Krótka historia matematyki

Ryszard Paweł Kostecki

(...) Gdyby matematyka była zwykłą nauką w rodzaju astronomii czy mineralogii, moglibyśmy zdefiniować jej przedmiot. Otóż nie istnieje żadna matematyka — istnieją tylko matematyki. To, co nazywamy historią „matematyki” — owo rzekomo progresywne urzeczywistnianie jednego i niezmiennego ideału — jest w istocie, skoro tylko usuniemy złudną warstwę powierzchniową, mnogością zamkniętych w sobie, niezależnych procesów rozwojowych, powtarzającymi się narodzinami nowych i przyswajaniem sobie, przekształcaniem oraz wyzbywaniem się obcych światów form, czysto organicznym cyklem rozkwitania, dojrzewania, więdnięcia i umierania o określonym czasie trwania. Duch antyczny stworzył swą matematykę prawie z niczego; historycznie usposobiony duch Zachodu, posiadający już wyuczoną wiedzę starożytną — zewnętrznie, nie zaś wewnętrznie — musiał zdobyć własną matematykę przez pozorne zmienienie i ulepszenie, faktycznie jednak przez zniszczenie obcego mu z gruntu systemu euklidesowego. Jedno było dziełem Pitagorasa, drugie zaś — Kartezjusza. Oba te akty są w samej głębi identyczne.

Pokrewieństwo mowy form danej matematyki z mową form wielkich sztuk pokrewnych nie ulega przeto żadnej wątpliwości. Usposobienie myśliciela i artysty jest nader odmienne, ale środki wyrazu ich świadomej działalności są wewnętrznie podobne. W geometrycznej analizie i rzutowej geometrii XVII wieku objawia się ten sam uduchowiony porządek nieskończonego świata, który prawdopodobnie powołał do życia, ogarnął i przeniknął ówczesną muzykę dzięki rozwiniętej z kunsztu basu cyfrowanego harmonice — tej geometrii przestrzeni tonów — jak również spokrewnione z nią malarstwo olejne dzięki znanej tylko Zachodowi zasadzie perspektywy: tej odczutej geometrii przestrzennego obrazu świata. Od Goethego pochodzi głęboka sentencja, że matematyk jest o tyle tylko doskonały, o ile odczuwa on w sobie piękno prawdy; można tu dostrzec, jak blisko tajemnica istoty liczby przylega do tajemnicy twórczości artystycznej.

Matematyka jest więc także sztuką. Ma swoje style i okresy ich dominacji. Nie powinno się omawiać rozwoju wielkich sztuk, nie spojrzawszy przy tym — a z pewnością nie będzie to daremne spojrzenie — na ówczesną matematykę. Nigdy jeszcze nie przebadano szczegółów w ramach bardzo głębokich powiązań miedzy przemianami teorii muzyki a analizą nieskończonościową, choć estetyka mogłaby więcej się od tego nauczyć niż od wszelkiej „psychologii”. Jeszcze bardziej pouczająca byłaby historia instrumentów muzycznych, gdyby zgłębiano w jej zakresie ostateczne duchowe podstawy zamierzonej barwy i efektu dźwięku. Wzmożone bowiem aż do poziomu tęsknoty pragnienie, by wytworzyć przestrzenną nieskończoność dźwięków, zrodziło już w gotyku — w przeciwieństwie do antycznej liry i fujarki (lira, kithara, aulos, syrinx) oraz arabskiej lutni — obie dominujące rodziny instrumentów klawiszowych (organy) i smyczkowych. Organy stały się, głównie w Niemczech, opanowującym przestrzeń osobnym instrumentem o olbrzymich rozmiarach, nie znajdującym równego sobie w całej historii muzyki. Monumentalne koncerty organowe Bacha i jego epoki są jako żywo analizą ogromnego i rozległego świata tonów.

O. Spengler, 1917, *Zmierzch zachodu*, Monachium
(przeł. J. Marzęcki, Warszawa 2001)
fragmenty rozdziału *O znaczeniu liczb*

Wstęp

Czym właściwie jest matematyka?

Matematyka jest potocznie rozumiana przez pryzmat szkolnych przeżyć oraz codziennych życiowych zastosowań jako nauka o liczbach (arytmetyka) lub figurach (geometria). Jest to jednak jedynie wierzchołek wielkiej góry lodowej. Wraz z przybliżaniem się do niej widać coraz wyraźniej kolejne piętra, czyli takie dziedziny, jak na przykład teoria funkcji, różniczkowanie i całkowanie, rachunek prawdopodobieństwa, teoria gier, algebra, topologia, itd. Liczba różnych działów matematyki wciąż rośnie. Dzieje się tak zarówno z powodu specjalizacji badań (czyli rozwoju szczegółowych dziedzin, zawierających się w dziedzinach dotychczas istniejących), jak również z powodu odkrywania nowych dziedzin, które wiążą ze sobą zagadnienia już istniejące (lecz traktowane jako odległe) lub całkowicie wykraczają poza dotychczasową wiedzę. W związku z tym trudno określić przedmiot matematyki: nie są to już tylko liczby i kształty, lecz także przestrzenie, zbiory, funkcje, odwzorowania, diagramy, procesy,... We wszystkich swoich działach matematyka przejawia się jako charakterystyczna *metoda podejścia do stawiania i rozwiązywania zagadnień*, czyli po prostu pewien określony *sposób myślenia.*

Warto zauważyć, że słowo „matematyka”, czyli μαθηματική [*mathēmatikē*] pochodzi od starogreckich słów μάθημα [*máthēma*] oraz μάθησις [*máthēsis*], oznaczających *naukę*, *uczenie się*, których źródłowy czasownik μανθάνω [*manthánō*] oznaczał przede wszystkim „uczę się przez rozmyślanie”, w odróżnieniu od uczenia się przez doświadczenie. Myślenie matematyczne jest przede wszystkim *abstrakcyjne*. Polega ono na operowaniu abstrakcyjnymi pojęciami przy pomocy których dokonuje się wyrażania (reprezentacji) konkretnych problemów. Dzięki temu można rozwiązywać te problemy w oderwaniu od nieistotnych szczegółów. Przykładem zastosowania tej metody jest wyabstrahowanie liczb "1" i "2" oraz działania "+" ze skomplikowanej sytuacji w rodzaju "pod drzewem jabłko i jabłko, na polu owca i owca, a ja jestem głodny". Polega ono na znalezieniu oderwanych od konkretu (jabłek lub owiec) *abstrakcyjnych pojęć*:

"jeden", "dwa", "dodać",

oraz *reprezentacji symbolicznej* pod postacią napisów

"1", "2" i "+",

wraz z *działaniem*

"jeden dodać jeden to dwa" ,

symbolicznie reprezentowanym jako "1 + 1 = 2". Dodawanie chmur czy też baranów (lub bananów) może samo w sobie nie ma wielkiego znaczenia praktycznego, lecz zyskuje je w połączeniu z pozostałymi elementarnymi operacjami na liczbach (odejmowanie, mnożenie, dzielenie). Tak otrzymany zbiór liczb naturalnych (lub całkowitych) wraz z określonymi na nim operacjami elementarnymi występuje w roli podstawowego zastosowania matematyki w praktyce i może posłużyć jako model matematycznego myślenia. Wbrew pozorom nie jest to przykład banalny – mimo, że współcześnie używamy arytmetyki liczb rzeczywistych (a przynajmniej wymiernych) wiele razy dziennie, to jej opracowanie zajęło całe tysiąclecia.

