Modele dyskretne z opóźnieniem

Rozważmy model, w którym liczebność osobników w czasie $t+1$ zależy od liczebności w czasie t ale także od liczebności w czasie o T wcześniejszym - w ten sposób możemy uwzględnić efekty dorastania do wieku rozrodczego. Ogólnie sytuacja taka jest opisywana równaniem:

$$N_{t+1} = f\left(N_t, N_{t-T}\right) \tag{1}$$

Jako konkretną ilustrację rozpatrzymy model:

$$N_{t+1} = N_t \exp\left(r\left(1 - \frac{N_{t-T}}{K}\right)\right), \qquad r > 0 \tag{2}$$

Równanie to możemy zinterpretować następująco: na obecne tempo rozmnażania ma wpływ efekt ciasnoty występujący w czasie o T wcześniejszym.

Po zamianie zmiennych $\frac{N}{K} = u$ otrzymujemy równanie bezwymiarowe:

$$u_{t+1} = u_t \exp\left(r\left(1 - u_{t-T}\right)\right) \tag{3}$$

Punkty stacjonarne tego modelu to $u^* = 0$ i $u^* = 1$.

Stabilność: badamy małe wychylenia od u^*

$$u_t = u^* + x_t$$

i $|x_t| << 1$

1^o dla $u^* = 0$:

$$x_{t+1} = x_t \exp\left(r\left(1 - x_{t-T}\right)\right)$$

$\exp\left(r\left(1 - x_{t-T}\right)\right) > 1$ dla $r > 0$ czyli $u^* = 0$ jest niestabilnym punktem stacjonarnym

2^o dla $u^* = 1$

$$1+x_{t+1} = (1+x_t)\exp\left(r\left(1-(1+x_{t-T})\right)\right) = (1+x_t)\exp\left(-rx_{t-T}\right) \approx (1+x_t)(1-rx_{t-T})$$

Dalej dla uproszczenia przyjmijmy, że $T = 1$, wówczas

$$x_{t+1} - x_t + rx_{t-1} = 0$$

Poszukujemy rozwiązań tego równania postaci $x_t = z^t$, popodstawieniu mamy

$$z^2 - z + r = 0$$

rozwiązaniem są

$$z_1, z_2 = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-4r}\right)$$

rozwiązanie równania na małe wychylenia jest postaci:

$$x_t = Az_1^t + Bz_2^t$$

dla $0 < r < 1/4$ pierwiastki są rzeczywiste i $z_1, z_2 \in (0, 1)$ czyli małe wychylenia zanikają z czasem.

Dla $r > 1/4$ pierwiastki są zespolone i można je zapisać w postaci:

$$z_1, z_2 = \rho e^{\pm i\theta}$$

widać, że$|z_1| = |z_2| = \rho = \sqrt{r}$. Ponieważ rozwiązania na małe wychylemia muszą być rzeczywiste więc $A = \bar{B}$, ostatecznie rozwiązanie wygląda tak:

$$x_t = 2|A|\rho^t \cos(t\theta + \gamma), \qquad \theta = \mathrm{tg}^{-1}\sqrt{4r-1}, \qquad \gamma = \arg A$$

Dla $1/4 < r < 1$ $\rho^t \to 0$ dla $t \to \infty$ więc $u^* = 1$ jest stabilny. Przy przejściu z r przez 1 punkt ten traci stabilność bo małe wychylnia rosną w czasie.

W pobliżu wartości granicznej $r = 1$ $\theta \approx \mathrm{tg}^{-1}\sqrt{3} = \pi/3$

$$x_t \approx 2|A|\cos(t\pi/3 + \gamma)$$

Rozwiązanie oscyluje z okresem = 6. Proszę zbadać zachowanie równania numerycznie dla $r \in \{0.2, 0.3, 0.8, 1, 1.1, 1.2\}$

```
function opoznienie_dyskretne(r)
x(1)=1;
x(2)=1.1;
%r=0.5;
for t=2:100
```

```
    x(t+1)=x(t)*exp(r*(1-x(t-1)));
    plot(x,'-o');
    xlim([1 100]);
    ylim([0 3.5])
    drawnow
end
```