $\pi_{k-1}(\mathfrak{g}_{m-k}) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g}/\mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g})$. Więc, $\mathfrak{g}_{m-k} \subset \mathcal{C}_k\mathfrak{g}$.

(3)⇒(2).

$$\pi_{k-1}\left([\mathfrak{g}, \mathcal{C}_k\mathfrak{g}]\right) = [\pi_{k-1}(\mathfrak{g}), \pi_{k-1}(\mathcal{C}_k\mathfrak{g})] = [\mathfrak{g}/\mathcal{C}_k\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{g}/\mathcal{C}_k\mathfrak{g})] = \{0\}.$$

Zatem $[\mathfrak{g}, \mathcal{C}_k\mathfrak{g}] \subset \ker \pi_{k-1} = \mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{g}$. Stąd,

$$\mathcal{C}_m\mathfrak{g} \subset \cdots \subset \mathcal{C}_0\mathfrak{g}_0$$

spełnia warunki (2). □

14.4 Kryteria Cartana rozwiązalności

Twierdzenie 14.13 (Kryterium Cartana dla formy śladowej.) *Niech* $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ *będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mathfrak{g}$ *jest rozwiązalna.*

(2) $\mathrm{Tr}AB = 0$, $A \in \mathfrak{g}$, $B \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

(3) $\mathrm{Tr}AB = 0$, $A, B \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Lemat 14.14 *Niech* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ *będą podprzestrzeniami w* $L(\mathcal{V})$. *Połóżmy*

$$\mathfrak{b} := \{B \in L(\mathcal{V}) \ : \ \mathrm{ad}(B)\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}\}.$$

Niech $A \in \mathfrak{b}$. *Jeśli*

$$\mathrm{Tr}AB = 0, \quad B \in \mathfrak{b},$$

to A *jest nilpotentny.*

Dowód. Niech $A = S + N$ będzie kanonicznym rozkładem na część półprostą i nilpotentną. Niech $e_1, \ldots, e_n$ będzie bazą diagonalizującą S, tak że $Ae_j = \lambda_j e_j$. Niech $e^1, \ldots, e^n$ będzie bazą dualną.

Niech $\mathbb{L}$ będzie podzbiorem $\mathbb{K}$

$$\mathbb{L} := \{\sum r_j\lambda_j \ : \ r_j \in \mathbb{Q}\}.$$

Niech $f : \mathbb{L} \to \mathbb{Q}$ będzie funkcją $\mathbb{Q}$-liniową. Zdefiniujmy P przez $Pe_j = f(\lambda_j)e_j$. Mamy

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(S)|e_i)(e_j| &= (\lambda_i - \lambda_j)|e_i)(e_j|, \\ \mathrm{ad}(P)|e_i)(e_j| &= (f(\lambda_i) - f(\lambda_j))\,|e_i)(e_j| = f(\lambda_i - \lambda_j)|e_i)(e_j|. \end{aligned}$$

Zatem $\mathrm{ad}(P) = f(\mathrm{ad}(S)$. Można dobrać wielomian p o wolnym wyrazie zero taki, że $f(\lambda_i - \lambda_j) = p(\lambda_i - \lambda_j)$. Wtedy $\mathrm{ad}(P) = p(\mathrm{ad}(S))$. Ze Stw. 15.8 wynika, że $\mathrm{ad}(S)$ jako część półprosta $\mathrm{ad}(A)$ jest też wielomianem (bez wyrazu wolnego) od $\mathrm{ad}(A)$, tj. $\mathrm{ad}(S) = s(\mathrm{ad}(A))$. Ostatecznie, $\mathrm{ad}(P) = s(p(\mathrm{ad}(S)) = t(\mathrm{ad}(A)$, gdzie t jest wielomianem bez wyrazu wolnego. Z tego, że $\mathrm{ad}(A)\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}$ wynika, że $t(\mathrm{ad}(A))\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}$. Zatem $P \in \mathfrak{b}$. Więc P taki, że $Pe_j = \overline{\lambda}_j e_j$ należy do $\mathfrak{b}$. Dlatego,

$$0 = \mathrm{Tr} AP = \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j)\lambda_j. \tag{14.118}$$

Prawa strona (14.118) należy do $\mathbb{L}$, można więc na nią zadziałać funkcją f. Dostajemy

$$0 = \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j)^2.$$

Zatem $f(\lambda_1) = \cdots = f(\lambda_n) = 0$ (bo $f(\lambda_j) \in \mathbb{Q}$). Więc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. □

Dowód Tw. 14.13. (1)⇒(2) wynika z faktu, że znajdziemy bazę, w której $\mathfrak{g}$ są górnotrójkątne.

(2)⇒(1). Niech

$$\mathfrak{n} := \{C \in L(\mathcal{V}) \;:\; [C, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}.$$

Wtedy $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{n}$. Więc dla $A, B \in \mathfrak{g}$, $C \in \mathfrak{n}$,

$$\mathrm{Tr}[A, B]C = \mathrm{Tr} A[B, C] = 0.$$

Zatem

$$\mathrm{Tr} DC = 0, \;\; D \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \;\; C \in \mathfrak{n}.$$

Na podstawie Lematu 14.14, z (2) wynika, że wszystkie elementy $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ są nilpotentne. Zatem $\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna.

(2)⇒(3) jest oczywiste.

(3)⇒(2). Na mocy (2)⇒(1), $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest rozwiązalna. Ale $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest przemienna, więc rozwiązalna. Zatem $\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna. □

Twierdzenie 14.15 (Kryterium Cartana dla formy Killinga.) *Niech $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mathfrak{g}$ *jest rozwiązalna.*

(2) $\langle A|B\rangle_{\mathrm{ad}} = 0$, $A \in \mathfrak{g}$, $B \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

(3) $\langle A|B\rangle_{\mathrm{ad}} = 0$, $A, B \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Dowód. (1)$\Rightarrow$(2). $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset gl(\mathfrak{g})$ jest rozwiązalną algebrą Liego. Możemy zatem do niej zastosować Tw. 14.13 (1)$\Rightarrow$(2).

(2)$\Rightarrow$(1). Z Tw. 14.13 (2)$\Rightarrow$(1) wynika, że $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ jest rozwiązalna. Ale to jest równoważne temu, że $\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna.

(2)$\Rightarrow$(3) jest oczywiste.

(3)$\Rightarrow$(2). Z tego, że $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$ wynika, że form Killinga dla $\mathfrak{g}$ obcięta do $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ pokrywa sie z formą Killinga dla $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Zatem możemy zastosować (2)$\Rightarrow$(1) do $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ i wnioskować, że $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ jest rozwiązalna. Następnie powtarzamy argument, który używaliśmy w dowodzie Tw. 14.13, który implikuje rozwiązalność $\mathfrak{g}$. □

Dowód Tw. 2.10 (1)$\Rightarrow$(2): Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprosta. Rozważmy $\mathfrak{g}^\perp$ (względem formy Killinga). Wtedy $\mathfrak{g}^\perp$ jest ideałem dla którego forma Killinga jest równa 0. Zatem z Kryterium Cartana dla formy Killinga (Tw. 14.15) $\mathfrak{g}^\perp$ jest rozwiązalny. Z półprostoty $\mathfrak{g}^\perp = \{0\}$. Zatem forma Killinga jest niezdegenerowana. □

Dowód Tw. 2.12: Dowód analogiczny jak powyżej, z tą różnicą, że z Kryterium Cartana dla formy śladowej Tw. 14.13. □

Rozważmy przemienną algebrę $\mathbb{K}^n$ z bazą $e_1,\dots,e_n$. Dowolny operator $P \in L(\mathbb{K}^n)$ definiuje różniczkowanie na $\mathbb{K}^n$. Dlatego $\mathbb{R} \ni t \mapsto tP \in \mathrm{Der}(\mathbb{K}^n)$ jest homomorfizmem algebr Liego. Niech $f = 1 \in \mathbb{R}$ będzie bazą w $\mathbb{R}$. Rozważmy algebrę Liego $\mathfrak{g} := \mathbb{K}^n \rtimes_P \mathbb{K}$. Mamy

$$[e_i, f] = Pe_i, \quad [e_i, e_j] = 0, \quad [f, f] = 0.$$

Forma Killinga ma jedyny niezerowy wyraz dla

$$\langle f|f\rangle = \mathrm{Tr}P^2.$$

Aby to pokazać, liczymy

$$\mathrm{ad}(f) = -\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}(e_i) = -\begin{bmatrix} 0 & Pe_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oczywiście, $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = P\mathbb{K}^n$, która jest przemienna. Zatem algebra jest rozwiązalna.

Poza tym, łatwo sprawdzamy, że $\mathcal{D}_m(\mathfrak{g}) = P^m\mathbb{K}^n$. Dlatego $\mathfrak{g}$ jest nilpotentna wtedy i tylko wtedy gdy P jest nilpotentny.

14.5 Algebry półproste i reduktywne a algebry rozwiązalne

Przypomnijmy, że algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest półprosta gdy nie posiada niezerowych ideałów przemiennych, a jest *reduktywna* gdy jest sumą prostą półprostej i przemiennej algebry Liego.

Twierdzenie 14.16 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *$\mathfrak{g}$ jest algebrą półprostą.*

(2) *$\mathfrak{g}$ nie posiada niezerowych ideałów rozwiązalnych.*

(3) *Radykał algebry $\mathfrak{g}$ jest równy $\{0\}$.*

Dowód. (2)⇒(1) jest oczywiste

(1)⇒(2). Niech $\mathfrak{a}$ będzie niezerowym ideałem rozwiązalnym. Wtedy istnieje k takie, że $\mathcal{D}^{k-1}\mathfrak{a} \neq \{0\}$ i $\mathcal{D}^k\mathfrak{a} = \{0\}$. $\mathcal{D}^{k-1}\mathfrak{a}$ jest więc przemienne. Poza tym, jest to ideał charakterystyczny w $\mathfrak{a}$. Zatem jest to ideał w $\mathfrak{g}$.

(2)⇒(3) Radykał jest ideałem rozwiązalnym.

(3)⇒(1) Załóżmy, że $\mathfrak{a}$ jest niezerowym ideałem przemiennym. Radykał zawiera $\mathfrak{a}$, więc jest niezerowy. □

Twierdzenie 14.17 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie dowolną algebrą Liego i $\mathfrak{r}$ jej radykałem. Wtedy istnieje podalgebra półprosta $\mathfrak{a}$ taka, że $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \rtimes \mathfrak{a}$.*

Dowód. Udowodnimy tylko słabszy fakt, który mówi, że $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ jest pólprosta. Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy istnieje ideał rozwiązalny $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$. Niech $\mathfrak{r}_1$ będzie jego przeciwobrazem w $\mathfrak{g}$. Wtedy mamy $0 \to \mathfrak{r} \to \mathfrak{r}_1 \to \mathfrak{h} \to 0$. Ponieważ $\mathfrak{r}$ i $\mathfrak{h}$ są rozwiązalne, taki jest $\mathfrak{r}_1$. Ale $\mathfrak{r}$ jest największym ideałem rozwiązalnym w $\mathfrak{g}$. Zatem $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}$. Zatem $\mathfrak{h} = 0$. □

Twierdzenie 14.18 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *$\mathfrak{g}$ jest algebrą reduktywną.*

(2) *$\mathfrak{g}$ nie posiada nieprzemiennych ideałów rozwiązalnych.*

(3) *Radykał algebry $\mathfrak{g}$ jest przemienny.*

14.6 Operator Casimira

Niech $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego a $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ jej ideałem. Wybierzmy bazę $B_1, \ldots, B_n$ w $\mathfrak{b}$. Załóżmy, że macierz

$$b_{ij} = \mathrm{Tr}\ B_i B_j.$$

jest nieosobliwa. Niech $[b^{ij}]$ będzie jej odwrotnością. *Operator Casimira dla ideału* $\mathfrak{b}$ jest zdefiniowany jako

$$\mathcal{C}_\mathfrak{b} := \sum_{ij=1}^{n} B_i B_j b^{ij}.$$

Zauważmy, że operator Casimira nie zależy od wyboru bazy w $\mathfrak{b}$.