Poza abstrakcyjnością, umożliwiającą upraszczanie realnych sytuacji do takich, które dają się rozwiązać, bardzo ważną cechą myślenia matematycznego jest *podejście dedukcyjne*. Jest to rodzaj wnioskowania, w ramach którego możemy wyprowadzać wyłącznie takie wnioski, które są wynikiem zastosowania ustalonych reguł do zbioru określonych aksjomatów i definicji. Jest to podejście istotnie odmienne od stosowanego w naukach przyrodniczych *podejścia indukcyjnego*, w ramach którego można wyprowadzać wnioski ogólne ze szczególnych przypadków lub intuicyjnych przesłanek. Przykładem zastosowania podejścia dedukcyjnego jest wywnioskowanie że

$$2 + 2 = 4,$$

w oparciu o definicję pojęcia liczby naturalnej oraz własności działania dodawania (łączność).[1]

1 Liczby naturalne definiuje się współcześnie przy pomocy czterech aksjomatów Peano: 1) 0 jest liczbą naturalną; 2) Każda liczba naturalna ma swój następnik, oznaczany przez S(a); 3) 0 nie jest następnikiem żadnej liczby naturalnej; 4) Jeśli a i b są różnymi liczbami naturalnymi, to mają różne następniki. Z tego wynika, że liczbę 1 można zdefiniować jako S(0), liczbę 2 można

Przykładem zastosowania podejścia indukcyjnego jest zaś wnioskowanie, iż wszystkie krowy są czarne po zobaczeniu kilku takich krów i ani jednej krowy, która nie byłaby czarna. Rozumowanie indukcyjne umożliwia formułowanie hipotez, przyrodniczych lub humanistycznych, które uogólniają to co wiemy na obszar tego co nie wiemy, lecz ceną jaką się za to płaci jest *stopień pewności* otrzymanych wniosków. Wyniki rozumowania indukcyjnego nie są *pewne*, lecz jedynie *prawdopodobne*. Natomiast stosując rozumowanie dedukcyjne mamy zagwarantowaną absolutną pewność otrzymanych wniosków. Jednak nie jest to pewność absolutna, a jednie pewność *w ramach abstrakcyjnego modelu*, to znaczy pod warunkiem, że definicje i aksjomaty przyjęte za przesłanki wnioskowania dedukcyjnego są spełnione. Ponieważ tłumaczenie konkretnych realiów jakiejkolwiek badanej sytuacji na abstrakcyjny język modelu zawsze wiąże się z pewnego rodzaju idealizacją, stosowanie rozumowania dedukcyjnego nie zapewnia pewności tego, że jego wyniki będą *praktycznie stosowalne*. Daje jednak teoretyczną pewność, na poziomie wyidealizowanych struktur i modeli. Podejście dedukcyjne nie jest ani "lepsze" ani "bardziej prawdziwe" od podejścia indukcyjnego, jest jednak bardziej precyzyjne i jednoznaczne, gdyż z określonych przesłanek (aksjomatów, definicji) i reguł wnioskowania (zazwyczaj jest to logika klasyczna) wynika zawsze ten sam wniosek, podczas gdy w podejściu indukcyjnym tego typu zasada nie jest obowiązkowo spełniona. Wybór któregokolwiek z tych podejść zależy od celu który sobie stawiamy. Zazwyczaj przy konstruowaniu pewnych modeli teoretycznych ich podstawowe założenia i pojęcia formułuje się na drodze indukcyjnej, zaś wnioski wyprowadza się już metodą dedukcyjną.

Dzięki abstrakcyjności i dedukcyjności matematyka może występować pod postacią *symbolicznego języka* w ramach którego można stawiać i formułować rozmaite zagadnienia. Zapis symboliczny umożliwia (dzięki metodzie dedukcyjnej) analizowanie problemów przez przekształcenia pewnych *symboli* (liczb, figur, diagramów, itd.) zgodnie z jednoznacznie określonymi regułami. W ten sposób wkładając określone treści w jakiś matematyczny model danej sytuacji, *z pewnością* dojdziemy do zawsze takich samych wniosków, które z kolei możemy znów przełożyć na konkretne treści badanego zagadnienia. W gruncie rzeczy na tym właśnie polega istota matematycznego modelowania dowolnych procesów – czy to w fizyce i biologii, czy to w psychologii lub ekonomii. We wszystkich tych przypadkach wykorzystujemy matematykę jako uniwersalne narzędzie *symbolicznego, abstrakcyjnego i dedukcyjnego modelowania zjawisk*.

Metody matematyczne można zastosować w praktycznie każdej dziedzinie, w której mamy do czynienia z takimi pojęciami jak *wielkość* (lub *liczba*), *struktura*, *przestrzeń* i *zmiana*. Ogólne działy współczesnej matematyki zajmujące się tymi pojęciami to odpowiednio *arytmetyka*, *algebra*, *geometria* oraz *analiza*. Jest to podział jedynie przybliżony i niepełny, między innymi dlatego że w rzeczywistości istnieje bardzo dużo obszarów matematyki pośrednich pomiędzy powyższymi, lub zupełnie z nimi niewspółmiernych. Na przykład *geometria algebraiczna* zajmuje się badaniem obiektów geometrycznych metodami algebraicznymi, *geometria różniczkowa* bada obiekty geometryczne metodami analizy, zaś na przykład *teoria gier* jest działem matematyki, który w zasadzie wykracza poza powyższy czwórpodział. Ścisła aksjomatyzacja takich teorii i związanych z nimi metod rozwiązywania łamigłówek ma zazwyczaj zarówno aspekty analityczne jak i algebraiczne, jednak są to działy matematyki w istotnym stopniu niezależne od pozostałych. Matematyka jest bowiem *otwartą* dyscypliną wiedzy i twórczości, stąd w jej ramach powstają coraz to nowe pojęcia, teorie i techniki, umożliwiające bogate modelowanie rozmaitych zjawisk. Dlatego warto mieć na uwadze matematykę jako narzędzie, język i sposób modelowania konkretnych problemów w każdej sytuacji praktycznej. Z drugiej strony, prowadzi to do pytania o ramy określające granice tej dyscypliny oraz jej zmienność.

Kulturowe uwarunkowania matematyki

Historia matematyki jest nierozłączną częścią historii ludzkości. Rozróżnianie liczby obiektów (przedmiotów, ludzi, zwierząt), co najmniej w zakresie *brak-jeden-dwa-dużo*, jest zdolnością posiadaną przez ludzi prawdopodobnie od zawsze (zdolność tą posiada również wiele zwierząt). Wydaje się jednak, że do tworzenia bardziej zaawansowanej matematyki konieczne jest istnienie kultury w ramach której ten rozwój się odbywa. Takie przejawy matematyki jak liczenie w ramach systemu liczb naturalnych (1, 2, 3, 4, ...) wraz z operacjami dodawania i mnożenia, a także badanie proporcji i relacji rozmiarów

zdefiniować jako $S(S(0))$, zaś liczbę 4 można zdefiniować jako $S(S(S(S(0))))$. Dodawanie liczb naturalnych definiuje się jako operację +, spełniającą dwa warunki: 1) $a + 0 = a$, oraz 2) $a + S(b) = S(a) + b$. W rezultacie dowód twierdzenia $2 + 2 = 4$ polega na pokazaniu, że $S(S(0)) + S(S(0)) = S(S(S(S(0))))$, przy wykorzystaniu definicji operacji +.

