

Modelowanie matematyczne - kilka oczywistych faktów, które warto sobie uświadomić

Co to jest Model:

- reprezentacja badanego obiektu w postaci innej, niż ta, w której występuje on w rzeczywistości.
- W nauce model jest rozumiany jako uproszczona, celowo, reprezentacja rzeczywistości.

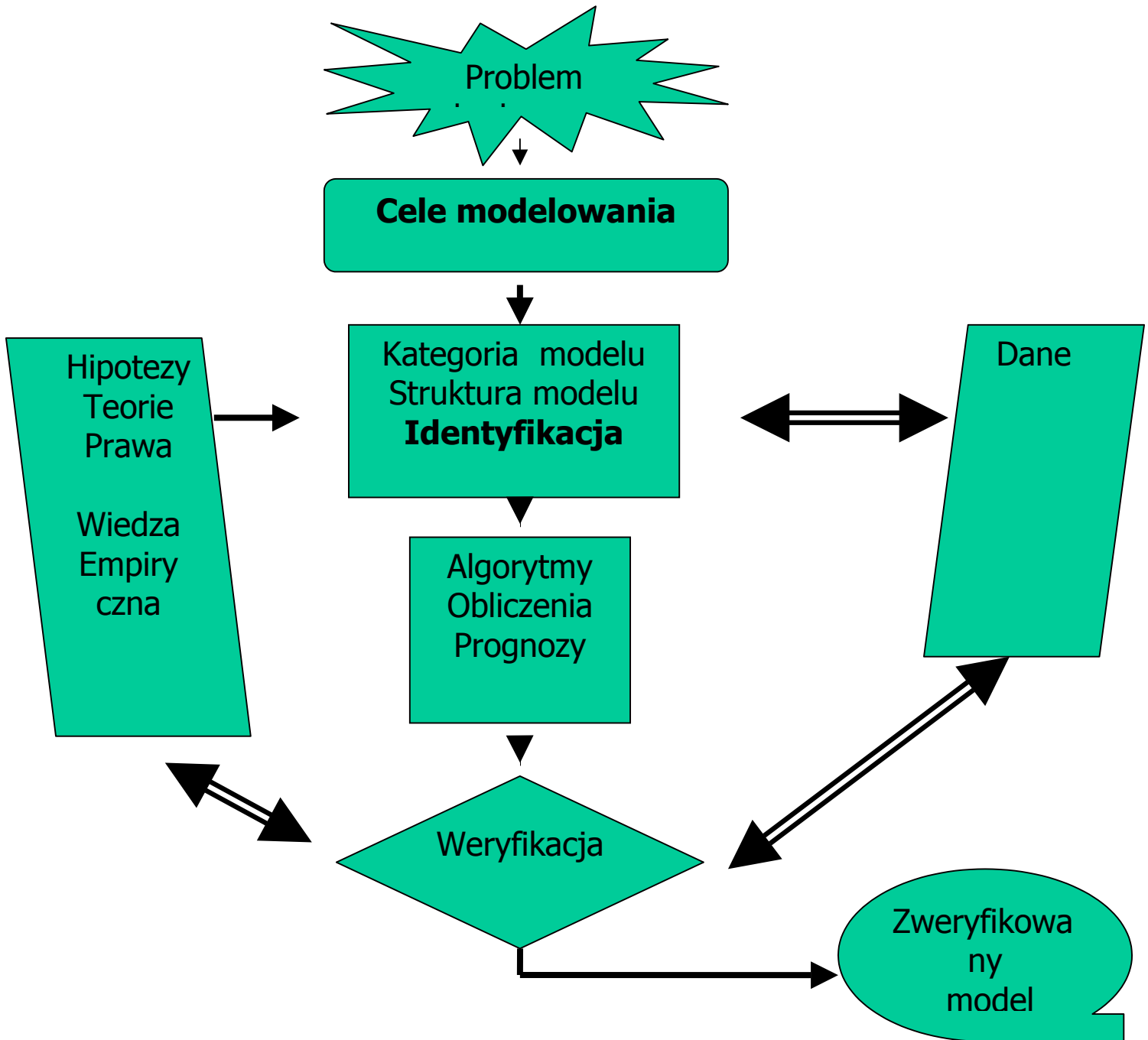
Typy modeli:

- modele o podobieństwie geometrycznym (mapy, makiety)
- modele o podobieństwie kinematycznym
- modele o podobieństwie dynamicznym (makiety stosowane w tunelach aerodynamicznych)
- modele tworzone przez analogie (hydrauliczno elektryczny)
- **modele matematyczne**

Model matematyczny to skończony zbiór symboli i relacji matematycznych oraz ścisłych zasad operowania nimi, przy czym zawarte w modelu symbole i relacje mają interpretację odnoszącą się do konkretnych elementów modelowanego wycinka rzeczywistości.

Zbiór symboli i relacji matematycznych - to twór abstrakcyjny; czynnikiem przekształcającym go w model matematyczny jest fizyczna interpretacja.

Jak tworzymy model?



Przykład: wzrost populacji bakterii

Niech:

$N(t)$ - ilość bakterii w chwili t

r - prędkość reprodukcji

W takim razie, pomijając wymieranie, możemy przypuszczać, że:

$$N(t + \Delta t) \approx N(t) + rN(t)\Delta t$$

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = rN(t)$$

Zakładamy teraz, że rozmiar populacji $N(t)$ jest wielkością ciągłą.

Ma to sens przy następujących założeniach:

1. Liczebność populacji jest duża tak, że dodanie lub odjęcie kilku osobników nic nie zmienia.
2. Rozmnażanie się pojedynczych osobników nie ma wpływu na rozmnażanie się innych osobników. (nie ma skorelowanych gwałtownych zmian liczebności)

Wtedy przechodząc w granicy $\Delta t \rightarrow 0$ powyższe równanie różnicowe można zastąpić równaniem różniczkowym:

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

Równanie to jest znane jako prawo Malthusa (1798). Zastosował je on do opisu populacji ludzi na Ziemi i jego wnioski były nieco zatrważające

...

Równanie to możemy scałkować przez rozdzielenie zmiennych

$$\frac{dN}{N} = r dt$$

$$\int_0^t \frac{dN}{N} = \int_0^t r ds$$

$$\ln N \Big|_0^t = rt$$

Czyli mamy wzrost exponencjalny !

$$\ln N(t) - \ln N(0) = rt$$

$$\ln \left(\frac{N(t)}{N_0} \right) = rt$$

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

Dyskretne modele jednej populacji

Opis dyskretny jest dobry dla populacji dla których nie ma zachodzenia pokoleń na siebie.

Będziemy analizować modele opisywane równaniami różnicowymi typu:

$$N_{t+1} = N_t F(N_t) = f(N_t)$$

Sztuka modelowania polega na umiejętnym dobraniu $f(N)$ tak aby równanie powyższe dobrze oddawało obserwowane fakty.

Uwaga: nie ma prostego związku między równaniami różnicowymi i różniczkowymi:

- Najprostszy przykład:

$$N_{t+1} = rN_t \Rightarrow N_t = r^t N_0$$

czyli mamy wzrost wykładniczy (a jaki był wzrost dla analogicznego równania różniczkowego?)

- Jak uwzględnić wpływ pojemności środowiska?

Np.: $N_{t+1} = rN_s$ gdzie $N_s = N_t^{1-b}$ b takie, że $N_s < N_t$

Interpretacja: N_s - frakcja populacji przeżywająca do rozrodu

- A co się stanie jeśli weźmiemy dyskretną kalkę modelu logistycznego?

$$N_{t+1} = rN_t \left(1 - \frac{N_t}{K}\right) \quad r, K > 0$$

Np. dla $N_t > K$ $N_{t+1} < 0$

Można to poprawić tak:

$$N_{t+1} = N_t \exp \left[r \left(1 - \frac{N_t}{K}\right) \right] \quad r, K > 0$$