Twierdzenie 14.19 (1) *Operator Casimira komutuje z $\mathfrak{g}$.*

(2) $\mathrm{Tr}\mathcal{C}_\mathfrak{b} = \dim \mathfrak{b}$, *w szczególności $\mathcal{C}_\mathfrak{b} \neq 0$.*

(3) *Jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ i algebra $\mathfrak{g}$ działa nieprzywiedlnie w $\mathcal{V}$, to $\mathcal{C}_\mathfrak{b} = \frac{\dim \mathfrak{b}}{\dim \mathcal{V}} \mathbb{1}$.*

Dowód. (1). Niech $A \in \mathfrak{g}$. Z tego, że $\mathfrak{b}$ jest ideałem wynika, że

$$[A, B_i] = \sum_{k=1}^{n} t_i^k B_k.$$

Z niezmienniczości formy $\langle\cdot|\cdot\rangle_\rho$ wynika, że

$$\begin{aligned} 0 &= \langle [A,B_i]|B_j\rangle_\rho + \langle B_i|[A,B_j]\rangle_\rho \\ &= t_i^k b_{kj} + b_{ik} t_j^k. \end{aligned}$$

W skrótowym zapisie, $t^\# b - bt = 0$. Mnożąc przez odwrotność b z obu stron dostajemy $b^{-1}t^\# + tb^{-1} = 0$, czyli

$$0 = b^{ik} t_k^j + t_k^i b^{kj}.$$

Dlatego

$$\begin{aligned} [A,\mathcal{C}_\mathfrak{b}] &= \sum_{i,j=1}^n \left(\rho([A,B_i])\rho(B_j) + \rho(B_i)\rho([A,B_j])\right) b^{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(t_i^k B_k B_j + B_i t_j^k B_k\right) b^{ij} \;=\; 0. \end{aligned}$$

□

14.7 Reprezentacje algebr półprostych

Stwierdzenie 14.20 *Algebry półproste Liego nie posiadają nietrywialnych reprezentacji 1-wymiarowych.*

Dowód. Jądro takiej reprezentacji musiałoby być ideałem kowymiaru 1. Musiałby istnieć zatem ideał wymiaru 1, który byłby z konieczności przemienny, co jest niemożliwe. □

Stwierdzenie 14.21 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Wtedy $\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna $\Leftrightarrow$ wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne algebry $\mathfrak{g}$ są jednowymiarowe.*

Dowód. $\Rightarrow$. Niech $\pi : \mathfrak{g} \to L(\mathcal{V})$ będzie nietrywialną reprezentacją zespoloną. Wtedy istnieje $v \in \mathcal{V}$ i $\alpha \in \mathfrak{g}^\#$ takie, że $Av = \alpha(A)v$. Zatem $\mathbb{C}v$ jest podprzestrzenią niezmienniczą. Zatem jeśli $\mathcal{V}$ jest nieprzywiedlna, to $\dim \mathcal{V} = 1$.

$\Leftarrow$. Niech $\mathfrak{g}$ nie będzie rozwiązalna. Niech $\mathfrak{r}$ będzie radykałem $\mathfrak{g}$. Wtedy $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ jest nietrywialną algebrą półprostą. Niech $\mathfrak{g}/\mathfrak{r} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \mathfrak{a}_n$ będzie rozkładem na proste składniki. Wtedy $(\mathfrak{g}/\mathfrak{r})/(\mathfrak{a}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n) \simeq \mathfrak{a}_1$. Reprezentacja dołączona $\mathfrak{a}_1 \to gl(\mathfrak{a}_1)$ jest nieprzywiedlna i $\dim \mathfrak{a}_1 > 1$. Podnosi się ona do reprezentacji (oczywiście, również nieprzywiedlnej) alfgebry $\mathfrak{g}$. □

Mówimy, że reprezentacja jest *półprosta*, jeśli dla każdej podprzestrzeni niezmienniczej znajdziemy dopełniającą podprzestrzeń niezmienniczą.

Stwierdzenie 14.22 *Jeśli reprezentacja jest półprosta i skończenie wymiarowa, to daje się rozłożyć na sumę prostą reprezentacji nierzywiedlnych.*

Każda niezerowa przemienna algebra posiada niepółproste reprezentacje. Np

$$\mathbb{K} \ni \alpha \mapsto \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 14.23 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *$\mathfrak{g}$ jest półprosta.*

(2) *Każda reprezentacja $\mathfrak{g}$ jest półprosta.*

Dowód. (2)⇒(1). Niech $\mathfrak{b}$ będzie ideałem przemiennym w $\mathfrak{g}$. Reprezentacja ad : $\mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g})$ jest półprosta. $\mathfrak{b}$ jest podprzestrznią niezmienniczą. Zatem istnieje rozkład na podprzestrzenie niezmiennicze $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. Niezmienniczość względem ad oznacza bycie ideałem. Czyli $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Więc reprezentacje $\mathfrak{b}$ podnoszą się do reprezentacji $\mathfrak{g}$. Każda niezerowa przemienna algebra posiada niepółproste reprezentacje.

(1)⇒(2) Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego.

Krok 1. Załóżmy, że $\mathcal{Y}$ jest podprzestrzenią niezmienniczą kowymiaru 1 dla reprezentacji $\rho : \mathfrak{g} \to gl(\mathcal{X})$ i ρ obcięta do $\mathcal{Y}$ jest nieprzywiedlna. Pokażemy, że istnieje rozkład $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{T}$ na podprzestrzenie niezmiennicze.

Najpierw zauważmy, ża Stw. 14.20 pokazuje, że reprezentacja ilorazowa na $\mathcal{X}/\mathcal{Y}$ jest zerowa. Zatem $\rho(\mathcal{X}) \subset \mathcal{Y}$.

Oznaczmy ograniczenie ρ do $\mathcal{Y}$ przez ρ_0. Jeśli $\rho_0 = 0$, to $\rho(\mathfrak{g})\rho(\mathfrak{g})\mathcal{X} \subset \rho(\mathfrak{g})\mathcal{Y} = \{0\}$. Więc $\rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])\mathcal{X} = \{0\}$. Z półprostoty $\mathfrak{g}$ wynika, że $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, więc $\rho = 0$

Załóżmy więc, że $\rho_0 \neq 0$. Niech $\mathfrak{a} := \mathrm{Ker}\rho_0$. Z półprostoty $\mathfrak{g}$ wynika, że istnieje ideał $\mathfrak{b} \neq \{0\}$ taki, że $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. Reprezentacja ρ_0 (czyli też ρ) ograniczona do $\mathfrak{b}$ jest injektywna. Zatem forma śladowa na $\mathfrak{b}$

$$\langle A|B\rangle_\rho = \mathrm{Tr}\ \rho(A)\rho(B), \quad A, B \in \mathfrak{b},$$

jest nieosobliwa. Niech $\mathcal{C}_{\rho(\mathfrak{b})}$ będzie operatorem Casimira dla ideału $\rho(\mathfrak{b})$. Wtedy $\mathcal{C}_{\rho_0(\mathfrak{b})} = \mathcal{C}_{\rho(\mathfrak{b})}\Big|_{\mathcal{Y}}$ jest operatorem Casimira dla ideału $\rho_0(\mathfrak{b})$. Mamy $\mathrm{Tr}\mathcal{C}_{\rho_0(\mathfrak{b})} = \dim \mathfrak{b} \neq 0$,

$$\mathcal{C}_{\rho_0(\mathfrak{b})}\rho_0(A) = \rho_0(A)\mathcal{C}_{\rho_0(\mathfrak{b})}\rho_0(A), \quad A \in \mathfrak{g}.$$

Reprezentacja ρ_0 jest nieprzewiedlna, więc $\mathcal{C}_{\rho_0(\mathfrak{b})}$ jest skalarny. Więc $\mathrm{Ker}\mathcal{C}_{\rho_0(\mathfrak{b})} = \{0\}$. Obraz $\mathcal{C}_{\rho(\mathfrak{b})}$ leży w $\mathcal{Y}$. Więc $\mathcal{C}_{\rho(\mathfrak{b})}$ musi mieć nietrywialne jądro, które jest podprzestrzenią niezmienniczą dopełniającą do $\mathcal{Y}$.

Krok 2. Tak jak w Kroku 1, z tą różnicą, że nie zakładamy nieprzywiedlności ρ na $\mathcal{Y}$.

Stosujemy indukcję względem wymiaru $\mathcal{X}$. Niech $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Y}$ będzie nieprzywiedlną niezerową podprzestrzenią ρ-niezmienniczą. Rozważmy reprezentację ilorazową ρ' na $\mathcal{X}' := \mathcal{X}/\mathcal{Z}$ z podprzestrzenią niezmienniczą $\mathcal{Y}' := \mathcal{Y}/\mathcal{Z}$. Mamy $\dim \mathcal{X}' < \mathcal{X}$, $\dim \mathcal{X}'/\mathcal{Y}' = 1$. Zatem z założenia indukcyjnego wynika rozkład $\mathcal{X}' = \mathcal{Y}' \oplus \mathcal{R}'$ na sumę prostą podprzestrzeni ρ'-niezmienniczych. Niech $\mathcal{Y}, \mathcal{T}$ będą przeciwobrazami $\mathcal{Y}', \mathcal{T}'$ względem kanonicznej projekcji $\mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{Z}$. Wtedy, korzystając z tego, że $\rho(\mathfrak{g})\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$, dostajemy rozkład $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{T}$ na podprzestrzenie ρ-niezmiennicze.

Krok 3. Pokażemy, że dowolna reprezentacja jest półprosta.

Rozważmy reprezentację $\tau : \mathfrak{g} \to gl(\mathcal{V})$ i podprzestrzeń niezmienniczą $\mathcal{W}$. Zdefiniujmy nową reprezentację $\sigma : \mathfrak{g} \to gl(gl(\mathcal{V}))$

$$\sigma(A) := \mathrm{ad}(\tau(A)), \quad A \in \mathfrak{g}.$$

Niech

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &:= \{B \in gl(\mathcal{V}) \ : \ B\mathcal{V} \subset \mathcal{W}, \ B\Big|_{\mathcal{W}} = \lambda 1\!\!1_{\mathcal{W}}\}, \\ \mathcal{N} &:= \{B \in gl(\mathcal{V}) \ : \ B\mathcal{V} \subset \mathcal{W}, \ B\Big|_{\mathcal{W}} = 0\}.\end{aligned}$$

Jeśli wprowadzimy dowolny rozkład $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{U}$, to elementy $\mathcal{M}$ mają rozkład

$$B = \begin{bmatrix} \lambda 1\!\!1 & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oczywiście, $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$, $\dim \mathfrak{M}/\mathfrak{N} = 1$. Niech $A \in \mathfrak{g}$. Mamy

$$\tau(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}\sigma(A)B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda 1\!\!1 & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda 1\!\!1 & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a_{11}b_{12} - \lambda a_{12} - b_{12}a_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Zatem $\sigma(\mathfrak{g})\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$. Ograniczając σ do $\mathfrak{M}$ dostajemy reprezentację spełniającą założenia Kroku 2. Zatem $\mathcal{M} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{T}$, gdzie $\mathcal{T}$ jest niezmiennicze. Niech B będzie niezerowym elementem $\mathcal{T}$. Wtedy

$$B = \begin{bmatrix} \lambda 1\!\!1 & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda \neq 0.$$

Zatem $\mathrm{Ker}B \cap \mathcal{W} = \{0\}$. Mamy $B\mathcal{V} = \mathcal{W}$, dlatego $\dim \mathrm{Ker}B + \dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{V}$. Zatem $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathrm{Ker}B$. Mamy

$$\sigma(A)B = 0, \quad A \in \mathfrak{g},$$

Zatem

$$\tau(A)B = B\tau(A), \quad A \in \mathfrak{g}.$$

Stąd $\tau(A)\mathrm{Ker}B \subset \mathrm{Ker}B$. Czyli $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathrm{Ker}B$ jest rozkładem na podprzestrzenie τ-niezmiennicze.
□

14.8 Różniczkowania półprostej algebry Liego

Stwierdzenie 14.24 *Niech $\mathfrak{a}$ będzie półprostym idałem algebry Liego $\mathfrak{g}$. Wtedy $\mathfrak{a}$ jest ideałem charakterystycznym.*

Dowód. Mamy $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{a}$. Niech $\mathcal{D} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Wtedy

$$\mathcal{D}\mathfrak{a} = \mathcal{D}[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = [\mathcal{D}\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] + [\mathfrak{a}, \mathcal{D}\mathfrak{a}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] + [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}.$$

□

Stwierdzenie 14.25 *Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią zespoloną i $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego. Załóżmy, że*

(1) $\mathfrak{g}$ *nie posiada nietrywialnych niezmienniczych podprzestrzeni*

(2) $\mathbb{1} \notin \mathfrak{g}$.