pomiędzy kształtami geometrycznymi, czyli elementarna arytmetyka i geometria, pojawiają się w dostępnych źródłach historycznych i archeologicznych dopiero wraz z powstaniem i rozkwitem starożytnych kultur. Najprawdopodobniej kategorie pojęciowe elementarnej matematyki, a w konsekwencji sama dziedzina wiedzy, powstają dopiero jako wewnętrzny przejaw danej kultury, w rezultacie określonych wewnątrzkulturowych warunków i potrzeb, takich jak liczenie związane z kalendarzem, własnością i wymianą, oraz określanie proporcji kształtów i długości związane z budowaniem, podziałem ziemi i estetyką. Matematyka pełni również istotną rolę w religijnych przejawach kultury (czy też kulturowych przejawach religii). W związku z tym aż do okresu nowoczesności, w którym nastąpiła ogólnoświatowa dominacja aparatu pojęciowego kultury zachodnioeuropejskiej, mamy do czynienia nie z jedną, lecz z różnymi historiami matematyki. Do tego czasu każda kultura posiadała swój system pojęć matematycznych, w ramach którego wyrażała i rozwiązywała problemy związane z istotnymi kwestiami danej kultury. Oczywiście, pomiędzy różnymi kulturami było wiele matematycznych zapożyczeń (jednym z najsławniejszych są cyfry 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, które zostały zapożyczone przez Arabów z Indii, a następnie przez Europę od Arabów), jednakże polegały one zawsze na wybiórczym asymilowaniu pewnych aspektów matematycznych i ignorowaniu innych. Nie oznacza to w żadnym wypadku, że matematyka jako dziedzina ludzkiej działalności jest subiektywna. Jest ona intersubiektywna, co znaczy, że istotne pojęcia lub konteksty ich stosowania, metody dowodzenia, oraz kryteria wyboru interesujących problemów dla każdej kultury są, a przynajmniej były, inne. Nie sprzeczne, lecz niewspółmierne. Nowożytna ogólnoświatowa ekspansja kulturowa Europejczyków doprowadziła bowiem do dominacji tej kultury nad innymi, zaś towarzyszący temu dynamiczny rozwój europejskiej matematyki, począwszy od XVI i XVII wieku, przyczynił się ostatecznie do współczesnego kształtu matematyki – dyscypliny uprawianej w ten sam sposób, tymi samymi pojęciami, metodami i symbolami, niezależnie od szerokości czy długości geograficznej[2]. Niezależnie od tego czy stan ten się będzie utrzymywał w dowolnie odległej przyszłości, trzeba mieć na uwadze, że przeszłość (czyli historia) matematyki nie daje się przedstawić na jednej linii nieustannego „rozwoju" i kumulacji wiedzy. Wielokrotnie wybitne wyniki były zapominane lub zagubione, po to tylko, by zostać odkryte jeszcze raz, czasem po ponad tysiącu lat[3], zaś zapożyczenia były częstokroć mocno wybiórcze. Stąd też można odnieść mylne wrażenie, że matematyka poszczególnych kultur była, w porównaniu ze współczesną, uboga w problemy i metody. Tymczasem często przedstawienia historii matematyki absolutyzują rolę tej zachodnioeuropejskiej, skutkiem czego wyrażają pojęcia, metody i cele pozostałych matematyk nie w ich oryginalnych kontekstach (co oczywiście jest trudnym zadaniem) lecz w kontekście współczesnym, usuwając w cień jako „nieistotne" lub „mętne" to, co w istocie stanowiło żywą treść danej matematyki. Ramy tego tekstu nie dają możliwości dalszego zagłębiania się w te kwestie, lecz warto je mieć na uwadze zawsze kiedy poruszany jest temat historii matematyki. Poniżej przyjrzymy się, siłą rzeczy – z lotu ptaka, matematyce rozwijanej w ramach konkretnych kultur oraz historii kilku podstawowych problemów matematycznych.

Przed zanurzeniem się w burzliwe wody historii matematyki w różnych kulturach warto zastanowić się, czy zmienność (czasem radykalna) form i treści matematycznych pomiędzy różnymi kulturami nie wyklucza możliwości mówienia o *jednej i tej samej* dziedzinie – matematyce, nawet jeśli zarówno jej formy jak i treści podlegają istotnym zmianom. Innymi słowy, przyjęcie antropologicznego punktu widzenia wymaga takiego określenia pojęcia „matematyka", które miałoby szanse posiadać jednoznaczny desygnat w dowolnej badanej kulturze. Cytat rozpoczynający niniejszy tekst pokazuje z jak dużą skalą zagadnień musi się zmierzyć każda próba definitywnego rozwiązania tego problemu. I *de facto* każde konkretne rozwiązanie jest opowiedzeniem się za taką lub inną perspektywą antropologiczną. Niniejszy tekst można rozumieć jako próbę przyjrzenia się temu problemowi z różnych stron. Dlatego też narrację historii matematyki opartą na analitycznym opisie różnych detali skontrastujemy tutaj z kongenialnym syntetycznym ujęciem proponowanym przez Spenglera.

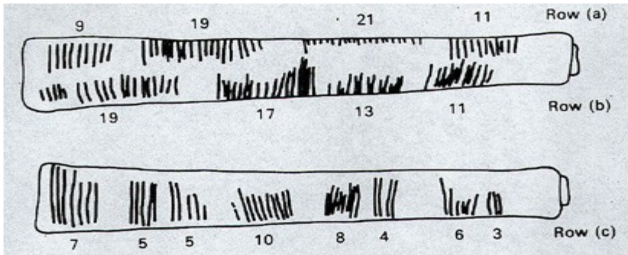
2 Przynajmniej oficjalnie. Wspomniany pod koniec niniejszego tekstu przykład Srinivāsy Aiyangāry Rāmānujana ewidentnie zaprzecza prawdziwości tego kulturowo uwarunkowanego sądu.

3 Przykładowo, niektóre rezultaty Archimedesa (III wiek p. n. e.) były odkryte ponownie i niezależnie dopiero w XVI wieku w Europie przez prekursorów rachunku różniczkowego.

Matematyka w ramach poszczególnych kultur

Okres paleolityczny

Najstarszym znanym obecnie zapisem świadomości matematycznej jest tzw. *Kość z Lebombo* (znaleziona na terenie obecnego Królestwa Suazi w Afryce Południowej), datowana na 35 000 lat p. n. e. Zawiera ona 29 ściśle ułożonych kresek, wyrażających oznaczenia kalendarzowe, używane po dzisiejszy dzień przez klany buszmenów w Namibii. Drugim tego rodzaju starym obiektem jest tzw. *Kość z Ishango* (teren źródeł Nilu i Jeziora Edwarda na granicy pomiędzy Ugandą a Zairem), datowana na 25 000 lat p. n. e.:



Kość z Ishango, ok. 25 000 lat p. n. e.

Kreski w wierszach (a) i (b) dodają się do 60. Wiersz (b) zawiera liczby pierwsze pomiędzy 10 a 20. Wiersz (a) jest w miarę zgodny z systemem liczbowym opartym na 10, ponieważ liczby kresek w grupach wynoszą 20 + 1, 20 – 1, 10 + 1, oraz 10 – 1. Wreszcie wiersz (c) wydaje się ilustrować metodę mnożenia przez 2, używaną później w egipskiej matematyce. Mikroskopowe badania pokazują dodatkowe znaki, z których wynika że ta kość jest również kalendarzem faz księżyca. (Niektórzy wyprowadzają z tego wniosek że pierwszym matematykiem była kobieta[4].) Podobną kość, datowaną na ok. 26 000 lat p. n. e. znaleziono w trakcie wykopalisk w obozowiskach łowców mamutów w Dolních Věstonicach na Morawach. Kość ta zawiera 57 kresek, z których pierwsze 25 jest zebrane w grupach po pięć kresek o równej długości, co może sugerować liczenie odnoszące się do pięciu palców u dłoni.

