Cykle graniczne

Dotychczas zajmowaliśmy się głównie znajdowaniem i badaniem stabilności punktów stacjonarnych. Wiele ciekawych procesów ma naturę cykliczną. Umiemy już sobie poradzić z cyklicznością występującą w równaniach typu Lotki-Volterry - punkt stacjonarny typu centrum. Model ten jest jednak mało realistyczny - wykazuje niestabilność strukturalną.

Cykle występujące w biologii są innego rodzaju - wykazują dużą stabilność wobec zewnętrznych zaburzeń. Posiadają cechy asymptotyczne - graniczne. W przestrzeni fazowej cykl tworzy zamkniętą krzywą (Wychodząc z dowolnego punktu po skończonym czasie powinniśmy do tego punktu powrócić). Dla czasu $t \to \infty$ trajektorie zbiegają do cyklu - wówczas cykl jest stabilny. Możliwe jest też, że dla $t \to -\infty$ trajektorie zbiegają do cyklu i wtedy mamy cykl niestabilny.

Dla układów dwu wymiarowych istnieje kilka narzędzi pozwalających na badanie występowania cykli granicznych. Bazują one na następujących faktach:

1. Zamknięta krzywa dzieli płaszczyznę na dwie rozłączne części: wnętrze i zewnętrze.
2. Dla gładkich przepływów w dwu wymiarowej przestrzeni fazowej są tylko 4 możliwości

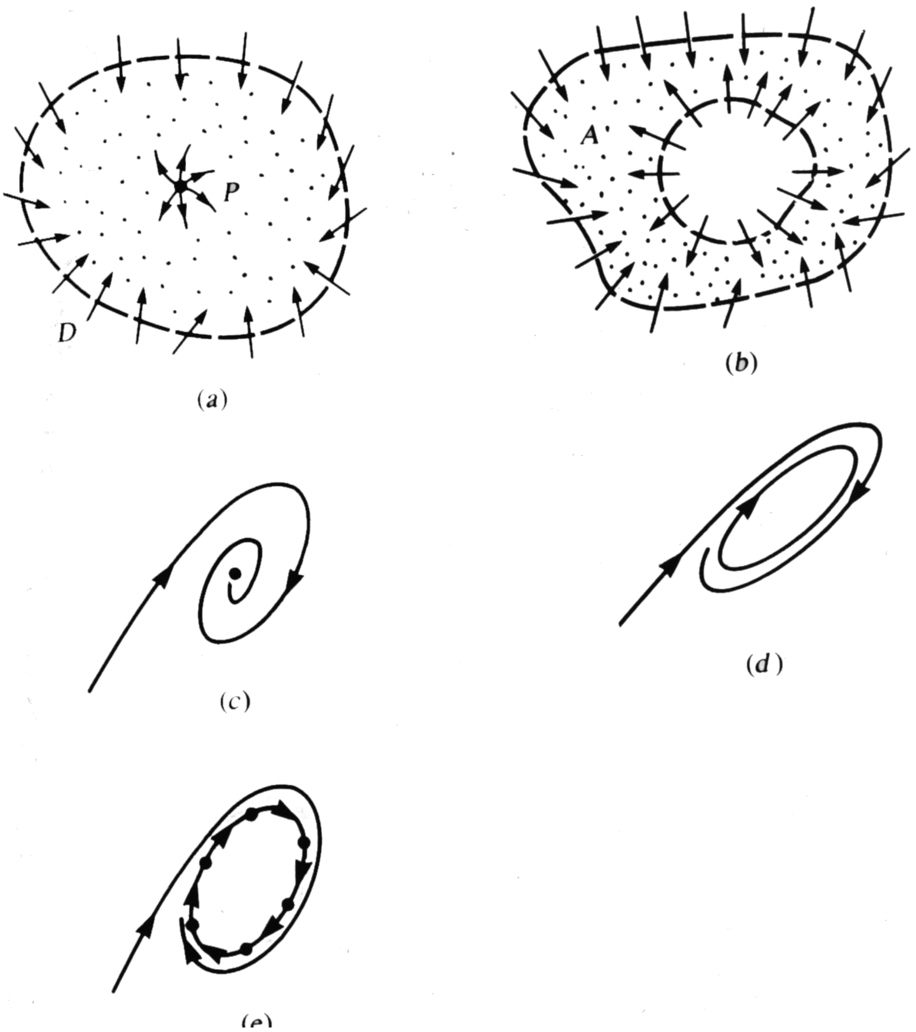
a) Trajektoria biegnie do punktu stabilnego

b) Trajektoria jest bądź dąży do orbity periodycznej

c) Trajektoria dąży do grafu cyklicznego

d) Trajektoria rozbiega się do nieskończoności

Jeżeli trajektoria jest ograniczona i nie opuszcza zamkniętego fragmentu płaszczyzny to pozostają tylko możliwości a)-c)



Twierdzenie Poincare-Bendixona:

Jeśli dla $t \geq t_0$ trajektoria jest ograniczona i nie dąży do żadnego punktu osobliwego, to jest albo zamknięta orbitą periodyczną albo do niej dąży dla $t \rightarrow \infty$.