Wtedy $\mathfrak{g}$ *jest półprosta.*

Dowód. Załóżmy, że $\mathfrak{g}$ posiada ideał rozwiązalny $\mathfrak{a}$. Na mocy Tw. Liego istnieje funkcjonał pierwiastkowy $\alpha \in \mathfrak{a}^{\#}$ taki, że

$$\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{a}) := \{v \in \mathcal{V} \ : \ Av = \alpha(A)v, \quad A \in \mathfrak{a}\} \neq \{0\}.$$

Ze Stwierdzenia 14.8 wynika i tego, że $\mathfrak{a}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$, wynika, że $\mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{a})$ jest podprzestrzenią niezmienniczą dla $\mathfrak{g}$. Zatem z (1), $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\alpha(\mathfrak{a})$. Stąd $A = \alpha(A)\mathbb{1}$, $A \in \mathfrak{a}$. Z (2) wynika, że $\alpha = 0$. Więc $\mathfrak{a} = \{0\}$, co oznacza, że $\mathfrak{g}$ jest półprosta. □

Lemat 14.26 *Jeśli* $\mathfrak{g}$ *jest półprosta, a* $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$ *jej rozkładem na proste ideały, to* $\mathrm{Der}\mathfrak{g} = \mathrm{Der}\mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Der}\mathfrak{a}_n$.

Dowód. Inkluzja $\subset$ jest oczywista.

Niech $\mathcal{D} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Ze Stw. 14.24 wynika, że ideały $\mathfrak{a}_i$ są niezmiennicze względem $\mathcal{D}$. Zatem $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{D}_n$. □

Twierdzenie 14.27 *Niech* $\mathfrak{g}$ *będzie półprostą algebrą Liego. Wtedy* $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ *jest izomorfizmem.*

Dowód. Jądro homomorfizmu dołączonego jest centrum. Centrum jest zerowe. Zatem ad jest injekcją.

Pokażmy surjektywność ad.

Załóżmy najpierw, że $\mathfrak{g}$ jest prosta. $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ jest podalgebrą w $gl(\mathfrak{g})$ nie zawierającą identyczności i nie posiadającą podprzestrzeni niezmienniczych. Dlatego, na podstawie Stwierdzenia 14.25 wnioskujemy, że $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ jest półprosta.

Jeśli $\mathfrak{g}$ jest półprosta, i $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$ jej rozkładem na proste ideały, to na mocy Lematu 14.26, $\mathrm{Der}\mathfrak{g} = \mathrm{Der}\mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Der}\mathfrak{a}_n$. Zatem $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ jest półproste.

$\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ jest ideałem w $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Z półprostoty $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ wynika, że istnieje ideał $\mathfrak{h}$ w $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ taki, że $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}$. Niech $\mathcal{D} \in \mathfrak{h}$, $A \in \mathfrak{g}$. Wtedy

$$0 = [\mathcal{D}, \mathrm{ad}(A)] = \mathrm{ad}(\mathcal{D}A).$$

Z injektywności ad wynika, że $\mathrm{ad}(\mathcal{D}A) = 0$. To implikuje $\mathcal{D}A = 0$. Zatem $\mathcal{D} = 0$. Czyli, $\mathfrak{h} = 0$. □

15 Nilpotentne algebry Liego

15.1 Struktura endomorfizmu liniowego

Niech $A \in L(\mathcal{V})$, gdzie $\mathcal{V}$ jest skończenie wymiarowa zespolona.

Twierdzenie 15.1 *Niech $\lambda \in \mathbb{C}$ Następujące warunki są równoważne:*

(1) $\mathrm{Ker}(\lambda \mathbb{1} - A) \neq \{0\}$.

(2) $\mathrm{Ran}(\lambda \mathbb{1} - A) \neq \mathcal{V}$.

(3) $\det(\lambda \mathbb{1} - A) = 0$.

Zbiór λ spełniających powyższe warunki nazywamy *spektrum* operatora A i oznaczamy $\mathrm{spec}A$.

Mówimy, że D jest *półprosty* (*diagonalizowalny*), gdy posiada bazę złożoną z wektorów własnych. Czyli jeśli $\mathrm{spec}D = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, to $\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(\lambda_i \mathbb{1} - D)$ i względem tego rozkładu $D = \bigoplus_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbb{1}_i$.

Mówimy, że N jest *nilpotentny*, gdy dla pewnego p, $N^p = 0$. Najmniejszą taką liczbę, że $N^p = 0$ nazywamy jego *stopniem nilpotencji.*

Twierdzenie 15.2 *Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią nad $\mathbb{C}$. Wtedy istnieje jednoznaczny rozkład $A = D + N$ na część półprostą i nilpotentną takie, że $DN = ND$.*

Dowód. Niech $\lambda \in \mathrm{spec}A$. Ciąg podprzestrzeni $\mathrm{Ker}(A - \lambda_i)^j$ jest rosnący, więc się stabilizuje dla dostatecznie dużych j. Niech p będzie najmniejszą liczbą taką, że $\mathrm{Ker}(A - \lambda)^p = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i)^{p+1}$. Zdefiniujmy wtedy

$$\mathcal{V}^{\lambda}(A) := \mathrm{Ker}(A - \lambda)^p = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathrm{Ker}(A - \lambda)^j.$$

Pokazujemy wtedy, że $\mathcal{V} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec}A} \mathcal{V}^{\lambda}(A)$. Kładąc $D = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec}A} \lambda$ i $N := A - D$ dostajemy rozkład. □

Operator N na n wymiarowej przestrzeni taki, że $N^{p-1} \neq 0$ i $N^p = 0$ nazywamy *elementarnym operatorem nilpotentnym p-tego stopnia.* Każdy taki operator można w odpowiedniej bazie przedstawić w postaci macierzy z jedynkami bezpośrednio nad diagonalą, którą oznaczymy N_p.

Twierdzenie 15.3 *Jeśli N jest nilpotentny, to istnieje rozkład $\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{V}_i$ taki, że N zachowuje $\mathcal{V}_i$ i $N\Big|_{\mathcal{V}_i}$ jest elementarnym operatorem nilpotentnym.*

Twierdzenie 15.4 *Niech $BD = DB$. Wtedy B zachowuje rozkład na podprzestrzenie własne operatora D.*

Twierdzenie 15.5 *Niech $\mathbb{R} \ni t \mapsto \phi(t) \in gl(\mathcal{V})$ będzie reprezentacją algebr Liego. Wtedy reprezentację możemy rozłożyć na nierozkładalne składowe postaci $t \mapsto t(\lambda \mathbb{1} + N_k)$.*

Twierdzenie 15.6 (1) *Niech $N \in L(\mathcal{V})$ będzie nilpotentny. Wtedy* $\mathrm{ad}_N \in L(L(\mathcal{V}))$ *też.*

(2) *Niech $D \in L(\mathcal{V})$ będzie nilpotentny. Wtedy* $\mathrm{ad}_D \in L(L(\mathcal{V}))$ *też.*

(3) *Niech $A \in L(cV)$ i niech $A = B + N$ będzie rozkładem na komutujące ze sobą operator półprosty i nilpotentny. Wtedy* $\mathrm{ad}_A = \mathrm{ad}_D + \mathrm{ad}_N$ *jest również takim rozkładem.*

Stwierdzenie 15.7 *Niech $A, B \in L(\mathcal{V})$. Jeśli istnieje k takie, że* $\mathrm{ad}(A)^k B = 0$*, to B zachowuje $\mathcal{V}^\lambda(A)$.*

Dowód. Niech
$$\mathcal{V}^\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A-\lambda)^m \ni x.$$

Załóżmy, że teza zachodzi, jeśli k zastąpimy przez $k-1$. Mamy

$$(A-\lambda)^n Bx = \sum_{i=1}^{n} (A-\lambda)^j [B,A](A-\lambda)^{n-j+1}x. \tag{15.119}$$

Mamy $\mathrm{ad}(A)^{k-1}[B,A] = 0$. Zatem na mocy założenia indukcyjnego, $[B,A]$ zachowuje $\mathrm{Ker}(A-\lambda)^m$.

Jeśli $n = 2m+1$, to w sumie (15.119) wszystkie składniki są równe zero, bo albo $n-j-1 \geq m$, i wtedy $(A-\lambda)^{n-j+1}x = 0$, albo $j \geq m$, i wtedy $y = [B,A](A-\lambda)^{n-j+1}x \in \mathrm{Ker}(A-\lambda)^m$, więc $(A-\lambda)^j y = 0$. □

Stwierdzenie 15.8 (1) *Niech $D \in gl(\mathcal{V})$ będzie półprosty. Wtedy* $\mathrm{ad}(D) \in gl(gl(\mathcal{V}))$ *jest półprosty.*

(2) *Niech $N \in gl(\mathcal{V})$ będzie półprosty. Wtedy* $\mathrm{ad}(N) \in gl(gl(\mathcal{V}))$ *jest półprosty.*

Dowód. (1) Niech $e_1, \dots, e_n$ będzie bazą taką, że $De_i = \lambda_i e_i$. Wtedy

$$\mathrm{ad}(D)|e_i\rangle\langle e_j| = (\lambda_i - \lambda_j)|e_i\rangle\langle e_j|.$$

(2) Niech $N^p = 0$. Wtedy $\mathrm{ad}(N)^{2p-1} = 0$. □

Stwierdzenie 15.9 *Niech $A = S + N$ będzie rozkładem $A \in L(\mathcal{V})$ na część półprostą i nilpotentną.*

(1) $\mathrm{ad}(A) = \mathrm{ad}(S) + \mathrm{ad}(N)$ *jest kanonicznym rozkładem* $\mathrm{ad}(A) \in gl(gl(\mathcal{V}))$ *na część półprostą i nilpotentną.*

(2) *Niech* $0 = [B,A]$*. Wtedy* $0 = [B,S] = [B,N]$.

Dowód. (1) Sprawdzamy, że $\mathrm{ad}(S)$ komutuje z $\mathrm{ad}(N)$.

(2) Istnieje wielomian s taki, że $S = s(A)$. Dlatego też, istnieje wielomian $\tilde{s}$ taki, że $\mathrm{ad}(S) = \tilde{s}(\mathrm{ad}(A))$. □

15.2 Twierdzenie Engela

Twierdzenie 15.10 *Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią zespoloną i $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego składającą się z operatorów nilpotentnych. Wtedy*

(1) *(**Twierdzenie Engela**) 0 jest funkcjonałem pierwiastkowym dla $\mathfrak{g}$, czyli istnieje $v \in \mathcal{V}$, $v \neq 0$ taki, że $Av = 0$, $A \in \mathfrak{g}$.*

(2) *Istnieje baza w $\mathcal{V}$ dla której $\mathfrak{g}$ jest podalgebrą macierzy ściśle górnotrójkątnych.*

(3) *$\mathfrak{g}$ jest nilpotentna.*

Lemat 15.11 *Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią zespoloną. Niech $\mathfrak{A} \subset L(\mathcal{V})$ będzie algebrą łączną składającą się z operatorów nilpotentnych. Wtedy istnieje $v \in \mathcal{V}$, $v \neq 0$ taki, że $Av = 0$, $A \in \mathfrak{A}$.*

Dowód. Można założyć, że $\mathfrak{A} \neq \{0\}$. Pokażemy najpierw, że $\mathfrak{A}$ posiada nietrywialną podprzestrzeń niezmienniczą. Załóżmy, że tak nie jest. Znajdziemy $y \in \mathcal{V}$, $B \in \mathfrak{A}$ takie, że $z := By \neq 0$. Wedy $\mathfrak{A}z$ jest niezerową podprzestrzenią niezmienniczą. Zatem $\mathfrak{A}z = \mathcal{V}$. Stąd istnieje $C \in \mathfrak{A}$ taki, że $Cz = y$. Czyli $CBy = y$, co oznacza, że CB nie jest nilpotentny. Ale $CB \in \mathfrak{A}$ (bo $\mathfrak{A}$ jest algebrą) – sprzeczność.

Stosując teraz indukcję względem wymiaru dostajemy jednowymiarową podprzestrzeń niezmienniczą. Z powodu nilpotentności, elementy $\mathfrak{A}$ muszą się na niej zerować. □

Lemat 15.12 *Niech $\mathfrak{A}$ będzie algebrą łączną generowaną przez algebrę Liego $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$. Wtedy dla każdego $C \in \mathfrak{A}$ istnieją $A_1, \dots, A_k \in \mathfrak{g}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ i $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ takie, że*

$$C = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i^{n_i}. \tag{15.120}$$

Dowód. Każdy element $\mathfrak{A}$ jest kombinacją liniową wyrażeń postaci.

$$B_1 \cdots B_n, \qquad B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{g}. \tag{15.121}$$

Wyrażenia typu (15.121) nazwiemy wyrażeniami długości n.