Okres historyczny

W okresie historycznym istniało kilka dużych obszarów kulturowych które wykształciły swoje odrębne i jakościowo różne matematyki. Najważniejsze z nich to Mezopotamia, Egipt, Mezoameryka, Peru, Indie, Chiny, Grecja, średniowieczna Arabia i Persja, oraz nowożytna Europa. Dzieje matematyki sprzęgają się równie silnie z historią kultury jak i z historią pisma. Wynalazek pisma niezależnie pojawia się w Mezopotamii ok. 3500 lat p. n. e. (pismo klinowe), w Egipcie ok. 3200 lat p. n. e. (pismo hieroglificzne), prawdopodobnie w Peru ok. 3000 lat p. n. e. (pismo wężełkowe)[5], w Chinach ok. 2600 lat p. n. e. (pismo na skorupie żółwia)[6], w Indiach ok. 2000 lat p. n. e. i w Mezoameryce ok. 900 lat p. n. e. Pismo zdecydowanie ułatwiło prowadzenie matematycznych rachunków oraz przyspieszyło rozwój myśli matematycznej w ramach poszczególnych kultur. W historii matematyki wielką rolę odgrywa również przepływ wiedzy pomiędzy kulturami. Nowożytna europejska matematyka powstała w oparciu o problemy i techniki matematyki greckiej oraz arabskiej. Ta pierwsza z kolei wyniosła ważne (choć z pewnością tylko niektóre) idee z Egiptu i Mezopotamii, zaś ta druga wiele zawdzięcza matematyce Indii oraz starożytnej Grecji. Matematyka indyjska wniosła również pewien wkład do matematyki chińskiej. W tej sytuacji tylko matematyka kultur amerykańskich rozwijała się całkiem oddzielnie, przy czym związek pomiędzy matematyką mezoamerykańską a peruwiańską jest nieznany. Największy wkład do współczesnej matematyki europejskiej miały matematyka starożytnej Grecji, średniowiecznej Arabii i Persji oraz Indii. Właśnie w tych trzech kulturach (oraz w naszej) matematyka nie była podporządkowana praktyce, lecz stanowiła niezależny przedmiot badań, twórczości i spekulacji.

4 Claudia Zaslavsky, 1992, *Women as the first mathematicians*, Women in Mathematics Education Newsletter **7**.

5 Podczas wykopalisk w mieście Caral odkryto kipu datowane na ok. 3000 lat p. n. e.

6 Odkryto także znaki na skorupie żółwia datowane na 6000 lat p. n. e. Trudno jednak powiedzieć czy można je określić jako pismo. Natomiast z ok. 3000 lat p. n. e. pochodzą ślady pisma węzłowego, które funkcjonowało jeszcze w czasach pisania *Tao Te Ching* (*Dào dé jīng*), czyli ok. 550 r. p. n. e.

Mezopotamia

(Społeczności miejskie od ok. 4000 p. n. e., pismo klinowe od ok. 3500 p. n. e., dynastie sumeryjskie od ok. 3100 p.n.e do ok. 2000 p. n. e., dynastie babilońskie od ok. 1900 p.n.e do 522 r. p. n. e., dynastie asyryjskie od ok. 1900 p. n. e. do 612 r. p. n. e., miasto Babilon od ok. 2300 p. n. e.)

Matematyka obszaru starożytnej Mezopotamii jest zazwyczaj nazywana babilońską, ze względu na to, że najliczniejsze źródła (około 400 glinianych tabliczek) pochodzą z wykopalisk babilońskich. Tabliczki te były zapisywane wówczas, gdy glina była jeszcze miękka, po czym były wypalane w piecu lub na słońcu. Większość wykopanych tabliczek jest datowana na okres 1800-1600 p. n. e.[7] i dotyczy między innymi takich zagadnień jak ułamki, równania kwadratowe i sześcienne, oraz obliczanie liczb naturalnych spełniających twierdzenie Pitagorasa. Jedna z tabliczek podaje przybliżenie liczby $\sqrt{2}$ z dokładnością do pięciu miejsc po przecinku. Babilończycy używali systemu liczbowego o podstawie 60 (system sześćdziesiątkowy). Podział okręgu na 360 (= 6*60) stopni, a w konsekwencji podział godziny na 60 minut i minuty na 60 sekund, wywodzi się właśnie z matematyki babilońskiej. Trudno odpowiedzieć na pytanie dlaczego Babilończycy obrali za podstawę akurat 60. Być może jest to związane z przybliżoną liczbą dni w roku (6*60 = 360), lecz nie jest to pewne. Pozycyjność systemu liczbowego oznacza, że zapis liczb był prowadzony w kilku kolumnach, zaś każda zawierała mnożnik kolejne potęgi 60, np. $374 = 6 \cdot 60^1 + 14 \cdot 60^0 = 360 + 14$ (współczesny zapis matematyczny jest analogiczny, lecz jego podstawą jest 10). Cyfry od 1 do 9 wyglądały następująco:

zaś cyfry 10, 20, 30, 40 i 50 wyglądały tak:

Brakujące cyfry pomiędzy 10 a 59 otrzymywano przez kombinację powyższych. Na przykład 11 otrzymywano przez połączenie jedynki z dziesiątką:

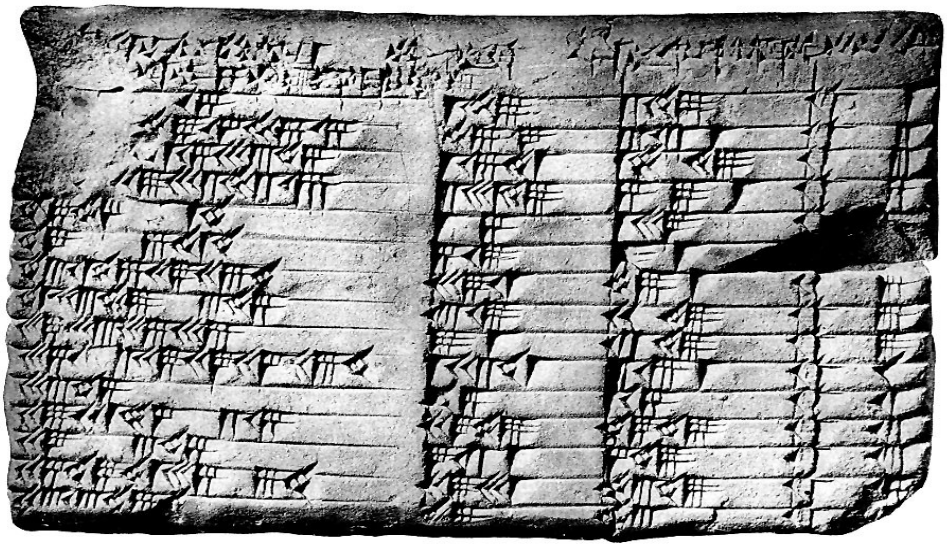
Natomiast liczby większe od 59 były otrzymywane przez układanie cyfr w kolejnych kolumnach. Przykładowo, liczba 70 była zapisywana jako

Na słynnej glinianej tabliczce nazwanej *Plimpton 322* (rysunek na następnej stronie), pochodzącej z ok. 1800 p. n. e., czyli ponad tysiąc lat przed Pitagorasem, zapisane zostały obliczenia długości boków trójkątów, zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa $a^2 + b^2 = c^2$. Tabliczka ta jest zapisana z prawa na lewo. W pierwszej kolumnie są podane kolejne numery porządkowe, kolumna druga zawiera słowo „liczba”, zaś kolumna trzecia zaczyna się od słowa „długość”, po czym wymienione są kolejne wartości *a*. Kolumna czwarta zaczyna się od słowa „przekątna”, po czym zapisane są kolejne wartości *c*. Ostatnia kolumna zawiera wartości *b* obliczone zgodnie ze wzorem

$$b=\sqrt{c^2-a^2}\ ,$$

z dokładnością co najmniej do czwartego miejsca po przecinku. W Mezopotamii nie znano zera ani jako *liczby* (którą można dodawać, mnożyć, itd.), ani jako *cyfry*. Wskutek tego ten sam napis mógł oznaczać zarówno 11, 601, 36001, jak i 36060. Dopiero za panowania Seleucydów (około roku 400 p. n. e.) na tabliczkach klinowych w zapisie liczb pojawia się symbol dwóch klinów, które oznaczają nieobecność cyfry w danej pozycji.

