Mechanika kwantowa
III rok
Zadania egzaminacyjne

Zadanie 1 (należy do kanonu)

Wersja 1 Dla układu dwu cząstek o spinie wewnętrznym $s = 1/2$ przedstaw unormowany stan układu o całkowitm spinie $S = 1$ i jego rzucie na oś x, $S_x = 0$, jako kombinację liniową unormowanych stanów własnych operatorów $\hat{s}_{1z}$ i $\hat{s}_{2z}$ odpowiadających rzutom na oś z spinów cząstki nr 1 i nr 2.

Wersja 2 Dla układu dwu cząstek o spinie wewnętrznym $s = 1/2$ przedstaw unormowany stan układu o całkowitm spinie $S = 1$ i jego rzucie na oś y, $S_y = 0$, jako kombinację liniową unormowanych stanów własnych operatorów $\hat{s}_{1z}$ i $\hat{s}_{2z}$ odpowiadających rzutom na oś z spinów cząstki nr 1 i nr 2.

Zadanie 2 (należy do kanonu)

Wersja 1 Cząstka porusza się w jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału o szerokości L. W chwili $t = 0$ jej stan jest kombinacją liniową dwu **kolejnych** stanów własnych Hamiltonianu z **równymi sobie** współczynnikami, a jej średnia energia jest 6.5 raza większa niż energia stanu podstawowego. Obie energie liczone są od dna studni. Niech średnie położenie cząstki względem środka studni w chwili $t = 0$ wynosi D. Znajdź najmniejszy czas t, po którym średnie położenie względem środka studni wyniesie $-D$.

Wersja 2 Cząstka porusza się w jednowymiarowej nieskończonej studni potencjału o szerokości L. W chwili $t = 0$ jej stan jest kombinacją liniową dwu **kolejnych** stanów własnych Hamiltonianu z **równymi sobie** współczynnikami, a jej średnia energia jest 12.5 raza większa niż energia stanu podstawowego. Obie energie liczone są od dna studni. Niech średnie położenie cząstki względem środka studni w chwili $t = 0$ wynosi D. Znajdź najmniejszy czas t, po którym średnie położenie względem środka studni wyniesie $-D$.

Zadanie 3 (5 pkt.)

Wersja 1 Rozważ stan własny sferycznego trójwymiarowego oscylatora harmonicznego $|n_x n_y n_z\rangle$ ($\omega_x = \omega_y = \omega_z$) w reprezentacji określonej przez liczby kwantowe odpowiadające trzem kierunkom kartezjańskim n_x, n_y oraz n_z. Dla jakich liczb kwantowych n_x, n_y oraz n_z stan $|n_x n_y n_z\rangle$ jest stanem własnym operatora rzutu momentu pędu na oś x, $\hat{L}_x$?

Wersja 2 Rozważ stan własny sferycznego trójwymiarowego oscylatora harmonicznego $|n_x n_y n_z\rangle$ ($\omega_x = \omega_y = \omega_z$) w reprezentacji określonej przez liczby kwantowe odpowiadające trzem kierunkom kartezjańskim n_x, n_y oraz n_z. Dla jakich liczb kwantowych n_x, n_y oraz n_z stan $|n_x n_y n_z\rangle$ jest stanem własnym operatora rzutu momentu pędu na oś y, $\hat{L}_y$?

Zadanie 4 (5 pkt.)

Wersja 1 Znajdź wariacyjne oszacowanie energii najniższego stanu cząstki, będącej w stanie o liczbie kwantowej orbitalnego momentu pędu równej L, poruszającej się w potencjale sferycznym $V(r) = \frac{V_0}{r^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$. Jako funkcji próbnych użyj funkcji $\Psi(r, \theta, \phi) = \beta\kappa^{3/2} f(\kappa r) Y_{LM}(\theta, \phi)$ zależnych od parametru κ, gdzie β jest stałą normalizacyjną, a funkcja f jest określona przez $f(\xi) = \xi^k e^{-\xi/2}$. Dla jakiej liczby całkowitej $k \geq 0$ otrzyma się najlepsze oszacowanie wariacyjne?

Wskazówka: $\int_0^\infty \xi^m e^{-\xi} d\xi = m!$

Wersja 2 Znajdź wariacyjne oszacowanie energii najniższego stanu cząstki, będącej w stanie o liczbie kwantowej orbitalnego momentu pędu równej L, poruszającej się w potencjale sferycznym $V(r) = \frac{V_0}{r^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$. Jako funkcji próbnych użyj funkcji $\Psi(r, \theta, \phi) = \beta\kappa^{3/2} f(\kappa r) Y_{LM}(\theta, \phi)$ zależnych od parametru κ, gdzie β jest stałą normalizacyjną, a funkcja f jest określona przez $f(\xi) = \xi^k e^{-\xi^2/2}$. Dla jakiej liczby całkowitej $k \geq 0$ otrzyma się najlepsze oszacowanie wariacyjne?

Wskazówka: $\int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\int_0^\infty \xi^{2m} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{(2m-1)!!}{2^m}$ dla $m > 0$