Jakościowa teoria równań różniczkowych

$$\dot{x}_i = F(x_1,.....,x_n,\{\alpha\},t)$$

1. Dlaczego:

- Postać równań procesów biologicznych, gdzie najczęściej *F* - funkcja nieliniowa
- Nie da się rozwiązać analitycznie
- Rozwiązanie numeryczne jest tylko dla konkretnych warunków początkowych
- Często interesuje nas tylko charakter procesu - nie musimy znać szczegółów.

2. Co daje ta teoria:

Możliwość wnioskowania o charakterze rozwiązań na podstawie znajomości funkcji *F*.

Klasyfikacja równań

- Przestrzennie jednorodne -*F* nie zależy od położenia w przestrzeni -> modele punktowe
- przestrzennie niejednorodne - *F* zależy od położenia
- zależne lub niezależne (*autonomiczne*) od czasu

Dynamika pojedynczej populacji - ogólnie

Liczebność populacji opisuje równanie:

$$\frac{dN}{dt} = f(N)$$

$f(N)$ - najczęściej jest nieliniowa.

Punkty stacjonarne N^* to takie punkty, że $f(N^*) = 0$

Liniowa stabilność punktów stacjonarnych

Niech

Małe wychylenie z punktu stacjonarnego $n(t) = N(t) - N^*$ takie, że $|n(t)| << 1$

Rozwijamy w szereg:

$$\frac{dn}{dt} = f(N^* + n) \approx f(N^*) + n\, f'(N^*) + ...$$

czyli w przybliżeniu liniowym

$$\frac{dn}{dt} = n\, f'(N^*) \;\Rightarrow\; n(t) \sim \exp(f'(N^*)t)$$

widać, że:

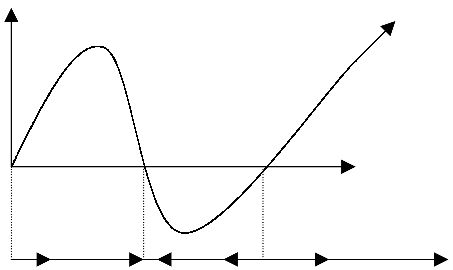
- n rośnie gdy $f'(N^*) > 0$ => N^* punkt stacjonarny liniowo niestabilny

oraz, że

- n maleje gdy $f'(N^*) < 0$ => N^* punkt stacjonarny liniowo stabilny

Metoda graficzna

Wykreślamy $f(N)$ znajdujemy miejsca zerowe i badamy pochodną w ich pobliżu:



Przykład: Model populacji z uwzględnieniem wymierania

Niech:
b >0 – tempo namnażania
d >0 – tempo wymierania

$$\frac{dN}{dt} = bN - dN$$

$$N(t) = N_0 e^{(b-d)t}$$

wnioski: Możliwy jedynie exponencjalny wzrost, zanik lub brak zmian.

Przykład: Model populacji z uwzględnieniem pojemności środowiska (Verhulst 1836)

Niech:
$K > 0$ - pojemność środowiska
$r = b - d$

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

1. Jakie punkty stacjonarne są w tym modelu?
2. Jakie są ich rodzaje stabilności?
3. Jakie jest rozwiązanie dla $N(0) = N_0$ [1]
4. Jak zmienia się jakościowo charakter rozwiązania w zależności od stosunku N_0 do K?

[1] $N(t) = \dfrac{K}{1 + \left(\dfrac{K}{N_0} - 1\right)e^{-rt}}$

Przykład: Model Ludwiga (1978) – larwy zjadające drzewa iglaste

Niech:

N - liczebność populacji larw

r_B - rozrodczość

K_B - pojemność środowiska

- Do poprzedniego modelu dołożymy efekt wyjadania larw przez ptaki:

$$p(N) = \frac{BN^2}{A^2 + N^2}$$

Otrzymujemy równanie opisujące dynamikę liczebności populacji:

$$\frac{dN}{dt} = r_B N\left(1 - \frac{N}{K_B}\right) - p(N)$$

czyli u nas:

$$\frac{dN}{dt} = r_B N\left(1 - \frac{N}{K_B}\right) - \frac{BN^2}{A^2 + N^2}$$

Uwaga: Modele łatwiej jest analizować w jednostkach bezwymiarowych

Podstawiamy:

$$u = \frac{N}{A},\quad r = \frac{Ar_B}{B},\quad q = \frac{K_B}{A},\quad \tau = \frac{Bt}{A}$$

dostajemy:

$$\frac{du}{d\tau} = ru\left(1 - \frac{u}{q}\right) - \frac{u^2}{1 + u^2} = f(u; r, q)$$

- Znaleźć punkty stacjonarne ($f(u; r, q) = 0$) i przedyskutować ich stabilność (graficznie)

Zadanie 1

Niech:

N - liczebność populacji

R - rozrodczość

K - pojemność środowiska

P , A - stałe dodatnie

Równanie opisujące dynamikę liczebności populacji:

$$\frac{dN}{dt} = RN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - P\left(1 - \exp\left(-\frac{N^2}{\varepsilon A^2}\right)\right) \qquad 0 < \varepsilon << 1$$

Przez odpowiednią zamianę zmiennych doprowadzić do postaci:

$$\frac{du}{d\tau} = ru\left(1 - \frac{u}{q}\right) - \left(1 - \exp\left(-\frac{u^2}{\varepsilon}\right)\right)$$

1. Pokazać, że istnieją trzy niezerowe stany stacjonarne dla $rq > 4$.
2. Czy model ten może wykazywać histerezę?

Zadanie 2:

Rozważyć dwie strategie łowienia ryb

a) proporcjonalną do liczebności populacji:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - EN$$

b) stały zysk:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - Y_0$$

Wskazać optymalny zakres odławiania i rozważyć czasy powrotu systemu do równowagi po małej perturbacji.