7 Słynny *Kodeks Hamurabiego* spisany był za panowania Hamurabiego (w latach 1792-1750 p. n. e. lub 1728-1686 p. n. e.), czyli w przybliżeniu w tym samym czasie.

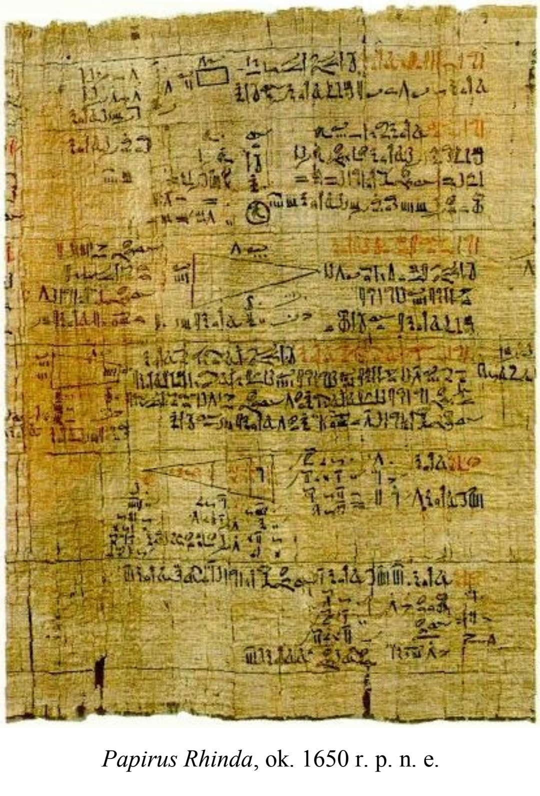


Babilońska tabliczka *Plimpton 322* z ok. 1800 lat p. n. e.,
zawierająca obliczenia zgodne z twierdzeniem Pitagorasa

Egipt

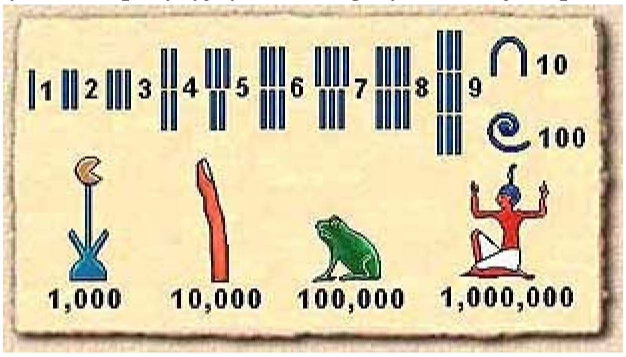
(Wiek miedzi od ok. 6000 lat p. n. e., okres dynastii od ok. 3900 p. n. e. do 343 r. p. n. e.)

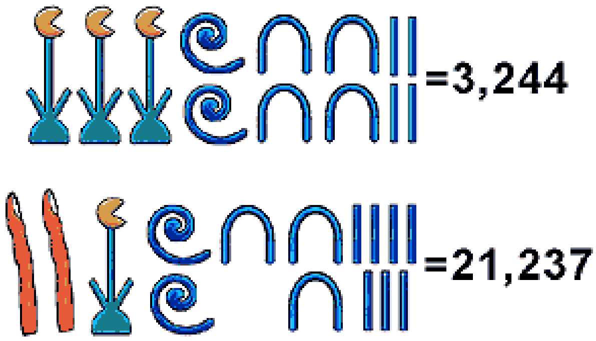
Najstarsze ślady egipskiej matematyki wiążą się z kalendarzem. Egipcjanie korzystali z kalendarza (a więc i ze związanej z nim arytmetyki) już około 4800 lat p. n. e., zaś około 4200 lat p. n. e. dysponowali już kalendarzem 365-dniowym (12 miesięcy składających się z 30 dni + 5 dodatkowych dni). Około 3100 lat p. n. e. rozmaite rolnicze kultury żyjące wzdłuż brzegów Nilu zostały zjednoczone przez Menesa, który założył pierwszą dynastię faraonów. W tym czasie korzystanie z systemu liczb naturalnych było już w Egipcie rozwinięte. Potwierdza to zapis znaleziony na królewskiej buławie z tego czasu, określający liczbę zdobyczy na wojnie wygranej przez faraona Narmera (wnuka Menesa): 120 000 więźniów, 400 000 wołów oraz 1 422 000 gęsi. Następnym w kolejności wieku egipskim znaleziskiem matematycznym jest słynny *Moskiewski papirus*, datowany na około 1850 r. p. n. e., który zawiera kilka rozwiązanych problemów arytmetycznych i geometrycznych (stanowi on fragment większego papirusu zawierającego co najmniej 60 takich problemów). Egipska matematyka zajmowała się przede wszystkim liczeniem, z nastawieniem na pomiary i rachunki geometryczne. W odróżnieniu od Greków, których cechowało abstrakcyjne podejście do matematyki, Egipcjanie byli zainteresowani wyłącznie zastosowaniami praktycznymi, zatem wszelkie obliczenia przeprowadzane były w kontekście konkretnych zastosowań. Aksjomaty lub dowody, a więc również teoretyzowanie, są u nich całkowicie nieobecne. Egipska matematyka jest więc przede wszystkim zbiorem technik rachunkowych stosowanych do konkretnych problemów. Szczególnie interesowało ich obliczanie powierzchni oraz objętości rozmaitych figur: trójkątów, prostokątów, trapezów, prostopadłościanów, piramid czy cylindrów. Ich zainteresowanie mierzeniem było związane tyleż z budownictwem co z pomiarami gruntu, gdyż częste wylewy Nilu powodowały konieczność ponownych podziałów terenu. Nie posiadali oni znaków oznaczających dodawanie, odejmowanie, mnożenie lub dzielenie, więc wszelkie operacje matematyczne opisywali słownie. Jedyne oznaczenie dodatkowe z jakiego korzystali był system zapisu ułamków o liczniku równym jeden, takich jak $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, itd., polegający na umieszczeniu nad daną liczbą (odpowiednio: 2, 3, 4, ...) znaku przypominającego palące się cygaro. Jedynym wyjątkiem od tej reguły był odrębny znak oznaczający ułamek $^2/_3$. Innych ułamków w starożytnym Egipcie nie używano. W związku z tym, aby zapisać wynik



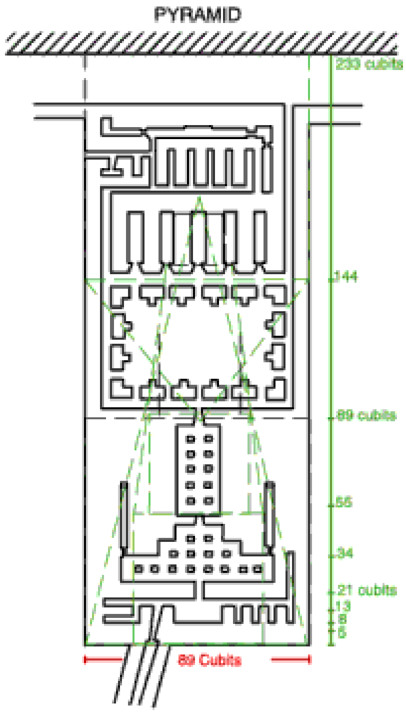
Papirus Rhinda, ok. 1650 r. p. n. e.