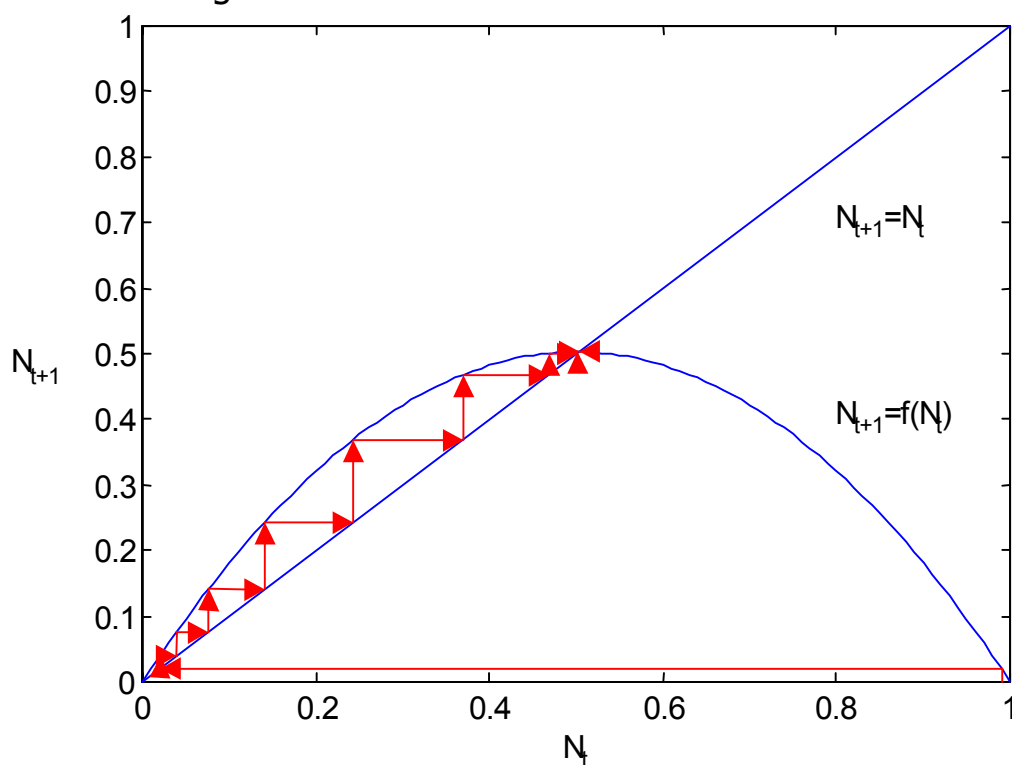
$\exp \left(-\frac{rN_t}{K} \right)$ - czynnik śmiertelności związany z pojemnością środowiska

Pajęczynki - graficzna metoda badania równań różnicowych

Stany stacjonarne

$$N^* = f(N^*) = N^* F(N^*) \Rightarrow \begin{aligned} N^* &= 0 \\ F(N^*) &= 1 \end{aligned}$$

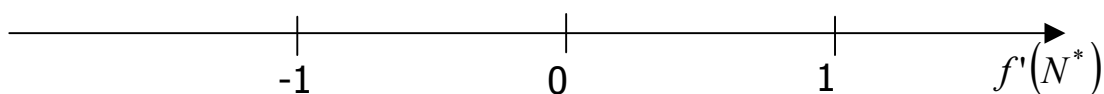
łatwo znaleźć graficznie:

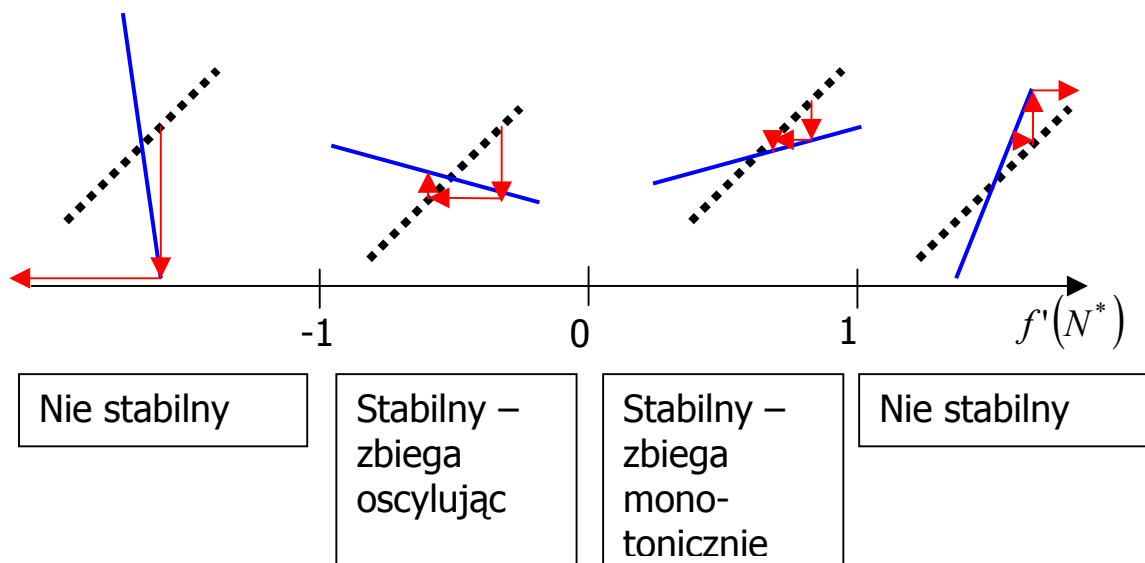


Zachowanie w pobliżu punktu stacjonarnego zależy od sposobu przecięcia się $f(N)$ i $N_{t+1} = N_t$

Ponieważ prosta $N_{t+1} = N_t$ ma stały kąt nachylenia w układzie wsp.

Wystarczy rozważyć jedynie lokalne nachylenie krzywej $N_{t+1} = f(N_t)$ (czyli pochodną $f'(N^*)$)





Bifurkacja – modele są na ogół zależne od pewnych parametrów. Stabilność stanów stacjonarnych może zależeć od wartości parametrów. Jeśli przy małej zmianie jakiegoś parametru r w sąsiedztwie wartości r_0 następuje jakościowa zmiana zachowania modelu (stan stacjonarny zyskuje lub traci stabilność, pojawiają się nowe stany stacjonarne itp.) to mówimy że wartość r_0 jest wartością bifurkacji.

Zadanie 1:

Dla modelu:

$$N_{t+1} = N_t \left[1 + r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right]$$

- Przejść do zmiennych bezwymiarowych
- określić nieujemne stany stacjonarne
- przedyskutować ich liniową stabilność
- znaleźć minimalną i maksymalną liczebność populacji
- znaleźć wartość pierwszej bifurkacji

Zadanie 2:

- Skonstruować pajęczynkę dla modelu:

$$N_{t+1} = \frac{(1+r)N_t}{1+rN_t}$$

- Przedyskutować jakościowo globalne zachowanie rozwiązań.
- Podać minimalną i maksymalną wartość N_t .

Równanie logistyczne – chaos deterministyczny

Przeanalizujemy zachowanie się odwzorowania

$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_t) \quad (*)$$

możemy interpretować je jako bezwymiarową wersję równania na liczebność populacji z uwzględnieniem pojemności środowiska.

Równanie to (jak pewnie wiecie) ma ciekawe zachowanie zależne od wartości parametru r

1. Znajdźmy jego stany stacjonarne i zbadajmy jak zmienia się ich stabilność w zależności od wartości parametru r
2. Narysujmy pajęczynkę dla tego odwzorowania dla $r = 2$ i dla $r = 3.1$
3. Znajdźmy stany stacjonarne dla odwzorowania

$$x_{t+2} = rx_{t+1}(1 - x_{t+1}) = r(rx_t(1 - x_t))(1 - rx_t(1 - x_t)) \quad (**)$$

