Mechanika kwantowa
III rok
Kolokwium I

Zadanie 1 (kanoniczne)

Wersja 1 Funkcja falowa Ψ dana jest wzorem

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ Axe^{-2x} & \text{dla } x > 0 \end{cases} .$$

1. Znajdź wartość stałej normalizującej A.
2. Znajdź transformatę Fouriera funkcji Ψ.
3. Oblicz wartości oczekiwane $\langle x \rangle$, $\langle k \rangle$ oraz dyspersje Δx i Δk.
4. Sprawdź, czy dla dyspersji Δx i Δk spełniona jest zasada nieoznaczoności.

Wskazówka: Dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ i $a > 0$ zachodzi

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\, dx = \frac{n}{a} \int_0^\infty x^{n-1} e^{-ax}\, dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx = \pi \frac{(2(n-1))!}{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2} .$$

Wersja 2 Funkcja falowa Ψ dana jest wzorem

$$\Psi(x) = \begin{cases} Axe^{3x} & \text{dla } x \leq 0 \\ 0 & \text{dla } x > 0 \end{cases} .$$

1. Znajdź wartość stałej normalizującej A.
2. Znajdź transformatę Fouriera funkcji Ψ.
3. Oblicz wartości oczekiwane $\langle x \rangle$, $\langle k \rangle$ oraz dyspersje Δx i Δk.
4. Sprawdź, czy dla dyspersji Δx i Δk spełniona jest zasada nieoznaczoności.

Wskazówka. Dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ i $a > 0$ zachodzi

$$\int_{-\infty}^0 x^n e^{ax}\, dx = -\frac{n}{a} \int_{-\infty}^0 x^{n-1} e^{ax}\, dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx = \pi \frac{(2(n-1))!}{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2} .$$

Zadanie 2 (kanoniczne)

Wersja 1 Stan układu opisany jest za pomocą macierzy gęstości

$$\rho = \frac{1}{20} \left(\begin{array}{cc} 12 & 5+3i \\ 5-3i & 8 \end{array} \right).$$

Jakie jest prawdopodobieństwo, że aparat Sterna-Gerlacha o osi ustawionej w kierunku

$$\vec{n} = \left[\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5} \right]$$

zarejestruje cząstkę w stanie $|\uparrow_n>$, a jakie że w stanie $|\downarrow_n>$?

Wersja 2 Stan układu opisany jest za pomocą macierzy gęstości

$$\rho = \frac{1}{20} \left(\begin{array}{cc} 13 & 2+5i \\ 2-5i & 7 \end{array} \right).$$

Jakie jest prawdopodobieństwo, że aparat Sterna-Gerlacha o osi ustawionej w kierunku

$$\vec{n} = \left[\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \right]$$

zarejestruje cząstkę w stanie $|\uparrow_n>$, a jakie że w stanie $|\downarrow_n>$?

Zadanie 3 (5 pkt.)

Wersja 1 Dla cząstki swobodnej spełnione są następujące zależności:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\Delta x)^2 = \frac{2}{m^2}(\Delta p)^2; \quad \frac{d}{dt}(\Delta p) = 0;$$
$$\frac{d}{dt}(\Delta x)^2 = \frac{1}{m}(\langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \rangle - 2\langle \hat{p} \rangle \langle \hat{x} \rangle).$$

Funkcja falowa $\Phi(t, x)$ cząstki swobodnej ma w chwili $t = 0$ postać

$$\Phi(0, x) = \Psi(x - 3),$$

gdzie Ψ jest funkcją z zadania 1. Znajdź zależność dyspersji Δx od czasu t dla stanu Φ.

Wersja 2 Dla cząstki swobodnej spełnione są następujące zależności:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\Delta x)^2 = \frac{2}{m^2}(\Delta p)^2; \quad \frac{d}{dt}(\Delta p) = 0;$$
$$\frac{d}{dt}(\Delta x)^2 = \frac{1}{m}(\langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \rangle - 2\langle \hat{p} \rangle \langle \hat{x} \rangle).$$

Funkcja falowa $\Phi(t, x)$ cząstki swobodnej ma w chwili $t = 0$ postać

$$\Phi(0, x) = \Psi(x + 2),$$

gdzie Ψ jest funkcją z zadania 1. Znajdź zależność dyspersji Δx od czasu t dla stanu Φ.

Zadanie 4 (5 pkt.)

Wersja 1 Pewien stan opisany jest macierzą gęstości

$$\rho = \frac{1-i}{4} \begin{pmatrix} 1+i & 1+i\cos\alpha \\ \cos\alpha + i & 1+i \end{pmatrix} ,$$

gdzie α jest rzeczywistym parametrem. Dla jakich wartości parametru jest to stan czysty, a dla jakich mieszany? W jakich proporcjach należy zmieszać stany własne operatorów σ_x, σ_y, σ_z, aby otrzymać rozważany stan?

Wersja 2 Pewien stan opisany jest macierzą gęstości

$$\rho = \frac{1+i}{4} \begin{pmatrix} 1-i & 1-i\cos\alpha \\ \cos\alpha - i & 1-i \end{pmatrix} ,$$

gdzie α jest rzeczywistym parametrem. Dla jakich wartości parametru jest to stan czysty, a dla jakich mieszany? W jakich proporcjach należy zmieszać stany własne operatorów σ_x, σ_y, σ_z, aby otrzymać rozważany stan?

Zadanie 5 (5 pkt.)

Wersja 1 Udowodnij, że wektory

$$|\Psi_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle|\downarrow_z\rangle - |\downarrow_z\rangle|\uparrow_z\rangle) \quad \text{oraz} \quad |\Psi_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_x\rangle|\downarrow_x\rangle - |\downarrow_x\rangle|\uparrow_x\rangle)$$

opisują ten sam stan kwantowy pary qubitów.

Wersja 2 Udowodnij, że wektory

$$|\Psi_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_y\rangle|\downarrow_y\rangle - |\downarrow_y\rangle|\uparrow_y\rangle) \quad \text{oraz} \quad |\Psi_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle|\downarrow_z\rangle - |\downarrow_z\rangle|\uparrow_z\rangle)$$

opisują ten sam stan kwantowy pary qubitów.