Mechanika kwantowa
III rok
Zadania domowe — seria 2

Zadanie 1. Unormowana funkcja falowa

$$\Psi(t,x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp(-i\frac{\omega t}{2}) \exp(-\frac{(x-v_0 t)^2}{2}), \quad \omega > 0,$$

gdzie v_0 jest stałą o wymiarze prędkości, spełnia równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi$$

dla pewnego Hamiltonianu $\hat{H}$. Oblicz wartość oczekiwaną energii $\langle \hat{H} \rangle$ w stanie opisanym funkcją Ψ.

Zadanie 2. (i) Udowodnij, że dla cząstki swobodnej spełnione są następujące zależności

$$\begin{gathered} \frac{d^2}{dt^2}(\Delta x)^2 = \frac{2}{m^2}(\Delta p)^2; \\ \frac{d}{dt}(\Delta p) = 0; \\ \frac{d}{dt}(\Delta x)^2 = \frac{1}{m}(\langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}\rangle - 2\langle \hat{p}\rangle\langle \hat{x}\rangle). \end{gathered} \tag{1}$$

(ii) Funkcja falowa $\Psi(t,x)$ opisująca swobodną cząstkę w chwili czasu $t = 0$ ma postać

$$\Psi(0,x) = A\frac{1}{1+x^2}$$

gdzie A jest czynnikiem normującym funkcję. Korzystając z (1) i wzoru

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx = \pi \frac{(2(n-1))!}{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

znajdź zależność dyspersji Δx od czasu t dla stanu Ψ.

Uwaga! Zadanie 1 należy do **kanonu** — jego bezbłędne rozwiązanie jest niezbędne do zaliczenia ćwiczeń. **Zadanie 2** zostało wycenione na **5** punktów.