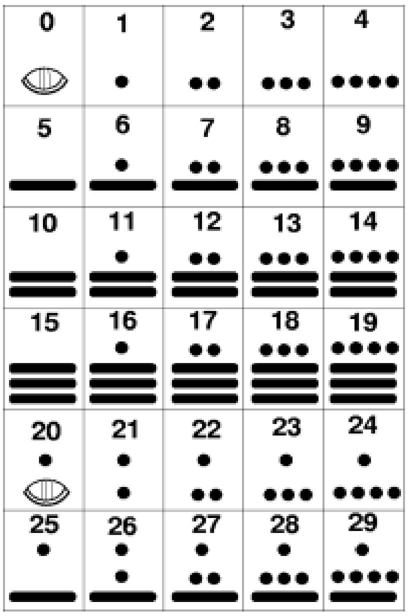
równy np. $^2/_{97}$ Egipcjanie musieli napisać $^1/_{56} + ^1/_{679} + ^1/_{776}$. System liczbowy starożytnego Egiptu nie był systemem pozycyjnym. Hieroglify oznaczające poszczególne znaki wyglądały następująco:





Egipcjanie umieli również rozwiązywać niektóre układy dwóch równań z dwoma niewiadomymi. Np. w tzw. *Berlińskim papirusie* (datowanym na okres XIX dynastii, około 1300-1200 p. n. e.) zapisane jest następujące zadanie: „Powierzchnia kwadratu 100 łokci kwadratowych jest równa powierzchni dwóch mniejszych kwadratów, gdzie powierzchnia jednego z nich jest równa ½ + ¼ drugiego. Ile wynosi długość brzegów tych dwóch nieznanych kwadratów?”. Zadanie to jest równoważne współczesnemu układowi równań $x^2 + y^2 = 100$ oraz $x = \frac{3}{4}y$. Natomiast z tzw. *Papirusu Rhinda*[8] (datowanego na ok. 1650 r. p. n. e. i będącego kopią wcześniejszego dokumentu z ok. 2000 r. p. n. e., który z kolei mógł być kopią papirusu z czasów Imhotepa, ok. 2650 r. p. n. e.) wynika, że Egipcjanie znali przybliżenie liczby π równe $^{256}/_{81} = 3 + ^1/_9 + ^1/_{27} + ^1/_{81} \approx 3.1605$, otrzymane przez przybliżenie okręgu przez ośmiokąt foremny. Liczby i proporcje pełniły bardzo ważną rolę w sakralnych aspektach życia Egipcjan. Uderzające jest zastosowanie przez nich przy budowie piramid tzw. ciągu Fibonacciego. Kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego powstają przez dodanie do siebie dwóch poprzednich wyrazów, przy czym dwoma początkowymi wyrazami są dwie jedynki. Pierwsze kilkanaście wyrazów tego ciągu to 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 i 610. Okazuje się, że wyrażone w egipskich królewskich łokciach długości ścian świątyni pogrzebowej położonej przy piramidzie Khafra (gr. Chephren), datowanej na około 2500 lat p. n. e. (czyli 3700 lat przed Fibbonaccim) tworzą ciąg Fibbonacciego. Budowle sakralne w starożytnym Egipcie były budowane z wstrząsającą dokładnością. Przykładowo, datowana również na około 2500 lat p. n. e. piramida Khufu, znana współcześnie jako piramida Cheopsa (Χεωψ było greckim tłumaczeniem imienia Khufu), posiadała oryginalnie wysokość 280 królewskich łokci (ok. 146.6 m), zaś długość krawędzi kwadratowej podstawy wynosiła 440 królewskich łokci (ok. 231 m). Stosunek sumy długości krawędzi podstawy tej piramidy do jej wysokości wynosi w przybliżeniu 6.2857, co podzielone przez 2 daje 3.14285. Jest to przybliżenie liczby π z dokładnością większą niż 0.05% i jest znacznie lepsze niż to z papirusu Rhinda.[9] Egipcjanie nie znali zera, ani jako liczby, ani jako cyfry.





Mezoameryka

(Olmekowie ok. 1200 p. n. e. – 400 p. n. e., Majowie ok. 1000 p. n. e. – 1697 n. e. (okres klasyczny cywilizacji Majów: ok. 200 n. e. – ok. 900 n. e.), Aztekowie ok. 1250 n. e. – 1521 n. e., budowle świątynne od ok. 1000 p. n. e., pismo od ok. 900 p. n. e.)

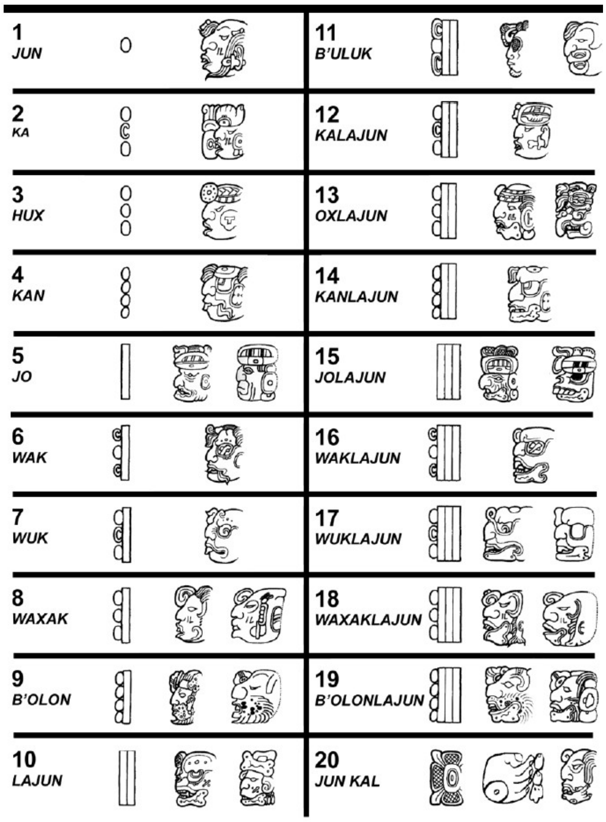
8 Zwanego również *Papirusem Ahmesa*, od imienia egipskiego skryby będącego autorem tego papirusu.

9 Faktu tego nie można jednak traktować jako dowodu na znajomość tak dokładnej *arytmetycznej wartości liczbowej* π, a jedynie na umiejętność precyzyjnej konstrukcji figur geometrycznych.

Większość posiadanych współcześnie informacji na temat mezoamerykańskiej matematyki dotyczy kultury Majów, choć z pewnością część ich wiedzy matematycznej pochodziło od Olmeków. Natomiast system liczbowy i kalendarz Azteków był uproszczeniem (z pewnymi niedokładnościami) systemu Majów. Niestety nasza wiedza o Majach jest uboga, ze względu na masowe spalenie większości mezoamerykańskich źródeł pisanych przez hiszpańskich księży w 1521 roku, jak również z powodu zwyczaju palenia przez Azteków rękopisów podbijanych ludów. Głównym źródłem wiedzy o matematyce Majów jest datowany na ok. 1200 r. n. e. tzw. *Kodeks Dreźnieński* (zapisany pędzelkiem na *kopó,* tzn. wygładzonej korze figowca pokrytej pastą z lipy). Zawiera on obliczenia astronomiczne cykli Słońca, Księżyca i Wenus o zdumiewającej dokładności. Obliczyli oni miedzy innymi czas obrotu Ziemi wokół Słońca równy 365.242 dni (współcześnie mierzona wartość wynosi 365.242198 dni). Prócz tego bardzo dokładnie obliczyli czas trwania miesiąca księżycowego. Znaleziska z Copán podają że 149 miesięcy księżycowych trwa 4400 dni, co daje długość miesiąca księżycowego równą 29.5302 dni. Natomiast znaleziska z Palenque podają że 81 miesięcy księżycowych trwa 2392 dni, co daje średnio 29.5308 dni. Współcześnie mierzona długość miesiąca księżycowego wynosi natomiast 29.53059 dni, co różni się od wyniku podanego przez Majów tylko o 0.001%! Wcześniejsze świadectwa matematycznej wiedzy Majów pochodzą z zachowanych kamiennych stelli, na których zapisane są oznaczenia kalendarzowe. Majowie posiadali dwa kalendarze – odziedziczony po Olmekach kalendarz rytualny, *tzolkin* (powstały co najmniej ok. 700 p. n. e.), składający się z 13 miesięcy po 20 dni każdy (razem 260 dni), oraz zwyczajny kalendarz składający się z 18 miesięcy po 20 dni oraz 5 dodatkowych, wyjątkowo niepomyślnych dni (*wahab*).