Musimy w tym celu rozwiązać równanie

$$x = r(rx(1 - x))(1 - rx(1 - x))$$

zauważmy, że stany stacjonarne poprzedniego odwzorowania (*) są też stanami stacjonarnymi odwzorowania (**), a także wyższych iteracji równania (*). Zatem wielomian:

$$p(x) = r(rx_t(1 - x_t))(1 - rx_t(1 - x_t)) - x \quad \text{możemy podzielić przez}$$
$$x - \left(1 - \frac{1}{r}\right)$$

otrzymujemy sfaktoryzowany wielomian:

$$p(x) = -r^3 x \left(x + \left(1 - \frac{1}{r}\right) \right) \left(x^2 - x \left(1 + \frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right) \right)$$

Ostatecznie punktami stacjonarnymi naszego odwzorowania (**) są

$$x = \begin{cases} 0 \\ 1 - \frac{1}{r} \\ \frac{1}{2r} \left(r + 1 + \sqrt{(r-3)(r+1)} \right) \\ \frac{1}{2r} \left(r + 1 - \sqrt{(r-3)(r+1)} \right) \end{cases}$$

dwa ostatnie pierwiastki są rzeczywiste tylko dla $r < -1 \vee r > 3$

Tak więc dla dodatnich r te dwa stany stacjonarne istnieją gdy $r > 3$,

wtedy też stan stacjonarny $1 - \frac{1}{r}$ traci stabilność. Można pokazać

rachunkiem wprost, że punkty $\frac{1}{2r} \left(r + 1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)} \right)$ są stabilne dla $3 < r < r_2 \approx 3.3$.

W analogiczny sposób można znaleźć i zbadać stabilność punktów stacjonarnych kolejnych iteracji równania (*) -> orbity o okresach 2^n . Nowy jakościowo efekt pojawia się w momencie gdy $r \approx 3.83$. Pojawia się wówczas orbita o okresie 3. Udowodnione jest twierdzenie, że jeśli dla pewnego r_c istnieje rozwiązanie dla okresów nieparzystych (co najmniej 3) to powyżej r_c istnieją rozwiązania aperiodyczne.

4. Zbadajmy graficznie co dzieje się z kolejnymi iteracjami (*)

Układy dwóch równań różnicowych

Rozszerzymy teraz naszą metodologię na układy dwóch równań różnicowych. Układ dany jest równaniem :

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n)\end{aligned} \quad f, g - \text{funkcje nieliniowe}$$

W punktach stacjonarnych mamy:

$$x^* = f(x^*, y^*)$$

$$y^* = g(x^*, y^*)$$

Aby wnioskować o stabilności stanu stacjonarnego zbadamy co dzieje się z małymi zaburzeniami $(x^* + x', y^* + y')$.

Rozwijamy funkcje f i g w szereg Taylora wokół punktu stacjonarnego:

$$f(x^* + x', y^* + y') = f(x^*, y^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*, y^*} x' + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x^*, y^*} y' + \dots$$

$$g(x^* + x', y^* + y') = g(x^*, y^*) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x^*, y^*} x' + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{x^*, y^*} y' + \dots$$

i zostawiamy tylko wyrazy liniowe

Oznaczmy:

$$a_{11} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*, y^*}, \quad a_{12} = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x^*, y^*}$$

$$a_{21} = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x^*, y^*}, \quad a_{22} = \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{x^*, y^*}$$

wówczas nasze równania w przybliżeniu liniowym wyglądają następująco:

$$x'_{n+1} = a_{11}x'_n + a_{12}y'_n$$

$$y'_{n+1} = a_{21}x'_n + a_{22}y'_n$$

w notacji wektorowej

$$\mathbf{x}'_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}'_n \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}'_n = \begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \end{pmatrix}$$

Teraz musimy znaleźć pierwiastki równania charakterystycznego:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

$$\lambda^2 - \text{tr} \mathbf{A} \lambda + \det \mathbf{A} = 0$$

Aby punkt stacjonarny był stabilny potrzeba aby oba pierwiastki co do modułu były mniejsze niż 1.

Jakie wynikają stąd warunki na ślad i wyznacznik?

