Mechanika kwantowa
III rok
Kolokwium II

Zadanie 1 (kanoniczne)

Wersja 1 Rozważ nieskończoną jamę potencjału

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{dla } |x| > a/2 \\ 0 & \text{dla } |x| \leq a/2 \end{cases}.$$

W chwili początkowej cząstka znajduje się w stanie $\Psi(x, t=0) = \sqrt{1/3}\,\Psi_1(x) + \sqrt{2/3}\,\Psi_2(x)$, gdzie unormowane funkcje falowe

$$\Psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos(\frac{\pi}{a}x), \quad \Psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{2\pi}{a}x)$$

opisują stany stacjonarne o energiach, odpowiednio, E_1 i $E_2 = 4E_1$. Znajdź prawdopodobieństwo zarejestrowania cząstki na odcinku $]-a/2, 0[$ w chwili t.

Wskazówka.

$$\int \sin(\alpha u)\cos(\beta u)\,du = \begin{cases} -\frac{\cos(\alpha+\beta)u}{2(\alpha+\beta)} - \frac{\cos(\alpha-\beta)u}{2(\alpha-\beta)} + C & \text{dla } \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{2\alpha}\sin^2 \alpha u + C & \text{dla } \alpha = \beta \neq 0 \end{cases}.$$

Wersja 2 Rozważ nieskończoną jamę potencjału

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{dla } |x| > a/2 \\ 0 & \text{dla } |x| \leq a/2 \end{cases}.$$

W chwili początkowej cząstka znajduje się w stanie $\Psi(x, t=0) = \sqrt{3/4}\,\Psi_1(x) + \sqrt{1/4}\,\Psi_2(x)$, gdzie unormowane funkcje falowe

$$\Psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos(\frac{\pi}{a}x), \quad \Psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{2\pi}{a}x)$$

opisują stany stacjonarne o energiach, odpowiednio, E_1 i $E_2 = 4E_1$. Znajdź prawdopodobieństwo zarejestrowania cząstki na odcinku $]0, a/2[$ w chwili t.

Wskazówka.

$$\int \sin(\alpha u)\cos(\beta u)\,du = \begin{cases} -\frac{\cos(\alpha+\beta)u}{2(\alpha+\beta)} - \frac{\cos(\alpha-\beta)u}{2(\alpha-\beta)} + C & \text{dla } \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{2\alpha}\sin^2 \alpha u + C & \text{dla } \alpha = \beta \neq 0 \end{cases}.$$

Zadanie 2 (kanoniczne)

Wersja 1 Cząstka o masie m znajduje się w stanie podstawowym w potencjale oscylatora harmonicznego. Dyspersja położenia tej cząstki wynosi σ_x. Znajdź energię pierwszego stanu wzbudzonego tego oscylatora.

Wersja 2 Cząstka o masie m znajduje się w stanie podstawowym w potencjale oscylatora harmonicznego. Dyspersja pędu tej cząstki wynosi σ_p. Znajdź energię trzeciego stanu wzbudzonego tego oscylatora.

Zadanie 3 (5 pkt.)

Wersja 1 Znajdź najmniejsze V_0 takie, aby w potencjale

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{dla} \quad x \leq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad 0 \leq x \leq a \\ 2V_0 & \text{dla} \quad a \leq x \end{cases}$$

istniał stan związany.

Wskazówka.

$$\operatorname{arc\,tg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Wersja 2 Znajdź najmniejsze V_0 takie, aby w potencjale

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{dla} \quad x \leq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad 0 \leq x \leq a \\ 4V_0 & \text{dla} \quad a \leq x \end{cases}$$

istniał stan związany.

Wskazówka.

$$\operatorname{arc\,tg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Zadanie 4 (5 pkt.)

Wersja 1 W chwili $t = 0$ cząstka w potencjale $V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$ znajduje się w stanie

$$|\Psi\rangle = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

1. Wyznacz stałą normalizacyjną A.
2. Znajdź stan cząstki w dowolnej chwili t.
3. Udowodnij, że stan będzie zmieniać się w czasie periodycznie i podaj okres tych zmian.

Wersja 2 W chwili $t = 0$ cząstka w potencjale $V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$ znajduje się w stanie

$$|\Psi\rangle = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{3})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

1. Wyznacz stałą normalizacyjną A.
2. Znajdź stan cząstki w dowolnej chwili t.
3. Udowodnij, że stan będzie zmieniać się w czasie periodycznie i podaj okres tych zmian.