Majowie używali systemu liczbowego opartego na liczbie 20, który był zbliżony do systemu pozycyjnego. Nie wiadomo dokładnie kiedy (lecz z pewnością przed 32 r. p. n. e.) odkryli oni cyfrę zero i włączyli ją do swojego systemu liczbowego. Majowie nie używali dzielenia oraz ułamków. Pomimo że umieli wykonywać mnożenie, podobnie do Egipcjan nie mieli żadnego oznaczenia na to działanie. Co ciekawe, ich arytmetyka zajmowała się nie tylko wartościami liczb naturalnych, ale również ich znaczeniem symbolicznym. Przykładowo, liczba 3 była związana z ogniskiem domowym, 4 z czterema kierunkami świata oraz ze wszystkim tym, co jest zrodzone, 5 wyrażała niestabilność, 9 odnosiła się do świata podziemnego i do nocy, 13 była liczbą światła, 20 wiązała się z obfitością i pełnią, zaś 400 z nieskończonością. Również operacje dodawania (i prawdopodobnie mnożenia) poszczególnych liczb wyrażały określone treści, np. 4+5 oznaczało poczęcie, zaś 8+1 narodziny.

Kodeks Dreźnieński, ok. 1200 n. e.

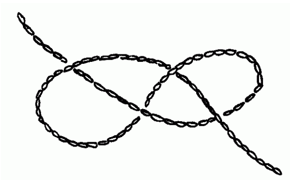
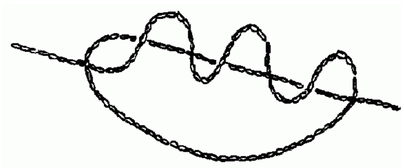
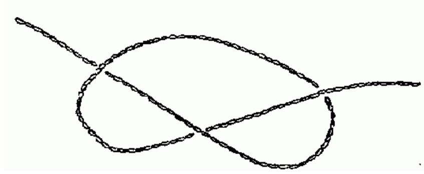


System liczbowy Majów

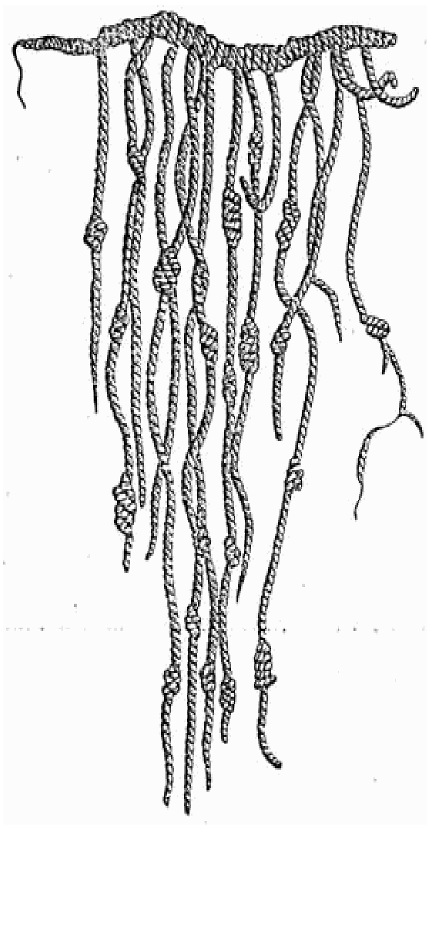
Peru

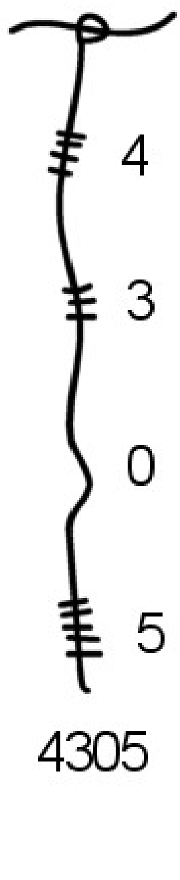
(Kultura Caral ok. 3000 p. n. e. – ok. 1600 p. n. e., kultura Chavín ok. 900 p. n. e. – ok. 200 p. n. e., Nazca ok. 300 p. n. e. – ok. 800 n. e., Mochica ok. 100 p. n. e. – ok. 700 n. e., Inkowie 1197 n. e. – 1572 n. e., miasta od ok. 2600 p. n. e., piramidy ok. 1700 p. n. e.)

Wszystkie kultury Peru, w tym także kultura Inków, są dotąd słabo poznane. Systemem pisma używanym w Peru było pismo węzełkowe kipu (hiszp. *quipu*), w którym informacja przechowywana była w sposobie zawiązania węzełków, kolorze nici, ilości węzłów i ich odległości od siebie. Większość kipu zostało zniszczone przez hiszpańskich konkwistadorów w XVI wieku. Przetrwało tylko około 600 kipu, z których najstarsze datowane są na ok. 650 n. e. Dlatego sensacją w roku 2005 stało się odnalezienie w wykopaliskach Caral kipu datowanego na ok. 3000 lat p. n. e. Do dzisiejszego dnia nie udało się rozszyfrować pełnego zapisu kipu, choć od kilkudziesięciu lat trwają intensywne badania. Najbardziej uznana hipoteza stwierdza, że kipu jest oparte przede wszystkim na dziesiątkowym systemie liczbowym, przy czym kolejne cyfry danej liczby zadane są przez liczbę węzłów na kolejnych pozycjach na danym sznurku, zaś zero określone jest przez brak węzła. Hipotezę tę potwierdza znalezienie sekwencji kipu na których kolejne sznurki są wynikiem dodawania poprzednich. Ciągle nie jest jasne, jakie inne operacje liczbowe poza dodawaniem oraz jakie inne nie-liczbowe treści są zawarte w kipu. Liczba 1 wyrażana jest w kipu przy pomocy węzła pokazanego poniżej na lewo, liczby od 2 do 8 przy pomocy węzła po środku, natomiast liczby dziesiątek, setek, itd. były zaznaczane przy pomocy węzła prawego:

Sznury kipu niejednokrotnie są bardzo skomplikowane. Przykładowe kipu oraz schematyczny zapis liczby wyglądają tak:





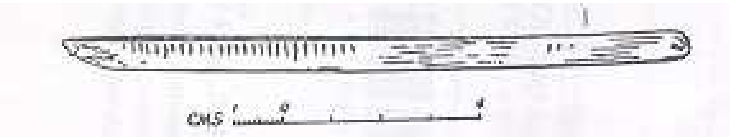
Indie

(Cywilizacja doliny Indusu ok. 2500 p. n. e. – ok. 1700 p. n. e., okres wedyjski ok. 1900 p. n. e. – ok. 400 p. n. e., okres średniowieczny ok. 300 p. n. e. – 1279 n. e., okres muzułmański ok. 1200 n. e. – ok. 1600 n. e.)