Pierwiastki tego równania to: $\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr } \mathbf{A} \pm \sqrt{\text{tr } \mathbf{A}^2 - 4 \det \mathbf{A}}}{2}$

Dla rzeczywistych pierwiastków ($\text{tr } \mathbf{A}^2 > 4 \det \mathbf{A}$):

Wierzchołek paraboli musi być pomiędzy -1 a 1

$$-1 < \frac{\text{tr } \mathbf{A}}{2} < 1$$

$$2 > |\text{tr } \mathbf{A}|$$

zaś odległość pomiędzy wierzchołkiem paraboli a miejscem zerowym musi być mniejsza niż odległość wierzchołka od ± 1

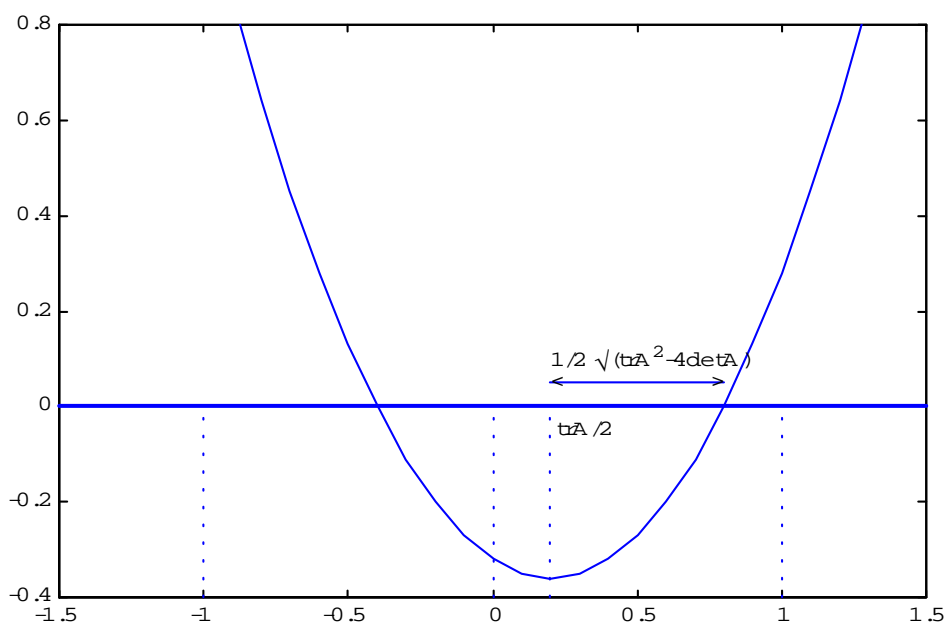
$$1 - \left| \frac{\text{tr } \mathbf{A}}{2} \right| > \frac{\sqrt{\text{tr } \mathbf{A}^2 - 4 \det \mathbf{A}}}{2}$$

$$1 - |\text{tr } \mathbf{A}| + \frac{\text{tr } \mathbf{A}^2}{4} > \frac{\text{tr } \mathbf{A}^2 - 4 \det \mathbf{A}}{4}$$

$$1 + \det \mathbf{A} > |\text{tr } \mathbf{A}|$$

łącząc oba warunki mamy

$$2 > 1 + \det \mathbf{A} > |\text{tr } \mathbf{A}|$$



Warunek stabilności dla układów wyższego rzędu

Dla układów wyższych rzędów metoda postępowania teoretycznie jest taka sama - linearyzacja układu w pobliżu punktu stacjonarnego, a następnie zbadanie wartości własnych jacobianu. Problem praktyczny polega na tym, że dla wyższych stopni równania charakterystycznego trudno jest znaleźć analityczną postać pierwiastków. Pomocne jest tu kryterium Jury¹ (1971) .