Niech $\phi \in \mathfrak{A}^\#$ zeruje się na wyrazach postaci (15.120). Trzeba pokazać, że $\phi = 0$. Pokażemy indukcyjnie, że ϕ zeruje się na wyrażeniach długości n

Załóżmy, że jest to prawda dla $n-1$. Oczywiście,

$$\phi\left(\sum_{\sigma \in S_n} B_{\sigma(1)} \cdots B_{\sigma(n)}\right) = \partial_{t_1} \dots \partial_{t_n} \phi\left((t_1 B_1 + \cdots + t_n B_n)^n\right)\Big|_{t_1 = \cdots = t_n = 0} = 0. \tag{15.122}$$

Ale

$$\sum_{\sigma \in S_n} B_{\sigma(1)} \cdots B_{\sigma(n)} = n! B_1 \cdots B_n + C$$

gdzie C jest kombinacją liniową wyrażeń długości $\leq n-1$. Więc $\phi(B_1 \cdots B_n) = 0$. □

Lemat 15.13 *Niech* $\dim \mathcal{V} = n$ *i* $A \in L(\mathcal{V})$*. Wtedy natępujące warunki są równoważne:*

(1) *A jest nilpotentny.*

(2) $\mathrm{Tr} A^k = 0$*,* $k = 1, \ldots, n$*.*

Dowód. (1)⇒(2) jest oczywisty.

(2)⇒(1). Niech $\mathrm{spec} A = \{\lambda_1, \ldots \lambda_k\}$ z krotnościami $m_1, \ldots, m_k$. Wtedy (2) oznacza

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \lambda_i^j = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{15.123}$$

Połóżmy $\mu_i := m_i \lambda_i$. (15.123) implikuje

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i \lambda_i^j = 0, \quad j = 0, \ldots, m-1. \tag{15.124}$$

Macierz $[\lambda_i^j]$ to macierz Vandermonda z wyznacznikiem $\prod\limits_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j)$. Istnienie niezerowego rozwiązania (15.124) oznacza, że $\prod\limits_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j) = 0$, czyli wszystkie λ_i są równe jakiemuś λ, Ale wtedy $\mathrm{Tr} A^k = n\lambda^k = 0$, więc $\lambda = 0$. Zatem (15.124) ma tylko zerowe rozwiązanie, zatem $\lambda_i = 0$. □

Lemat 15.14 *Niech* $\mathfrak{A} \subset L(\mathcal{V})$ *będzie algebrą łączną. Jeśli* $\mathrm{Tr} A = 0$*,* $A \in \mathfrak{A}$*, to wszystkie elementy* $\mathfrak{A}$ *są nilpotentne.*

Dowód. Natychmiastowa konsekwencja z Lematu 15.13. □

Lemat 15.15 *Niech* $\mathfrak{A} \subset L(\mathcal{V})$ *będzie algebrą łączną generowaną przez algebrę Liego* $\mathfrak{g}$ *składającą się z operatorów nilpotentnych. Wtedy wszystkie elementy* $\mathfrak{A}$ *są nilpotentne.*

Dowód. Potęgi operatorów nilpotentnych są nilpotentne. Więc z Lematu 15.12 wynika, że $\mathfrak{A}$ składa się ona z kombinacji liniowych operatorów nilpotentnych. Wobec tego, wszystkie operator w $\mathfrak{A}$ mają ślad równy 0. Wystarczy więc zastosować Lemat 15.14. □

Dowód Twierdzenia 15.10. (1) Niech $\mathfrak{A}$ będzie algebrą łączną generowaną przez $\mathfrak{g}$. Z lematu 15.11 wynika, że istnieje wspólny zerowy wektor własny dla $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{g}$.

(1) implikuje (2) przez indukcję.

(2) pociąga za sobą (3). □

15.3 Przestrzenie pierwiastkowe algebry nilpotentnej

Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią zespoloną a $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$ będzie algebrą Liego. Dla $\alpha \in \mathfrak{g}^\#$ definiujemy

$$\mathcal{V}_j^\alpha(\mathfrak{g}) := \bigcap_{A \in \mathfrak{g}} \mathrm{Ker}(A - \alpha(A)\mathbb{1})^j.$$

Jest to rodzina rosnąca ze względu na j. Definiujemy

$$\mathcal{V}^\alpha(\mathfrak{g}) := \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{V}_j^\alpha(\mathfrak{g}).$$

Przez spec $\mathfrak{g}$ oznaczamy zbiór pierwiastków algebry $\mathfrak{g}$, to znaczy $\alpha \in \mathfrak{g}^\#$ dla których $\mathcal{V}^\alpha(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$.

Twierdzenie 15.16 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie nilpotentną algebrą Liego. Wtedy*

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{spec}\ \mathfrak{g}} \mathcal{V}^\alpha(\mathfrak{g}).$$

Dla $A \in \mathfrak{g}$ zdefiniujmy

$$A_{\mathrm{nil}} := A - \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{spec}\ \mathfrak{g}} \alpha(A) 1\!\!1_{\mathcal{V}^\alpha(\mathfrak{g})}.$$

Wtedy $\mathfrak{g} \ni A \mapsto A_{\mathrm{nil}} \in gl(\mathcal{V})$ jest reprezentacją o wartościach w operatorach nilpotentnych. Poza tym, $\alpha([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że wszystkie $A \in \mathfrak{g}$ mają widmo jednopunktowe. Kładąc

$$\langle \alpha | A \rangle := \frac{\mathrm{Tr} A}{\dim \mathcal{V}}$$

mamy wtedy spec$A = \{\langle \alpha | A \rangle\}$. Więc $A - \langle \alpha | A \rangle$ ma widmo zerowe, więc są nilpotentne.

Niech istnieje $A \in \mathfrak{g}$ i spec$A = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Wtedy na mocy Tw. 15.7, każdy $B \in \mathfrak{g}$ zachowuje rozkład $\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{V}^{\lambda_i}(A)$. Zatem możemy zastosować skończoną indukcję. □

15.4 Przestrzenie pierwiastkowe w algebrach Liego

Stwierdzenie 15.17 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego i $\mathcal{D} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Niech*

$$\mathfrak{g}^\lambda(\mathcal{D}) := \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathrm{Ker}(\mathcal{D} - \lambda)^j$$

tak że

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{g}^{\lambda_i}(\mathcal{D}).$$

Wtedy

$$\left[\mathfrak{g}^\lambda(\mathcal{D}), \mathfrak{g}^\mu(\mathcal{D})\right] \subset \mathfrak{g}^{\lambda+\mu}(\mathcal{D}).$$

Dowód. Iterując

$$(\mathcal{D} - \lambda - \mu)[A, B] = [(\mathcal{D} - \lambda)A, B] + [A(\mathcal{D} - \mu)B],$$

dostajemy

$$(\mathcal{D} - \lambda - \mu)^n [A, B] = \sum \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} \left[(\mathcal{D} - \lambda)^j A, (\mathcal{D} - \mu)^{n-j} B\right].$$

Więc jeśli $(\mathcal{D} - \lambda)^k A = 0$ i $(\mathcal{D} - \mu)^m B = 0$, to $(\mathcal{D} - \lambda - \mu)^{k+m} [A, B] = 0$. □

Twierdzenie 15.18 *Niech* $\mathfrak{g}$ *będzie algebrą Liego. Niech* $\mathfrak{h}$ *będzie nilpotentną algebrą Liego i* $\rho : \mathfrak{h} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ *reprezentacją. Niech*

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{spec}\rho} \mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h})$$

będzie rozkładem na przestrzenie pierwiastkowe. Wtedy

$$[\mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h}), \mathfrak{g}^{\beta}(\mathfrak{h})] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}(\mathfrak{h}).$$

W szczególności, możemy założyć, że $\mathfrak{h}$ jest nilpotentną podalgebrą $\mathfrak{g}$ i reprezentacja jest zadana przez

$$\mathfrak{h} \ni H \mapsto \mathrm{ad}(H) \in gl(\mathfrak{g}).$$

Wśród pierwiastków mamy wtedy 0. Oczywiście, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. Zarówno $\mathfrak{h}$ jak i $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ są podprzestrzeniami niezmienniczymi.

15.5 Algebry Cartana–przypadek ogólny

Niech $\mathfrak{a}$ będzie podalgebrą algebry Liego $\mathfrak{g}$. *Normalizatorem* $\mathfrak{a}$ nazywamy

$$\mathrm{Nor}\mathfrak{a} := \{A \in \mathfrak{g} \ : \ [A, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}\}.$$

Stwierdzenie 15.19 $\mathrm{Nor}\mathfrak{a}$ *jest największą z podalgebr algebry* $\mathfrak{g}$ *zawierającą* $\mathfrak{a}$ *jako ideał.*

Mówimy, że $\mathfrak{h}$ jest podalgebrą Cartana algebry Liego $\mathfrak{g}$, gdy

(1) $\mathfrak{h}$ jest algebrą nilpotentną.

(2) $\mathrm{Nor}\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$.

Stwierdzenie 15.20 *Niech* $\mathfrak{h}$ *będzie nilpotentą podalgebrą w* $\mathfrak{g}$. *Następujące warunki są równoważne.*

(1) $\mathfrak{h}$ *jest podalgebrą Cartana w* $\mathfrak{g}$.

(2) $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$.

Dowód. (1)⇒(2). Oczywiście, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. Załóżmy, że nie ma równości. Oznaczmy przez ρ reprezentację

$$\mathfrak{h} \ni H \mapsto \mathrm{ad}(H) \in gl(\mathfrak{g}).$$

Reprezentacja ρ ograniczona do $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ składa się z samych endomorfizmów nilpotentnych. Tak samo, reprezentacja ilorazowa ρ' w $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$. Na mocy Tw. Engela (Tw. 15.10), istnieje $B + \mathfrak{h} \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$, $B + \mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}$, dla którego $\rho'(\mathfrak{h})(B + \mathfrak{h}) = 0$. Oznacza to, że $B \notin \mathfrak{h}$ i $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})B \subset \mathfrak{h}$. Zatem algebra generowana przez $\mathfrak{h}$ i B jest zawarta w normalizatorze $\mathfrak{h}$ i jest większa od $\mathfrak{h}$. Więc $\mathfrak{h}$ nie jest algebrą Cartana.

(2)⇒(1). Niech $C \in \mathrm{Nor}\mathfrak{h}$, $C = \sum_\alpha C_\alpha$, $C_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h})$. Dla $B \in \mathfrak{h}$ mamy $\mathrm{ad}(B)C_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h})$ i

$$\mathrm{ad}(B)C = \sum_\alpha \mathrm{ad}(B)C_\alpha \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}).$$

Dlatego $C_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$, czyli $C_\alpha = 0$, $\alpha \neq 0$. Zatem $C = C_0 \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. Czyli $\mathrm{Nor}\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. □

Stwierdzenie 15.21 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Każda jej podalgebra Cartana jest jej maksymalną podalgebrą nilpotentną.*

Dowód. Niech $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$, gdzie $\mathfrak{h}$ jest Cartana a $\mathfrak{n}$ jest nilpotentna. Rozważmy wstępujący ciąg centralny $\{0\} = \mathcal{C}_0\mathfrak{n} \subset \cdots \subset \mathcal{C}_m\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$. Niech k będzie najmniejszą z liczb dla których $\mathcal{C}_k\mathfrak{n} \not\subset \mathfrak{h}$. Niech $A \in \mathcal{C}_k\mathfrak{n}\backslash\mathfrak{h}$. Mamy

$$[A, \mathfrak{n}] \subset \mathcal{C}_{k-1}\mathfrak{n} \subset \mathfrak{h},$$

zatem $\mathfrak{h}$ jest ideałem algebry $\mathfrak{a}$ generowanej przez $\mathfrak{h}$ i A. Więc $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Nor}\mathfrak{h}$. Oczywście, $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{a}$. Zatem $\mathrm{Nor}\mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}$. □

Twierdzenie 15.22 *Niech $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ będzie formą Killinga na algebrze Liego $\mathfrak{g}$. Niech $\mathfrak{h}$ będzie jej podalgebrą Cartana.*

(1) *Jeśli $\alpha + \beta \neq 0$, to $\mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h})$ i $\mathfrak{g}^\beta(\mathfrak{h})$ są ortogonalne względem $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$.*

(2) *Rozkład*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{(\alpha,-\alpha)} \left(\mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}(\mathfrak{h})\right) \tag{15.125}$$

jest rozkładem na sumę prostą ortogonalnych podprzestrzeni.

Dowód. Niech $A \in \mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h})$, $B \in \mathfrak{g}^\beta(\mathfrak{h})$ i $C \in \mathfrak{g}^\gamma(\mathfrak{h})$. Wtedy

$$(\mathrm{ad}(A)\mathrm{ad}(B))^n\, C \in \mathfrak{g}^{(\alpha+\beta)n+\gamma}(\mathfrak{h}).$$

Ponieważ dla dużych n, $\mathfrak{g}^{(\alpha+\beta)n+\gamma}(\mathfrak{h}) = \{0\}$, więc $\mathrm{ad}(A)\mathrm{ad}(B)$ jest nilpotentny. Zatem

$$\langle A|B\rangle = \mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}(A)\mathrm{ad}(B) = 0.$$

15.6 Elementy półproste i nilpotentne w półprostych algebrach Liego

Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego nad $\mathbb{C}$.