Twierdzenie 2: Własności pola wskazujące na istnienie orbit

Jeśli dwuwymiarowe pole wektorowe posiada następujące własności

1. Istnieje ograniczony obszar D na płaszczyźnie fazowej i zawiera on w sobie jeden odpychający punkt stacjonarny typu niestabilnego węzła lub niestabilnego ogniska oraz pole wpływa do tego obszaru ale z niego nie wypływa to wówczas w tym obszarze istnieje cykl graniczny.
2. Jeśli istnieje ograniczony obszar A z dziurą w środku, do którego pole wpływa ale z niego nie wypływa to wówczas w tym obszarze istnieje cykl graniczny.

Twierdzenie 3: stabilność orbit

1. Jeśli któryś z dwóch typów obszarów opisanych powyżej ma dokładnie jeden cykli graniczny to cykl ten jest stabilny.
2. Jeśli mamy dwie orbity periodyczne $\Gamma_1 \ i \ \Gamma_2$ takie, że Γ_1 jest zawarta wewnątrz Γ_2 i w obszarze pomiędzy tymi orbitami nie ma punktów osobliwych ani innych orbit periodycznych to jedna z orbit $\Gamma_1 \ albo \ \Gamma_2$ jest niestabilna po stronie skierowanej do drugiej z orbit.

Kryteria negatywne:
Są dwa kryteria negatywne wykluczające istnienie cyklu granicznego w układach typu:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = G(x, y)$$

1. Kryterium Bendixona:

Niech D będzie spójnym obszarem na płaszczyźnie fazowej. Jeśli wyrażenie $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}$ nie jest zerem dla wszystkich $(x, y) \in D$ i nie zmienia znaku w D to w regionie D nie ma zamkniętych orbit.

2. Kryterium Dulaca:

Niech D będzie spójnym obszarem na płaszczyźnie fazowej, zaś $B(x, y)$ ciągłą i różniczkowalną w D funkcją. Jeśli wyrażenie $\frac{\partial (BF)}{\partial x} + \frac{\partial (BG)}{\partial y}$ nie jest zerem dla wszystkich $(x, y) \in D$ i nie zmienia znaku w D to w regionie D nie ma zamkniętych orbit.

Przykład:

Zastosować kryterium Bendixona i kryterium Dulaca (z funkcją $B = \frac{1}{xy}$ do układu:

$$\frac{dx}{dt} = r_1 x \frac{k_1 - x - \beta_{12} y}{k_1}$$

$$\frac{dy}{dt} = r_2 y \frac{k_2 - y - \beta_{21} x}{k_2}$$

Oscylator Van der Pola – oscylator relaksacyjny

Van der Pol w 1927 zastosował podobny model do opisu obwodu elektrycznego z triodą:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = y - f(x) \qquad 0 < \varepsilon << 1$$
$$\frac{dy}{dt} = -x$$

Niech $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$

- Narysować nulkiliny
- Przedyskutować kryterium Pioncere – Bendixona
- Narysować przebieg czasowy.

Z pierwszego równania widac, że x zmienia się szybko jeśli $y \neq f(x)$.

Na tych odcinkach trajektorii właściwą skalą czasu jest $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ (wtedy $dt = \varepsilon\, d\tau$):

$$\frac{dx}{d\tau} = y - f(x)$$
$$\frac{dy}{d\tau} = -\varepsilon x \quad \to \quad y \approx const$$

W pozostałych momentach czasu układ porusza się po nulklinie $y = f(x)$

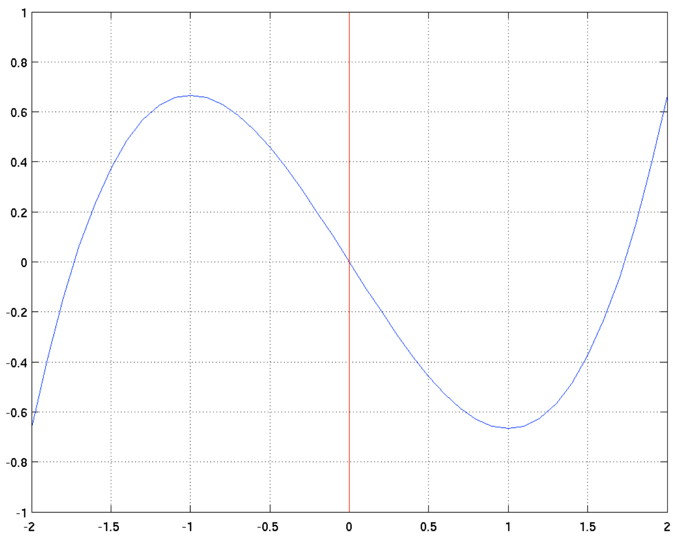
Możemy stąd wyznaczyć przybliżony okres takiego oscylatora