Rozważmy wielomian:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

Potrzebne nam będą kombinacje parametrów konstruowane w następujący sposób:

$$\begin{array}{lll} b_n = 1 - a_n^2 & c_n = b_n^2 - b_1^2 & d_n = c_n^2 - c_2^2 \\ b_{n-1} = a_1 - a_n a_{n-1} & c_{n-1} = b_n b_{n-1} - b_1 b_2 & d_{n-1} = c_n c_{n-1} - c_2 c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-k} = a_k - a_n a_{n-k} & c_{n-k} = b_n b_{n-k} - b_1 b_{k+1} & d_{n-k} = c_n c_{n-k} - c_2 c_{k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & d_3 = c_n c_3 - c_2 c_{n-1} \\ \vdots & c_2 = b_n b_2 - b_1 b_{n-1} & \\ b_1 = a_{n-1} - a_n a_1 & & \end{array}$$

aż do momentu gdy zostaną nam trzy wielkości np.:

$$q_n = p_n^2 - p_{n-3}^2$$

$$q_{n-1} = p_n p_{n-1} - p_{n-3} p_{n-2}$$

$$q_{n-2} = p_n p_{n-2} - p_{n-3} p_{n-1}$$

¹ Jury, E.I. (1971) The inners approach to some problems of. IEEE Trans. Automatic Contr. AC-12,233-240 system theory

Na tak zdefiniowanych parametrach test Jury wygląda następująco:
Warunki konieczne i wystarczające na to aby wielomian $P(\lambda)$ miał pierwiastki $|\lambda| < 1$ są następujące:

$$P(1) = 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n > 0$$

$$(-1)^n P(-1) = (-1)^n [(-1)^n + a_1(-1)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(-1) + a_n] > 0$$

$$|a_n| < 1$$

$$|b_n| < |b_1|$$

$$|c_n| < |c_2|$$

⋮

$$|q_n| < |q_{n-2}|$$

Przykład zastosowania testu Jury:

Mamy wielomian:

$$P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$n = 4$$

$$1. P(1) = 4 > 0$$

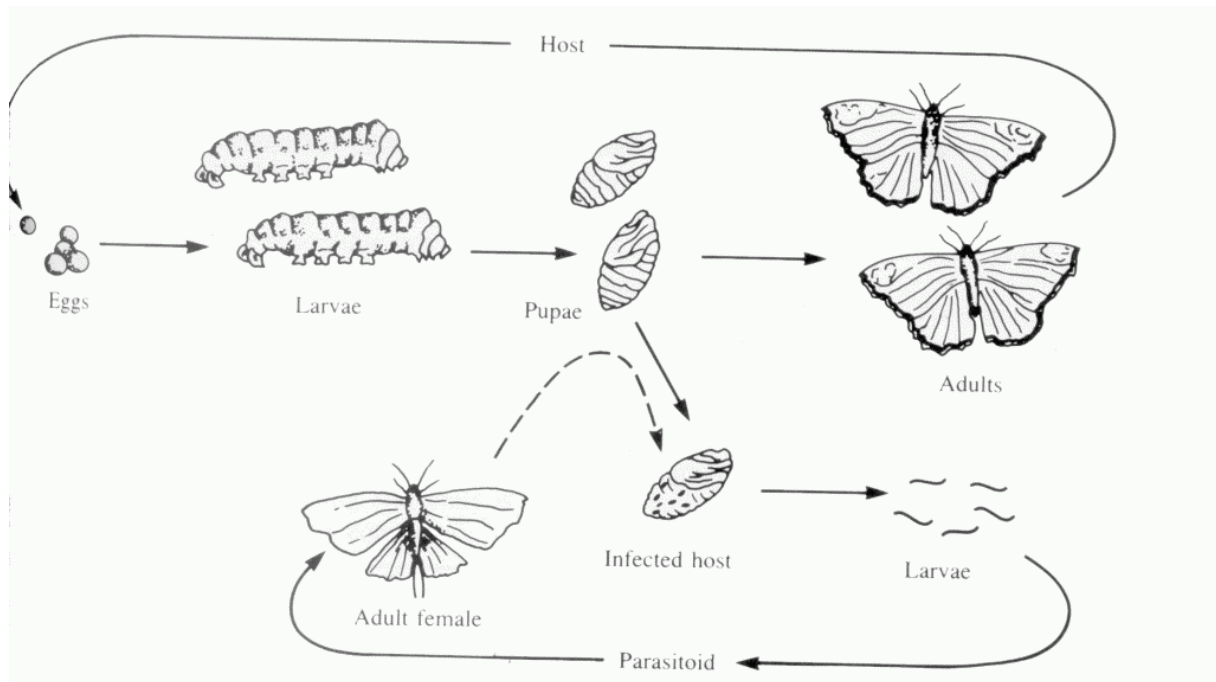
$$2. (-1)^4 P(-1) = 1(1 - 1 + 1 - 1 + 1) = 1 > 0$$