Twierdzenie 15.23 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ *jest izomorfizmem.*

Dowód. $\mathrm{Ker}\mathrm{ad} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Dla półprostych $\mathfrak{g}$, centrum jest zerowe. Zatem ad jest injekcją.

Pokażemy teraz, że ad jest surjekcją. Niech $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \mathfrak{a}_n$ będzie rozkładem na ideały proste. (...) □

Twierdzenie 15.24 *Niech $A \in \mathfrak{g}$. Wtedy istnieją jedyne elementy $S, N \in \mathfrak{g}$ takie, że $\mathrm{ad}_A = \mathrm{ad}_S + \mathrm{ad}_N$ jest kanonicznym rozkładem na część półprostą i nilpotentną. Mamy $A = S + N$.*

Dowód. Mamy rozkład $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{spec}\ \mathrm{ad}(A)} \mathfrak{g}^\alpha(A)$. Zdefiniujmy $\mathcal{S}, \mathcal{N} \in L(\mathfrak{g})$, $\mathcal{S} = \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{spec}\ \mathrm{ad}(A)} \alpha$, $\mathcal{N} := \mathrm{ad}(A) - \mathcal{S}$. Z tego, że $\left[\mathfrak{g}^\alpha(A), \mathfrak{g}^\beta(A)\right] = \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}(A)$, wynika, że $\mathcal{S} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Dlatego $\mathcal{N} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Z Tw. 15.23 wynika, że istnieją $S, N \in \mathfrak{g}$ takie, że $\mathcal{S} = \mathrm{ad}(S)$, $\mathcal{N} = \mathrm{ad}(N)$. □

Stwierdzenie 15.25 *Niech $A, B \in \mathfrak{g}$ i $A = S + N$ będzie kanonicznym rozkładem na część półprostą i nilpotentną. Jeśli $[A, B] = 0$, to $[S, B] = [N, B] = 0$.*

Dowód. $\mathrm{ad}(A) = \mathrm{ad}(S) + \mathrm{ad}(N)$ jest kanonicznym rozkładem na część półprostą i nilpotentną. Poza tym, $0 = \mathrm{ad}([A, B]) = [\mathrm{ad}(A), \mathrm{ad}(B)]$. Więc $0 = [\mathrm{ad}(S), \mathrm{ad}(B)] = [\mathrm{ad}(N), \mathrm{ad}(B)]$. Ponieważ ad jest izomorfizmem, więc $0 = [S, B] = [N, B]$. □

16 Struktura algebr półprostych

16.1 Podalgebra Cartana dla algebr półprostych

Twierdzenie 16.1 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego nad $\mathbb{C}$ a $\mathfrak{h}$ jej podalgebrą. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *$\mathfrak{h}$ jest algebrą Cartana.*

(2) *$\mathfrak{h}$ jest maksymalną podalgebrą przemienną i wszystkie elementy $\mathfrak{h}$ są półproste.*

Poza tym, jeśli $\langle \cdot | \cdot \rangle$ jest niezdegenerowaną formą niezmienniczą, to jej ograniczenie do $\mathfrak{h}$ jest niezdegenerowane.

Dowód. (2)⇒(1) Niech $H \in \mathfrak{h}$, $B \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. Z półprostoty H wynika, że $[H, B] = 0$. Zatem algebra generowana przez $\mathfrak{h}$ i B jest przemienna. Z maksymalności $\mathfrak{h}$ jako algebry przemiennej wynika, że $B \in \mathfrak{h}$. Więc $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. Więc $\mathfrak{h}$ jest podalgebrą Cartana.

Niech $A, B \in \mathfrak{h}$ i $A = S + N$ będzie kanonicznym rozkładem na część półprostą i nilpotentną. Z przemienności $\mathfrak{h}$ wynika $[A, B] = 0$. Zatem $[N, B] = 0$. Dlatego $(\mathrm{ad}(N)\mathrm{ad}(N))^n = \mathrm{ad}(B)^n \mathrm{ad}(N)^n = 0$. Stąd $\mathrm{ad}(N)\mathrm{ad}(N)$ jest nilpotentny. Czyli, $\langle B | N \rangle = \mathrm{Tr}\mathrm{ad}(B)\mathrm{ad}(N) = 0$. Zatem N jest ortogonalny do $\mathfrak{h}$. Stąd $N = 0$.

(1)⇒(2) Z niezdegenerowania formy i rozkładu (15.125) wynika niezdegenerowanie formy na $\mathfrak{h}$.

Z nilpotentności $\mathfrak{h}$ i kryterium Cartana wynika, że

$$\langle C | [A, B] \rangle = 0, \quad A, B, C \in \mathfrak{h}.$$

Zatem $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ jest ortogonalne do $\mathfrak{h}$. Z niezdegerowania formy na $\mathfrak{h}$ wynika, że $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \{0\}$. Zatem $\mathfrak{h}$ jest przemienna.

Niech $A \in \mathfrak{h}$ i niech $A = S + N$ będzie kanonicznym rozkładem na część półprostą i nilpotentną. .... □

16.2 Zbiór pierwiastków półprostej algebry Liego

Ustalmy zespoloną półprostą algebrę Liego $\mathfrak{g}$ z algebrą Cartana $\mathfrak{h}$. Niech $\mathcal{R} \subset \mathfrak{h}^{\#}$ oznacza zbiór niezerowych funkcjonałów pierwiastkowych. Dla $\alpha \in \mathcal{R}$, będziemy pisać $\mathfrak{g}^{\alpha}$ zamiast $\mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h})$

Dla $\alpha \in \mathfrak{h}^{\#}$ definiujemy $\alpha^{\#} \in \mathfrak{h}$ wzorem

$$\langle \alpha^{\#} | A \rangle = \alpha(A).$$

Niech $\mathcal{R}^\# := \{\alpha^\# \ : \ \alpha \in \mathcal{R}\}$.

Przenosimy iloczyn z $\mathfrak{h}$ na $\mathfrak{h}^\#$ przez dualność:

$$\langle\alpha|\beta\rangle := \langle\alpha^\#|\beta^\#\rangle.$$

Dla $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ definiujemy *macierz Cartana* i *macierz Coxetera*

$$\begin{aligned} M(\alpha,\beta) &:= \frac{2\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle}, \\ C(\alpha,\beta) &:= \frac{\langle\alpha|\beta\rangle}{\sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}\sqrt{\langle\beta|\beta\rangle}}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 16.2 (1) *$\alpha \in \mathcal{R}$ implikuje $-\alpha \in \mathcal{R}$.*

(2) *$A_\pm \in \mathfrak{g}^{\pm\alpha}$ implikuje $[A_+, A_-] = \langle A_+|A_-\rangle\alpha^\#$.*

(3) *$\alpha \in \mathcal{R}$ implikuje $\langle\alpha|\alpha\rangle = \alpha(\alpha^\#) \neq 0$. Zatem możemy zdefiniować $H_\alpha := \frac{2\alpha^\#}{\langle\alpha|\alpha\rangle}$.*

(4) *Jeśli $A_\pm$ są niezerowymi elementami $\mathfrak{g}^{\pm\alpha}$, to podalgebra Liego generowana przez A_+, A_- i $\alpha^\#$ jest izomorficzna z $sl(2)$.*

(5) *$\alpha \in \mathcal{R}$ implikuje* $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$.

(6) *$H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$ implikuje*

$$\langle H_1|H_2\rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} \alpha(H_1)\alpha(H_2). \tag{16.126}$$

(7) *$\mathcal{R}^\#$ generuje liniowo $\mathfrak{h}$.*

(8) *Niech $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$. Wtedy $M(\alpha,\beta)$ jest liczbą całkowitą.*

(9) *Jeśli $\alpha \in \mathcal{R}$, $t \in \mathbb{C}$ i $t\alpha \in \mathcal{R}$, to $t = \pm 1$.*

(10) *Możliwe niezerowe wartości $M(\alpha,\beta)$ to*

  (i) *$M(\alpha,\beta) = M(\beta,\alpha) = \pm 2$, wtedy $C(\alpha,\beta) = \pm 1$ i $\beta = \pm\alpha$*

  (ii) *$M(\alpha,\beta) = M(\beta,\alpha) = \pm 1$, wtedy $C(\alpha,\beta) = \pm\frac{1}{2}$ i α, β mają tę samą długość.*

  (iii) *$M(\alpha,\beta) = \pm 2$, $M(\beta,\alpha) = \pm 1$, wtedy $C(\alpha,\beta) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ i β jest $\sqrt{2}$ razy dłuższy od α.*

  (iv) *$M(\alpha,\beta) = \pm 3$, $M(\beta,\alpha) = \pm 1$, wtedy $C(\alpha,\beta) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ i β jest $\sqrt{3}$ razy dłuższy od α.*

(11) *Niech $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \mathcal{R}$. Wtedy $M(\alpha,\beta) < 0$, istnieją $n_\pm \in \mathbb{Z}$ takie, że $-M(\alpha,\beta) = n_+ - n_-$, i*

$$\alpha + k\beta \in \mathcal{R}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n_- \leq k \leq n_+.$$

(12) *$\mathcal{R}$ jest niezmienniczy względem odbicia w hiperpłaszczyźnie prostopadłej do $\beta \in \mathcal{R}$. Czyli $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ implikuje $\alpha - \frac{2\langle\alpha|\beta\rangle\beta}{\langle\beta|\beta\rangle} \in \mathcal{R}$.*

Dowód. (1) Forma $\langle\cdot|\cdot\rangle$ jest nieosobliwa na $\mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$, oraz zerowa na $\mathfrak{g}^\alpha$ i $\mathfrak{g}^{-\alpha}$. Zatem $\dim \mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}^{-\alpha}$.

(2) Niech $H \in \mathfrak{h}$.

$$\begin{aligned} \langle [A_+, A_-] | H \rangle &= \langle A_+ | [A_-, H] \rangle \\ = \langle A_+ | A_- \rangle \alpha(H) &= \langle A_+ | A_- \rangle \langle \alpha^\# | H \rangle. \end{aligned}$$

Zatem, $[A_+, A_-] - \langle A_+ | A_- \rangle \alpha^\#$ jest ortogonalny do $\mathfrak{h}$, więc równy 0.

(3) Przypuśćmy, że $\alpha(\alpha^\#) = 0$. Niech $A_\pm \in \mathfrak{g}^{\pm\alpha}$, $\langle A_+ | A_- \rangle = 1$. Wtedy $[\alpha^\#, A_\pm] = \pm\alpha(\alpha^\#)A_\pm = 0$, $[A_+, A_-] = \alpha^\#$. Zatem A_+, A_- i $\alpha^\#$ rozpinają 3-wymiarową podalgebrę nilpotentną. Rozpatrzmy reprezentację dołączoną tej podalgebry. Operator $\mathrm{ad}(\alpha^\#)$ ma na przekątnej wyrazy zerowe, więc jest nilpotentny. Ale $\alpha^\# \in \mathfrak{h}$, więc $\mathrm{ad}(\alpha^\#)$ jest półprosty. Zatem $\mathrm{ad}(\alpha^\#) = 0$, skąd $\alpha^\# = 0$, co jest niezgodne z założeniem.

(4) Mnożąc $A_\pm$ przez odpowiednie czynniki dostajemy $\langle A_+ | A_- \rangle = \frac{2}{\langle \alpha^\# | \alpha^\# \rangle}$. Wtedy dostajemy $[H_\alpha, A_\pm] = \pm 2 A_\pm$, $[A_+, A_-] = H_\alpha$.

(5) Załóżmy, że $\dim \mathfrak{g}^\alpha > 1$. Wtedy $\dim \mathfrak{g}^{-\alpha} > 1$. Znajdziemy zatem $A_\pm \in \mathfrak{g}^{\pm\alpha}$, $B \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ takie, że $\langle A_+ | A_- \rangle = \frac{2}{\langle \alpha^\# | \alpha^\# \rangle}$ i $\langle A_+ | B \rangle = 0$. May $\mathrm{ad}(A^+)B = 0$ i $\mathrm{ad}(H_\alpha)B = -2B$. Zatem B jest wektorem najwyższej wagi dla reprezentacji $\mathrm{Span}(A_+, A_-, H) \simeq sl(2, \mathbb{C})$ z wagą -2. Reprezentacja taka nie jest skończenie wymiarowa. Więc $B = 0$.