Z drugiego równania:

$$\frac{d(f(x))}{dt} = -x \quad \to \quad f'(x)\frac{dx}{dt} = -x$$

w naszym przypadku

$$f'(x) = x^2 - 1$$
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{x^2+1}$$
$$\int_0^{T/2} dt = -\int_2^1 \frac{x^2+1}{x}\,dx$$
$$T = 3 - 2\ln 2$$



Bifurkacja Hopfa

Teoria bifurkacji Hopfa jest kolejnym narzędziem do badania występowania cykli granicznych. Działa także dla więcej niż dwuwymiarowych systemów.
Dla ustalenia uwagi zajmijmy się najpierw układem dwuwymiarowym, który posiada pewien parametr γ:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, \gamma)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y, \gamma)$$

Załóżmy, że układ ten posiada pewien stan stacjonarny, który może zależeć od parametru γ: $(x^*(\gamma), y^*(\gamma))$

Załóżmy następnie, że jakobian układu:

$$J(\gamma) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)}$$

ma zespolone wartości własne $\lambda(\gamma) = a(\gamma) \pm i\,b(\gamma)$
Jeśli istnieje taka wartość γ^*dla której $a(\gamma^*) = 0$i $b(\gamma^*) \neq 0$ i przy przejściu przez γ^*, a zmienia znak (punkt stacjonarny traci stabilność) to są możliwe następujące przypadki:

1. Dla wartości $\gamma = \gamma^*$powstaje centrum tak więc wokół $(x^*(\gamma), y^*(\gamma))$ powstają koncentryczne zamknięte orbity.
2. Jest pewien zakres wartości parametru $\gamma^* < \gamma < c$, dla którego powstaje jedna zamknięta orbita – cykl graniczny otaczająca $(x^*(\gamma), y^*(\gamma))$, jej promień zmienia się proporcjonalnie do $\sqrt{|\gamma - \gamma^*|}$ - amplituda oscylacji rośnie stopniowo wraz z oddalaniem się od punktu krytycznego. Zjawisko to nazywa się nadkrytyczną bifurkacją Hopfa bo zachodzi powyżej γ^*

Jest pewien zakres wartości parametru $d < \gamma < \gamma^*$, (podkrytyczna bifurkacja Hopfa) dla którego jednocześnie punkt stacjonarny traci stabilność i znika niestabilny cykl graniczny, pozostaje stabilny cykl graniczny. W ten sposób mogą nagle powstać w układzie oscylacje o dużej amplitudzie.

Twierdzenie Hopfa niestety nie mówi dla jakiej konkretnie wartości w pobliżu γ^* powstanie cykl graniczny.

Przykład

$$\frac{dx}{dt} = y = f(x, y, \gamma)$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + \gamma y - y^3 = g(x, y, \gamma)$$

Jedyny stan stacjonarny dla $x = y = 0$ i Jakobian

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{y^2}{3} + \gamma \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \gamma \end{pmatrix}$$

wartości własne

$$\lambda = \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4}}{2}$$

w zakresie $-2 < \gamma < 2$ wartości własne są zespolone i

$$\mathrm{Re}\,\lambda = \frac{\gamma}{2} \quad \mathrm{Im}\,\lambda = \frac{\sqrt{4 - \gamma^2}}{2}$$

Bifurkacje występuje dla $\gamma = 0$ i część rzeczywista zmienia znak. Zatem z twierdzenia Hopfa powinien pojawić się cykl graniczny dla $\gamma > 0$.

Przykład: nadkrytyczna bifurkacja Hopfa:

$$\frac{dr}{dt} = \gamma r - r^3$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega$$

Przykład: podkrytyczna bifurkacja Hopfa:

$$\frac{dr}{dt} = \gamma r + r^3 - r^5$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega$$

Rozszerzenie twierdzenia Hopfa na więcej wymiarowe układy

Mamy układ n równań z n zmiennymi:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \gamma)$$

gdzie

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\mathbf{F} = (f_1(\mathbf{x}, \gamma), f_2(\mathbf{x}, \gamma), \ldots, f_n(\mathbf{x}, \gamma))$$

Linearyzacja układu w punkcie stacjonarnym $\mathbf{x}^*$ daje n wartości własnych

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-2}, a + ib, a - ib$$

$n-2$ wartości własne mają ujemne części rzeczywiste oraz dokładnie dwie wartości własne są liczbami zespolonymi sprzężonymi, takimi , że przy przejściu przez pewną wartość krytyczną γ^* a zmienia znak. Wówczas w sąsiedztwie γ^* istnieje cykl graniczny.