$$3. |a_n| = 1 \rightarrow \text{nie spełniony warunek}$$

Ponieważ trzeci warunek nie jest spełniony więc ten wielomian ma przynajmniej jeden pierwiastek nie mniejszy niż 1.

Przykład

Prostym przykładem modelu z układem dwóch równań różnicowych jest model opisujący pasożyty i ich nosicieli w świecie owadów.



Wspólne założenia dla tego typu modeli są następujące:

1. Nosiciele zakażeni pasożytami wydadzą następne pokolenie pasożytów
2. Nosiciele nie zakażeni wydadzą kolejne pokolenie własnego gatunku
3. Frakcja nosicieli zakażonych zależy od częstości spotkań obu gatunków, najczęściej zależy od gęstości obu gatunków.

Do opisu modelu wprowadzimy następujące zmienne:

N_t - gęstość nosicieli w pokoleniu t

P_t - gęstość pasożytów w pokoleniu t

$f = f(N_t, P_t)$ - frakcja nosicieli, która nie została zakażona

λ - prędkość reprodukcji nosicieli

c - średnia ilość jaj pasożytów złożona na pojedynczym nosicielu

Założenia 1-3 prowadzą do następującej postaci równań:

$$N_{t+1} = \lambda N_t f(N_t, P_t)$$

$$P_{t+1} = c N_t [1 - f(N_t, P_t)]$$

Jest to ogólna postać równań dla układu nosiciel – pasożyt

Dla skonkretyzowania dalszych rozważań przeanalizujemy konkretny model opisany przez Nicholsona (biolog) i Baileya (fizyk) (1935).

Panowie ci dołożyli do poprzednich założeń dwa następujące:

4. Spotkania pasożytów i nosicieli są przypadkowe. Liczba spotkań jest zatem proporcjonalna do iloczynu gęstości obu populacji:

$$n_e = aN_t P_t$$

5. Tylko pierwsze spotkanie dwóch osobników jest znaczące. (Przy pierwszym spotkaniu pasożyt składa jaja w nosicielu, kolejne spotkania zakażonego nosiciela z pasożytami nie zmieniają ilości potomnych pasożytów (c), które wylęgną się z tego zakażonego nosiciela.

Ponieważ spotkania następują przypadkowo to trzeba je opisywać jakąś funkcją rozkładu prawdopodobieństwa. Zajście pewnej średniej liczby zdarzeń w jednostce czasu dobrze opisuje rozkład Poissona.

Prawdopodobieństwo tego, że nosiciel w czasie swojego życia nie zostanie zarażony wynosi:

$$f(N_t, P_t) = p(0) = e^{-aP_t}$$

Zatem otrzymujemy model:

$$N_{t+1} = \lambda N_t e^{-aP_t}$$

$$P_{t+1} = cN_t (1 - e^{-aP_t})$$

Dla przypomnienia:

Prawdopodobieństwo zajścia w jednostce czasu k zdarzeń których średnio zachodzi μ dane jest

$$p(k) = \frac{e^{-\mu} \mu^k}{k!}$$

Zadanie

Znaleźć stany stacjonarne. Zbadać ich stabilność.

Zadanie kolejne

Zbadać powyższy model przy dodatkowym założeniu, że pod nieobecność pasożytów populacja nosicieli ma wzrost limitowany pojemnością środowiska:

$$\lambda(N_t) = e^{r(1 - N_t/K)}$$