(6) Niech $H \in \mathfrak{h}$, $A \in \mathfrak{g}$. Mamy rozkład $A = A_0 + \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} A_\alpha$ i $\mathrm{ad}(H)A = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} \alpha(H) A_\alpha$. Biorąc pod uwagę, że $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$ dostajemy

$$\mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}(H_1)\mathrm{ad}(H_2) = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} \alpha(H_1)\alpha(H_2).$$

(7) Jeśli wzór (16.126) przepiszemy jako

$$\langle H_1 | H_2 \rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} \langle H_1 | \alpha^\# \rangle \langle \alpha^\# | H_2 \rangle,$$

to widzimy, że $H \perp \mathrm{Span}\mathcal{R}^\#$ oznacza $\langle H | H \rangle = 0$.

(8) Z własności skończenie wymiarowych reprezentacji $sl(2\mathbb{C})$ wynika, że $\mathrm{ad}(H_\alpha)$ ma całkowite wartości własne. Dla $B \in \mathfrak{g}^\beta$ mamy

$$\mathrm{ad}(H_\alpha)B = \frac{2\langle \alpha^\# | \beta^\# \rangle}{\langle \alpha^\# | \alpha^\# \rangle} B.$$

(8) Niech $\beta = t\alpha$.

$$2t = \frac{2\langle \alpha^\# | \beta^\# \rangle}{\langle \alpha^\# | \alpha^\# \rangle}, \quad \frac{2}{t} = \frac{2\langle \alpha^\# | \beta^\# \rangle}{\langle \beta^\# | \beta^\# \rangle}$$

są całkowite, więc $t \in \left\{1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$. Wystarczy rozważyć $t = 2$.

Wybierzmy niezerowe $A_\pm$ jak w dowodzie (4) i $B_\pm \in \mathfrak{g}^{\pm 2\alpha}$. Algebra Liego $\mathrm{Span}(A_+, A_-, H) \simeq sl(2, \mathbb{C})$ działa na 5-wymiarową przestrzeń $\mathrm{Span}(A_+, A_-, B_+, B_-, H_\alpha)$ i ma w niej podprzestrzeń niezmienniczą $\mathrm{Span}(A_+, A_-, H)$. Jako algebra półprosta, ma podprzestrzeń dopełniającą 2-wymiarową, w której H_α ma wartości własne $2, -2$, co jest niemożliwe.

(9) Jeśli α i β nie są równoległe, to

$$M(\alpha,\beta)M(\beta,\alpha) = 4C(\alpha,\beta)^2 < 4.$$

Poza tym, $M(\alpha,\beta)$ i $M(\beta,\alpha)$ mają ten sam znak.

(10) Niech

$$n_+ := \sup\Big\{n \ : \ \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha} \neq \{0\}\Big\}, \quad n_- := \inf\Big\{n \ : \ \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha} \neq \{0\}\Big\}.$$

Rozważmy przestrzeń

$$\alpha := \bigoplus_{n=n_-}^{n_+} \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha}.$$

Wybierzmy niezerowe $B_\pm \in \mathfrak{g}^{\beta+n_\pm\alpha}$ oraz niech $A_\pm$ będzie jak w dowodzie (4). Mamy

$$[H_\alpha, B_\pm] = \frac{2\langle\alpha^\#|\beta^\#\rangle + 2n_\pm\langle\alpha^\#|\alpha^\#\rangle}{\langle\alpha^\#|\alpha^\#\rangle} B_\pm = (m(\alpha,\beta) + 2n_\pm)B_\pm.$$

Poza tym, $[A_\pm, B_\pm] = 0$, (bo $\mathfrak{g}^{\beta+(n_\pm\pm1)\alpha} = \{0\}$). Niech $\mathfrak{a}_\pm$ będą minimalnymi podprzestrzeniami niezmienniczymi dla $\mathrm{Span}(A_+, A_-, H) \simeq sl(2,\mathbb{C})$ zawierającymi $B_\pm$. Z teorii reprezentacji $sl(2,\mathbb{C})$ wynika, że $\dim\mathfrak{a}_- = -M(\alpha,\beta) - 2n_- + 1$, $\dim\mathfrak{a}_+ = M(\alpha,\beta) + 2n_+ + 1$. Zatem,

$$\begin{aligned} \dim\mathfrak{a}_+ + \dim\mathfrak{a}_- &= -2n_- + 2n_+ + 2 \\ = 2\dim\mathfrak{a} &> \dim\mathfrak{a}. \end{aligned}$$

Zatem $\mathfrak{a}_+ \cap \mathfrak{a}_- \neq \{0\}$. więc $\mathfrak{a}_+ = \mathfrak{a}_- = \mathfrak{a}$. Poza tym, $M(\alpha,\beta) = n_- + n_+$. □

16.3 Układy pierwiastków

Niech $\mathcal{R}$ będzie układem niezerowych wektorów $\mathcal{R}$ w przestrzeni euklidesowej $\mathcal{V}$. Dla $\alpha,\beta \in \mathcal{V}$ zdefiniujmy maierz Cartana i Coxetera tak jak wyżej. Mówimy, że $\mathcal{R}$ jest *układem pierwiastków*, gdy

(1) $\mathcal{R}$ rozpina $\mathcal{V}$.

(2) $\mathcal{R}$ jest niezmienniczy względem odbicia w hiperpłaszczyźnie prostopadłej do $\beta \in \mathcal{R}$. Czyli $\alpha,\beta \in \mathcal{R}$ implikuje $\alpha - \frac{2\langle\alpha|\beta\rangle\beta}{\langle\beta|\beta\rangle} \in \mathcal{R}$.

(3) Macierz Cartana jest całkowitoliczbowa.

(4) $\alpha \in \mathcal{R}$ i $t\alpha \in \mathcal{R}$ implikuje $t = \pm1$.

Twierdzenie 16.3 *Niech $\mathcal{R}$ będzie układem pierwiastków. Wtedy własności (9) i (10) Twierdzenia 16.2 są spełnione.*

16.4 Pierwiastki dodatnie

Niech $\mathcal{R}$ będzie układem pierwiastków w przestrzeni $\mathcal{V}$. Wybierzmy wektor $v_0 \in \mathcal{V}$ taki, że $\alpha(v_0) \neq 0$, $\alpha \in \mathcal{R}$. To pozwala nam podzielić $\mathcal{R}$ na dwa rozłączne podzbiory

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_+ &:= \{\alpha \in \mathcal{R} \ : \ \alpha(v_0) > 0\}, \\ \mathcal{R}_- &:= \{\alpha \in \mathcal{R} \ : \ \alpha(v_0) < 0\} = -\mathcal{R}_+. \end{aligned}$$

Mówimy, że $\alpha \in \mathcal{R}_+$ jest *nierozkładalny* (lub *prosty*), jeśli nie można go zapisać jako $\alpha = \beta + \gamma$, $\beta, \gamma \in \mathcal{R}_+$.

Mówimy, że $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}$ jest *układem fundamentalnym*, jeśli istnieje $v_0 \in \mathcal{V}$ takie, że $\mathcal{F}$ jest zbiorem pierwiastków nierozkładalnych w $\mathcal{R}$.

Twierdzenie 16.4 (1) *Jeśli $\alpha, \beta \in \mathcal{R}_+$ są nierozkładalne, to $\langle\alpha|\beta\rangle \leq 0$.*

(2) *Każdy $\alpha \in \mathcal{R}_+$ jest liniową kombinacją prostych pierwiastków z całkowitymi nieujemnymi współczynnikami.*

(3) *Zbiór prostych pierwiastów jest bazą przestrzeni $\mathcal{V}$.*

Dowód. (1) Jeśli $\alpha - \beta = \gamma \in \mathcal{R}$, to $\gamma \in \mathcal{R}_+$ lub $\gamma \in \mathcal{R}_-$. W pierwszym przypadku, $\alpha = \gamma + \beta$ nie jest pierwiastkiem prostym, w drugim $\beta = \alpha + (-\gamma)$ nie jest pierwiastkiem prostym. Zatem $\alpha - \beta \notin \mathcal{R}$. A więc, $\langle\alpha|\beta\rangle \leq 0$ wynika z Tw. 16.2.

(2) Jeśli $\alpha \in \mathcal{R}_+$ nie jest prosty, może być zapisany jako $\alpha = \beta + \gamma$, $\beta, \gamma \in \mathcal{R}_+$. Powtarzając ten krok dostajemy w końcu rozkład. Ponieważ $\{\alpha(v_0) \ : \ \alpha \in \mathcal{R}_+\}$ jest zbiorem skończonym, stanie się to po skończonej liczbie kroków.

(3) Wystarczy pokazać liniową niezależność. Załóżmy, że $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są proste i $m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n = 0$. Możemy założyć, że $m_1, \ldots, m_p \geq 0$ a pozostałe współczynniki są ≤ 0 i napisać

$$m_1\alpha_1 + \cdots + m_p\alpha_p = k_{p+1}\alpha_{p+1} + \cdots + k_n\alpha_n =: \gamma,$$

gdzie $k_{p+1}, \ldots, k_n \geq 0$. Mamy

$$0 \leq \langle\gamma|\gamma\rangle = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=p+1}^{n} m_i k_j \langle\alpha_i|\alpha_j\rangle \leq 0.$$

Zatem $\gamma = 0$. Stąd

$$0 = \gamma(v_0) = m_1\alpha_1(v_0) + \cdots + m_p\alpha_p(v_0),$$

co oznacza, że $m_i = 0$, $i = 1, \ldots, p$. Podobnie pokazujemy, że $m_j = 0$, $j = p+1, \ldots, n$. □

16.5 Grupa Weyla

Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią euklidesową. Dla $\alpha \in \mathcal{V}$ definiujemy

$$S_\alpha\beta := \beta - \frac{2\langle\beta|\alpha\rangle\alpha}{\langle\alpha|\alpha\rangle\alpha}.$$

Zauważmy, że jeśli kąt między α i β jest równy θ, to $S_\alpha S_\beta$ jest obrotem o kąt 2θ w płaszczyźnie zadanej przez α, β. W szczególności, jeśli $\theta = \pi/n$, to $(S_\alpha S_\beta)^n = \mathbb{1}$.

Niech $\mathcal{R}$ będzie układem pierwiastkowym. Grupą Weyla związaną z $\mathcal{R}$ nazywamy grupę generowaną przez $\{S_\alpha \ : \ \alpha \in \mathcal{R}\}$. Oznaczamy j a przez $\mathrm{Weyl}_\mathcal{R}$. Oczywiście, $\mathcal{R}$ jest zbiorem na którym działa $\mathrm{Weyl}_\mathcal{R}$.

Mówimy, że $\mathcal{C}$ jest *komórką Weyla*, jeśli jest domknięciem składowej spójnej

$$\mathcal{V} \backslash \bigcup_{\alpha \in \mathcal{R}} \pi_\alpha,$$

gdzie $\pi_\alpha := \{\beta \in \mathcal{V} \ : \ \langle\beta|\alpha\rangle = 0\}$. Mówimy, że π_α jest *ścianą komórki Weyla* $\mathcal{C}$, jeśli jej otwarta niepusta część zawarta w brzegu $\mathcal{C}$. Wtedy α ma określony znak na $\mathcal{C}$.

Twierdzenie 16.5 (1) *Dla każdej pary $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ komórek Weyla istnieje dokładnie jeden $W \in \mathrm{Weyl}_\mathcal{R}$ taki, że $W\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$.*

(2) *Niech $\mathcal{C}$ będzie komórką Weyla. Wtedy*

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}) := \{\alpha \in \mathcal{R} \ : \ \pi_\alpha \textit{ jest ścianą } \mathcal{C} \quad i \quad \alpha \geq 0 \quad na\ \mathcal{C}\}$$

jest układem fundamentalnym.

(3) *Niech $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}$ będzie układem fundamentalnym. Wtedy*

$$\mathcal{C}(\mathcal{F}) := \{\beta \in \mathcal{V} \ : \ \langle\beta|\alpha\rangle \geq 0, \ \alpha \in \mathcal{F}\}$$

jest komórką Weyla.

(4) *Niech $\alpha \in \mathcal{R}$. Wtedy $\mathcal{W}\alpha = \mathcal{R}$.*

16.6 Reprezentacje algebr Liego

Rozważmy reprezentację algebry Liego $\mathfrak{g}$ na przestrzeni zespolonej $\mathcal{V}$. Dla uproszczenia notacji będziemy zakładać, że $\mathfrak{g} \subset gl(\mathcal{V})$. Ustalmy algebrę Cartana $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. $\beta \in \mathfrak{h}^\#$ nazywamy *wagą*, gdy odpowiadająca jej *przestrzeń wagowa*

$$\mathcal{V}^\beta := \{v \in \mathcal{V} \ : \ Hv = \beta(H)v, \quad H \in \mathfrak{h}\}$$

jest niezerowa. Zbiór wag oznaczamy przez $\mathcal{W}(\mathcal{V})$. *Krotność wagi* β jest równa $m^\beta(\mathcal{V}) := \dim \mathcal{V}^\beta$.

Twierdzenie 16.6 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego.*

(1) *Niech $\alpha \in \mathcal{R}$, $\beta \in \mathcal{W}(\mathcal{V})$. Wtedy*

$$\frac{2\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle} \in \mathbb{Z}.$$

(2) *Niech $\alpha \in \mathcal{R}$, $\beta \in \mathcal{W}(\mathcal{V})$ Wtedy istnieją $n_\pm \in \mathbb{Z}$ takie, że $-\frac{2\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle} = n_+ - n_-$, i*

$$\alpha + k\beta \in \mathcal{R}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n_- \leq k \leq n_+.$$

(3) *$\mathcal{W}(\mathcal{V})$ jest niezmienniczy względem odbicia w hiperpłaszczyźnie prostopadłej do $\beta \in \mathcal{R}$. Czyli $\alpha \in \mathcal{W}(\mathcal{V})$, $\beta \in \mathcal{R}$ implikuje $\alpha - \frac{2\langle\alpha|\beta\rangle\beta}{\langle\beta|\beta\rangle} \in \mathcal{W}(\mathcal{V})$.*

Niech $L_{\mathcal{R}}$ oznacza kratę rozpiętą przez $\mathcal{R}$ – *kratę pierwiastkową*. Niech $L_{\mathcal{W}}$ oznacza *kratę wagową*, zadaną przez

$$L_{\mathcal{W}} := \left\{ \beta \in \mathfrak{h}^{\#} \ : \ \frac{2\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle} \in \mathbb{Z}, \ \alpha \in \mathcal{R} \right\}.$$

Wtedy $L_{\mathcal{R}}$ jest podkratą w $L_{\mathcal{W}}$.

16.7 Konstrukcja Schura-Weyla

Diagramem Younga będziemy nazywali nierosnący ciąg liczb naturalnych lub zer $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$, od pewnego miejsca zerowy. Czasami bierzemy pod uwagę tylko niezerowe elementy, dostając ciąg skończony. Rysujemy go w postaci ułożonych obok na siebie kwadratów (okienek), po λ_i w $i$tym wierszu. Wielkością diagramu Younga nazywamy $|\lambda| := \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots$.

Dualny diagram Younga jest zdefiniowany jako

$$\lambda'_k := \max\{m \ : \ \lambda_m \geq k\}.$$

Tablicą Younga nazywamy diagram Younga z wpisanymi w okienka kolejne liczby naturalne $1, \ldots, |\lambda|$. Na przykład, można wpisać liczby po kolei. Wtedy będziemy utożsamiać diagram z tablicą.

Dualną tablicą Younga nazywamy tablicę Younga odbitą w przekątnej. Odpowiada ona dualnemu diagramowi Younga.

Niech τ będzie tablicą Younga o wielkości n. Wiążemy z nią dwie podgrupy w S_n:

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{row},\tau} &= \{\text{permutacje z } S_n \text{ nie mieszające elementów w wierszach}\} \\ S_{\mathrm{col},\tau} &= \{\text{permutacje z } S_n \text{ nie mieszające elementów w kolumnach}\}. \end{aligned}$$

Oczywiście,

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{row},\tau} &= S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \cdots, \\ S_{\mathrm{col},\tau} &= S_{\lambda'_1} \times S_{\lambda'_2} \times \cdots. \end{aligned}$$

Definiujemy następujące rzuty w algebrze grupowej $C[S_n]$:

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathrm{row},\tau} &:= \frac{1}{|S_{\mathrm{row},\tau}|} \sum_{\sigma \in S_{\mathrm{row},\tau}} \sigma, \\ \Theta_{\mathrm{col},\tau} &:= \frac{1}{|S_{\mathrm{col},\tau}|} \sum_{\sigma \in S_{\mathrm{col},\tau}} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma. \end{aligned}$$

Niech

$$\mathfrak{A}_\tau = \Theta_{\mathrm{row},\tau}\Theta_{\mathrm{col},\tau} C[S_n]$$

Jest to przestrzeń niezmiennicza dla prawej regularnej reprezentacji grupy S_n. Nazwijmy ją $(\pi_\tau, \mathfrak{A}_\tau)$.

Twierdzenie 16.7 (1) *π_τ są nieprzywiedlnymi reprezentacjami grupy S_n.*

(2) *Każda nieprzywiedlna reprezentacja S_n jest postaci π_τ.*

(3) *$\pi_{\tau_1} \simeq \pi_{\tau_2}$ wtedy i tylko wtedy gdy diagramy Younga tablic τ_1 i τ_2 są takie same.*

(4) *$\pi_{\tau'}$ jest równoważna iloczynowi reprezentacji znakowej i π_τ.*

16.8 Reprezentacje $SL(n, \mathbb{C})$

Rozważmy przestrzeń $\mathcal{V}$. Rozważmy reprezentację grupy $\rho : G \to GL(\mathcal{V})$, albo algebry Liego $\rho : \mathfrak{g} \to gl(\mathcal{V})$. Mamy wtedy naturalne reprezentacje $\otimes^n \rho : G \to GL(\otimes^n \mathcal{V})$, $\mathrm{d}\otimes^n \rho : \mathfrak{g} \to gl(\otimes^n \mathcal{V})$

Mamy naturalną reprezentację S_n na $\otimes^n \mathcal{V}$. Reprezentacja grupy S_n komutuje z $\otimes^n \rho$ i $\mathrm{d}\otimes^n \rho$. Dlatego też komutuje z rzutami $\Theta_{\mathrm{row},\tau}$ i $\Theta_{\mathrm{col},\tau}$. Zdefiniujmy

$$\mathcal{V}_\tau := \Theta_{\mathrm{row},\tau}\Theta_{\mathrm{col},\tau} \otimes^n \mathcal{V},$$

gdzie τ jest pewną tablicą Younga. Jest to podprzestrzeń niezmiennicza dla $\otimes^n \rho$. Niech ρ_τ oznacza reprezentację $\otimes^n \rho$ obciętą do $\mathcal{V}_\tau$.

W szczególności rozważmy grupę $GL(n, \mathbb{C})$ i jej reprezentację fundamentalną na $\mathbb{C}^n$. Zauważmy, że dla τ będącego kolumną o wysokości n mamy $\rho_\tau(g) = \det g$. Dlatego też po obcięciu do $SL(n, \mathbb{C})$ dostajemy reprezentację trywialną.

Dla τ będącego kolumną wysokości $n - 1$ na $GL(n, \mathbb{C})$ dostajemy reprezentację, która macierzy przyporządkowuje macierz dopełnień algebraicznych. Dlatego też, na $SL(n, \mathbb{C})$ dostajemy reprezentację kontragradientną.

Widać zatem, że dla grupy $SL(n, \mathbb{C})$ wystarczy ograniczyć się do diagramów Younga, których wszystkie kolumny są niższe niż n.

Niech τ będzie diagramem Younga. Diagram sprzężony defniujemy następująco. Kolumny o długości m zastępujemy przez kolumny o długości $n - m$. Następnie porządkujemy kolumny w kolejności malejącej. Diagram sprzężony oznaczamy przez $\overline{\tau}$.

Twierdzenie 16.8 (1) *ρ_τ są nieprzywiedlnymi reprezentacjami grupy $SL(n, \mathbb{C})$.*

(2) *Każda skończenie wymiarowa nieprzywiedlna reprezentacja $SL(n, \mathbb{C})$ jest postaci ρ_τ.*

(3) *$\rho_{\tau_1} \simeq \rho_{\tau_2}$ wtedy i tylko wtedy gdy diagramy Younga tablic τ_1 i τ_2 są takie same.*

(4) *$\overline{\rho}_\tau = \rho_{\overline{\tau}}$.*

17 Globalna teoria grup Liego

17.1 Homotopia krzywych

Niech $\mathcal{X}$ będzie rozmaitością i $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$. Oznaczmy przez $K(x_0, x_1, \mathcal{X})$ zbiór krzywych (gładkich, kawałkami ciągłych) zaczynających się w x_0 i kończących się w x_1, tzn $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$.

Niech $\gamma_0, \gamma_1 \in K(x_0, x_1, \mathcal{X})$. Mówimy, że γ_0 jest homotopijnie równoważna γ_1 i piszemy $\gamma_0 \sim \gamma_1$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje funkcja ciągła $[0, 1] \times [0, 1] \ni (t, s) \mapsto H(t, s)$ taka, że $H(t, 0) = \gamma_0(t)$ i $H(t, 1) = \gamma_1(t)$.

Twierdzenie 17.1 *Homotopijna równoważność jest relacją równoważności.*

Dowód. Kładąc $H(t,s) = \gamma_0(t)$ dostajemy $\gamma_0 \sim \gamma_0$.

Kładąc $H_{10}(t,s) := H_{01}(t, 1-s)$ dostajemy $\gamma_0 \sim \gamma_1 \Rightarrow \gamma_1 \sim \gamma_0$.

Kładąc

$$H_{02}(t,s) := \begin{cases} H_{01}(t, 2s), & 0 \le s \le \frac{1}{2}; \\ H_{12}(t, 2s-1), & \frac{1}{2} \le s \le 1, \end{cases}$$

dostajemy $\gamma_0 \sim \gamma_1, \quad \gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \gamma_0 \sim \gamma_2$. $\square$

Zbiór klas homotopii krzywych zaczynających się w x_0 i kończących w x_1 oznaczany jest przez

$$\Pi(x_0, x_1, \mathcal{X}) := K(x_0, x_1, \mathcal{X})/\sim .$$

Twierdzenie 17.2 *Niech $\mathcal{X}$ będzie spójna. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $\Pi(x_0, x_1, \mathcal{X})$ *jest jednoelementowy dla każdego* $x_0, x_1 \in \mathcal{X}$.

(2) *Istnieje* $x_0 \in \mathcal{X}$ *taki, że* $\Pi(x_0, x_0, \mathcal{X})$ *jest jednoelementowy.*

Jeśli spełnione są warunki powyższego twierdzenia, mówimy, że zbiór $\mathcal{X}$ jest jednospójny.

17.2 Składanie krzywych i grupa homotopii

Niech $\gamma \in K(x_0, x_1, \mathcal{X})$. Definiujemy $\gamma^{-1} \in K(x_1, x_0, \mathcal{X})$.

$$\gamma^{-1}(t) := \gamma(1-t).$$

Oczywiście, jeśli $\gamma' \sim \gamma$, to $(\gamma')^{-1} \sim \gamma^{-1}$.

Niech $x_0, x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, $\gamma_0 \in K(x_0, x_1, \mathcal{X})$, $\gamma_1 \in K(x_1, x_2, \mathcal{X})$. Definiujemy $\gamma_0 \circ \gamma_1 \in K(x_0, x_2, \mathcal{X})$:

$$\gamma_0 \circ \gamma_1(t) := \begin{cases} \gamma_0(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}; \\ \gamma_1(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Oczywiście, jeśli $\gamma_0 \sim \gamma_0'$, $\gamma_1 \sim \gamma_1'$, to

$$\gamma_0 \circ \gamma_1 \sim \gamma_0' \circ \gamma_1'.$$

Jeśli $\gamma_2 \in K(x_2, x_3, \mathcal{X})$

$$(\gamma_0 \circ \gamma_1) \circ \gamma_2 \sim \gamma_0 \circ (\gamma_1 \circ \gamma_2).$$

Jeśli przez x oznaczamy krzywą stałą równą $x \in \mathcal{X}$, to dla $x_0, x_1 \in \mathcal{X}$, $\gamma \in K(x_0, x_1, \mathcal{X})$,

$$x_0 \circ \gamma \sim \gamma \circ x_1 \sim \gamma.$$

W szczególności, dla każdego $x_0 \in \mathcal{X}$, $\Pi(x_0, x_0, \mathcal{X})$ jest grupą. Jeśli zbiór $\mathcal{X}$ jest spójny, to grupa $\Pi(x_0, x_0, \mathcal{X})$ jest izomorficzna dla różnych $x_0 \in \mathcal{X}$. Nazywamy ją grupą homotopii zbioru $\mathcal{X}$. Oznaczamy ją przez $\Pi(\mathcal{X})$.

Przykłady

(1) $\Pi(\mathbb{R}^n)$ jest grupą jednoelementową.

(2) $\Pi(S^1) = \Pi(\mathbb{R}^2\backslash\{0\}) = \mathbb{Z}$ (liczba okrążeń wokół zera).

(3) Niech $a, b \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$. Wtedy $\Pi(\mathbb{R}^2\backslash\{a, b\}) = \mathbb{F}_2$ – grupa wolna o dwóch generatorach. Jako generatory można wybrać τ_0 – okrążenie a, τ_1 – okrążenie b. Grupa $\mathbb{F}_2$ składa się z elementów następujących typów:

$$\begin{array}{ll} \tau_1^{n_p}\tau_0^{m_p}\cdots\tau_1^{n_0}\tau_0^{m_0}, & \tau_0^{m_{p+1}}\tau_1^{n_p}\cdots\tau_1^{n_0}\tau_0^{m_0}, \\ \tau_1^{n_p}\tau_0^{m_p}\cdots\tau_0^{m_1}\tau_1^{n_0}, & \tau_0^{m_{p+1}}\tau_1^{n_p}\cdots\tau_0^{m_1}\tau_1^{n_0}, \end{array} \tag{17.127}$$

gdzie $n_i, m_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

(4) $\Pi(S^n)$ jest trywialna dla $n \geq 2$. Na przykład, $SU(2) \simeq S^3$ jest jednospójna.

(5) W S^n wprowadzamy naturalne działanie grupy $\mathbb{Z}_2$. Przestrzeń orbit $S^n/\mathbb{Z}_2$ nazywa się *n-wymiarową przestrznią projektywną $P\mathbb{R}^n$*. Dla $n \geq 2$ ma ona grupę homotopii $\mathbb{Z}_2$. W szczególności, $SO(3) \simeq SU(2)/\mathbb{Z}_2 \simeq P\mathbb{R}^3$ ma grupę homotopii $\mathbb{Z}_2$.

17.3 Nakrycia

Niech $\mathcal{X}$ będzie rozmaitością spójną z punktem bazowym $x_0 \in \mathcal{X}$. Mówimy, że $(\mathcal{Y}, \Phi, y_0)$ jest nakryciem $(\mathcal{X}, x_0)$, jeśli $\mathcal{Y}$ jest spójną rozmaitością, $\Phi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ jest gładkim odwzorowaniem, $\Phi(y_0) = x_0$ i dla każdego $x \in \mathcal{X}$ istnieje spójne otoczenie $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ zawierające x takie, że $\Phi^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_i \mathcal{W}_i$, gdzie $\mathcal{W}_i$ są spójne, otwarte i nieprzecinające się, oraz $\Phi\Big|_{\mathcal{W}_i}$ jest dyfeomorfizmem $\mathcal{W}_i \to \mathcal{U}$.

17.4 Nakrycie uniwersalne

Nakryciem uniwersalnym $(\mathcal{X}, x_0)$ nazywamy $(\mathcal{X}^{\mathrm{uc}}, \Phi, [x_0])$, gdzie

$$\mathcal{X}^{\mathrm{uc}} := \bigcup_{x\in\mathcal{X}} \Pi(x_0, x, \mathcal{X}),$$

$\Phi^{\mathrm{uc}} : \mathcal{X}^{\mathrm{uc}} \to \mathcal{X}$ jest zadane przez $\Phi^{\mathrm{uc}}([\gamma]) := \gamma(1)$. $\mathcal{X}^{\mathrm{uc}}$ jest wyposażone w naturalną strukturę rozmaitości. $(\mathcal{X}^{\mathrm{uc}}, \Phi^{\mathrm{uc}}, [x_0])$ jest nakryciem $(\mathcal{X}, x_0)$.

Zauważmy, że $\Pi(\mathcal{X}) = (\Phi^{\mathrm{uc}})^{-1}(x_0)$.

17.5 Nakrycie wyznaczone przez podgrupę grupy homotopii

Niech $(\mathcal{Y}, \Phi, y_0)$ będzie nakryciem $(\mathcal{X}, x_0)$. Latwo się przekonać, że Φ indukuje homomorfizm $\Pi(\mathcal{Y}, y_0) \to \Pi(\mathcal{X}, x_0)$.

Niech K będzie podgrupą $\Pi(x_0, x_0, \mathcal{X})$. Dla $x \in \mathcal{X}$, w $\Pi(x_0, z, \mathcal{X})$ wprowadzamy relację: Dla $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \Pi(x_0, x, \mathcal{X})$ piszemy $[\gamma_1] \underset{K}{\sim} [\gamma_2]$, gdy $[\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1] \in K$. Jest to relacja równoważności. Będziemy oznaczali przez $[\gamma]^K$ klasę abstrakcji γ względem tej relacji. Definiujemy

$$\Pi^K(x_0, x, \mathcal{X}) := \Pi(x_0, x, \mathcal{X})/\underset{K}{\sim},$$

$$\mathcal{X}^K := \bigcup_{x\in\mathcal{X}} \Pi^K(x_0, x, \mathcal{X}),$$

$$\Phi^K([\gamma]^K) = \gamma(1).$$

Wtedy $(\mathcal{X}^K, \Phi^K, [x_0]^K)$ jest nakryciem $(\mathcal{X}, x_0)$, którego grupą homotopii jest K.

Mamy oczywiście naturalne odwzorowanie

$$\Phi_K : \mathcal{X}^{\mathrm{uc}} \to \mathcal{X}^K, \quad \Phi_K([\gamma]) = [\gamma]^K,$$

spełniające związek $\Phi^K \circ \Phi_K = \Phi$. Czyli $(\mathcal{X}^{\mathrm{uc}}, \Phi_K, [x_0])$ jest nakryciem $(\mathcal{X}^K, [x_0]^K)$.

17.6 Lokalna izomorficzność grup Liego

Będziemy mówili, że grupy Liego G_1 i G_2 są *lokalnie izomorficzne*, gdy istnieją otoczenia identyczności $\mathcal{O}_i \subset G_i$, $i = 1, 2$, i dyfeomorfizm $\Phi : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ taki, że $g_1, g_2, g_1g_2 \in \mathcal{O}_1$ implikuje $\Phi(g_1)\Phi(g_2) = \Phi(g_1g_2)$. Jest to relacja równoważności.

Twierdzenie 17.3 *Niech G będzie spójną grupą Liego i $\mathcal{O}$ otwartym podzbiorem zawierającym $\mathbb{1}$. Wtedy $\mathcal{O}$ generuje G, czyli*

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O} \cdots \mathcal{O}.$$

Dowód. Niech G_0 będzie prawą stroną. Jest oczywiście otwarta. Niech $g \in G_0^{\mathrm{cl}}$. Wtedy istnieje ciąg (g_n) w G_0 taki, że $g_n \to g$. Zatem $gg_n^{-1} \to \mathbb{1}$. Czyli dla dostatecznie dużych n, $gg_n^{-1} \in \mathcal{O}$. Zatem $g \in \mathcal{O}g_n \subset G_0$. Stąd G_0 jest domknięta. Ze spójności G wynika, że $G = G_0$. □

$Z(G)$ oznacza centrum grupy, tzn

$$Z(G) := \{z \in G \ : \ zg = gz, \ g \in G\}.$$

Oczywiście, każda podgrupa w centrum dowolnej grupy jest normalna.

Twierdzenie 17.4 *Niech K będzie dyskretną podgrupą normalną w spójnej grupie Liego G.*

1. *Wtedy K jest zawarte w centrum grupy G.*
2. *Niech $\Phi : G \to G/K$ będzie kanonicznym homomorfizmem. Wtedy $Z(G/K) = \Phi(Z(G))$. W szczególności, $Z(G/K) \simeq Z(G)/K$.*
3. *G/K jest lokalnie izomorficzna z G.*

Dowód. (1) Niech $k \in K$. Funkcja $G \ni g \mapsto gkg^{-1} \in K$ jest ciągła. Dla $g = \mathbb{1}$ jej wartością jest k. Ponieważ K jest dyskretna a G spójna, funkcja musi być stała. Więc $gkg^{-1} = k$, $g \in G$.

(2) Oczywiście, korzystając z tego, że $K \subset Z(G)$ dostajemy $Z(G/K) \supset \Phi(Z(G))$.

Niech $b \in G$ i $\Phi(b) \in Z(G/K)$. Dla dowolnego $g \in G$,

$$\mathbb{1}_{G/K} = \Phi(g)\Phi(b)\Phi(g)^{-1}\Phi(b)^{-1} = \Phi(gbg^{-1}b^{-1}). \tag{17.128}$$

Funkcja

$$G \ni g \mapsto gbg^{-1}b^{-1} \tag{17.129}$$

jest ciągła. Na mocy (17.128), ma ona wartości w dyskretnej grupie K. G jest spójne. Więc (17.129) jest stała. Dla $g = 1\!\!1$, jej wartością jest $1\!\!1$. Więc

$$gbg^{-1}b^{-1} = 1\!\!1, \quad g \in G.$$

□

Twierdzenie 17.5 *Niech G_1 będzie lokalnie izomorficzna z G_2 i $\Phi : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ jest odwzorowaniem, o którym mowa w definicli lokalnej izomorficzności. Załóżmy, że Φ rozszerza się do homomorfizmu $\Phi : G_1 \to G_2$. Wtedy takie rozszerzenie jest jednoznacznie wyznaczone i jego jądro jest dyskretną podgrupą normalną w G_1.*

17.7 Grupa homotopii grupy Liego

Niech G będzie spójną grupą Liego. Rozważając jej grupę homotopii, zawsze będziemy przyjmować, że $1\!\!1$ jest punktem bazowym.

Niech G^{uc} będzie nakryciem uniwersalnym G. Wprowadzamy działanie na G^{uc}:

$$[\gamma_1][\gamma_2] := [\gamma_1\gamma_2],$$

gdzie $\gamma_1\gamma_2(t) := \gamma_1(t)\gamma_2(t)$. Niech Φ^{uc} oznacza kanoniczne rzutowanie $\Phi^{\mathrm{uc}} : G^{\mathrm{uc}} \to G$.

Twierdzenie 17.6 *G^{uc} jest grupą Liego i Φ^{uc} jest surjektywnym homomorfizmem. Dlatego, $G = G^{\mathrm{uc}}/\mathrm{Ker}\Phi^{\mathrm{uc}}$. $\Pi(G)$ można utożsamić z $\mathrm{Ker}\Phi^{\mathrm{uc}}$, która jest dyskretną podgrupą normalną, i dlatego jest zawarta w centrum G^{uc}.*

Zatem w rodzinie lokalnie równoważnych ze sobą grup Liego można wyróżnić "maksymalną" G^{uc}, która jest jednospójna.

Pouczające jest sprawdzić niezależnie, że grupa homotopii grupy Liego G jest przemienna.
Dowód. Niech $\gamma_i \in K(1\!\!1, 1\!\!1, G)$. Zdefiniujmy

$$s_1(t) := \begin{cases} (2t, 0), & 0 \le t \le 1/2, \\ (1, 2t-1), & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}, \quad s_2(t) := \begin{cases} (0, 2t), & 0 \le t \le 1/2, \\ (2t-1, 0), & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Niech $\Gamma(t_1, t_2) := \gamma_1(t_1)\gamma_2(t_2)$. Wtedy $[\gamma_1] \circ [\gamma_2]$ jest reprezentowane przez $\Gamma(s_1(t))$ a $[\gamma_2] \circ [\gamma_1]$ jest reprezentowane przez $\Gamma(s_2(t))$.

$\Gamma\left((1-\theta)s_1(t) + \theta s_2(t)\right)$ jest homotopią między nimi. □

Analizę spójnych grup Liego można ograniczyć do grup spójnych jednospójnych. Niech G taka będzie. Oznaczmy przez Z centrum G.

Twierdzenie 17.7 (1) *Każda spójna grupa Liego lokalnie równoważna grupie G jest izomorficzna z G/K, gdzie K jest podgrupą dyskretną grupy Z.*

(2) *Centrum grupy G/K jest równe Z/K.*

(3) *Grupa homotopii G/K jest równa K.*

Dowód. (3) Niech $[\gamma] \in \Pi(G/K)$. Wtedy możemy podnieść γ do krzywej $\tilde{\gamma} \in K(\mathbb{1}, k, G)$, tak że przy homomorfizmie kanonicznym $\Phi : G \to G/K$ mamy $\Phi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$. Oczywiście, $k \in K$. Dostajemy w ten sposób odwzorowanie $\tilde{\Phi}([\gamma]) = k$. Occzywiście, jest to surjektywny homomorfizm. Z jednospójności $\tilde{G}$ sprawdzamy, że jest injektywny. $\square$

W szczególności, jeśli centrum G jest dyskretne, to mamy też grupę minimalną G/Z z trywialnym centrum i grupą homotopii Z.