Matematyka w Indiach była przede wszystkim narzędziem służącym do obserwacji i przewidywań astronomicznych, choć oczywiście stosowano ją również do praktycznego liczenia i mierzenia. Historię matematyki w Indiach można podzielić na cztery okresy:

I. OKRES STAROŻYTNY
Kultura doliny Indusu i kultura wedyjska (ok. XXIV – ok. III w. p. n. e.)

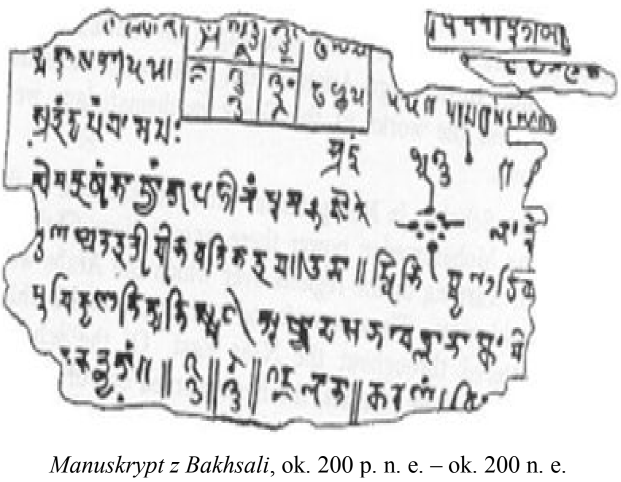
Znaleziska archeologiczne pokazały, że kultura żyjąca w dolinie Indusu dysponowała jednorodnym systemem miar i war. Odkryte odważniki tworzą zbiór wag o charakterze dziesiętnym: są to kolejno 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, i 500 jednostek. Podczas wykopalisk znaleziono także kilka skal do pomiaru długości. Jedną z nich była skala dziesiętna której podstawową jednostką było ok. 3.35 cm. Pomiary odkopanych budowli pokazują że miary te były precyzyjnie stosowane podczas konstrukcji budowli.



Miarka z Lothal, pochodząca z kultury doliny Indusu, ok. 2000 lat p. n. e.

Nie znane są do końca powody upadku kultury doliny Indusu. Mógł być on spowodowany przyczynami wewnętrznymi, naturalnymi lub najazdem ludów Indo-Aryjskich z terytoriów dzisiejszego Iranu. Z pewnością jednak w latach 1500-800 p. n. e. powstaje na tych terenach nowa kultura, której centralnym dziełem są Wedy, teksty o charakterze religijnym, zapisane wedyjskim sanskrytem. Właśnie z nimi związany jest dalszy rozwój matematyki w Indiach. *Sulbasutry*, będące przypisami do Wed, zawierają praktyczne obliczenia matematyczne potrzebne do konstrukcji ołtarzy. Znajdują się w nich między innymi określenia wartości liczby π równe $^{25}/_{8}$ (3.125), $^{900}/_{289}$ (3.11418685...) i $^{1156}/_{361}$ (3.202216...). Natomiast przy okazji obliczeń astronomicznych wartość liczby π podana jest jako $^{339}/_{108}$ (3.1389). W Wedach pojawiają się również wszystkie cztery operacje arytmetyczne (dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie), termin *ganita* oznaczający „naukę o liczeniu”, a także system notacji liczb przy pomocy odpowiedników cyfr od 1 do 9. Indyjski system liczbowy rozwinął się prawdopodobnie pod wpływem chińskich pałeczek do liczenia (układanych w systemie dziesiętnym) oraz pod wpływem pozycyjnego systemu Mezopotamii. W późnej starożytności Indii, tak samo jak w późnym Babilonie, zaczęto zostawiać puste miejsce przy zapisie liczb zawierających zero. W pismach wedyjskich mamy także do czynienia z konkretnymi obliczeniami które dziś zapisalibyśmy w postaci $ax^2 = c$ oraz $ax^2 + bx = c$, co oznacza że być może w kulturze wedyjskiej znano również twierdzenie Pitagorasa. Pod koniec okresu wedyjskiego w matematyce indyjskiej (w pracach astronomicznych zwanych *siddhantami*) pojawiła się po raz pierwszy idea funkcji sinus oraz innych funkcji trygonometrycznych.

Rozwój liczb indyjskich od postaci *Brahmi* ok. 3 w. p. n. e., poprzez liczby *Gupta*, aż do liczb *Nagari* ok. 11 w. n. e.



Manuskrypt z Bakhsali, ok. 200 p. n. e. – ok. 200 n. e.

II. OKRES WCZESNEGO ŚREDNIOWIECZA (ok. 300 p. n. e. – ok. 400 n. e.)
Matematyka dżinistów i okres pre-klasyczny

Okres wczesnego średniowiecza cechował się upadkiem religii braministycznej i rozwojem dżinizmu oraz buddyzmu. Szczególnie ważne miejsce w rozwoju matematyki hinduskiej w tym okresie ma dżinizm. Znajomość *sankhyany*, tzn. nauki o liczbach składającej się z arytmetyki i astronomii, była jedną z podstawowych umiejętności kapłanów dżinizmu, wymaganą z przyczyn religijnych. W dżinizmie ważną religijną rolę odgrywały wielkie liczby. Przykładowo. rozważano okresy czasu *shirsa prahelika* składające się z 756 * 1011 * 8400000028 dni. Określono również liczbę ludzi żyjących kiedykolwiek na świecie jako równą 2^{96}. Wszystkie liczby były poklasyfikowane jako numerowalne, nienumerowalne i nieskończone. W pracach dżinistów rozróżnia się *pięć* różnych rodzajów nieskończoności: nieskończoność w jednym i dwóch kierunkach, nieskończoność powierzchni, nieskończoność wszędzie i nieskończoność cykliczna, co wiąże się bezpośrednio z dżinistycznymi koncepcjami religijnymi i kosmologicznymi (teoria karmy, koło samsāry, koncepcja nirwany). Dżiniści rozwinęli również działania na ułamkach, oraz jako prawdopodobnie pierwsi na świecie odkryli równania czwartego stopnia. Ich prace nie są jednak jedynymi śladami matematyki tej epoki. Szczególnym znaleziskiem matematycznym z okresu wczesnego indyjskiego średniowiecza jest tzw. *manuskrypt z Bakhshali*, datowany na okres ok. 200 p. n. e. – ok. 200 n. e. Znajdują się w nim między innymi obliczenia równań liniowych z pięcioma niewiadomymi, metody przybliżonego obliczania pierwiastków kwadratowych z dowolnych liczb dodatnich oraz liczby ujemne. W manuskrypcie z Bakhshali pojawia się po raz pierwszy zero, zapisywane jako kropka (w późniejszych tekstach zero jest już oznaczane jako owal). Z pewnością w Indiach w 1 wieku n. e. system zapisu przy pomocy liczb od 1 do 9, będący bezpośrednim protoplastą obecnego zapisu liczbowego, był już dobrze rozwinięty.

III. OKRES KLASYCZNY (ŚRODKOWE ŚREDNIOWIECZE) ok. 400 n. e. – ok. 1200 n. e.

Matematycy okresu klasycznego byli przede wszystkim astronomami. Ich prace i poruszane w nich problemy w większości wypadków pozostawały w związku z astronomią. Pierwszym wielkim matematykiem tego okresu był Aryabhata (476-550), który w poetyckim astronomicznym traktacie *Aryabhatiya* dokonał podsumowania całej wiedzy dżinistycznej matematyki. Co ważne, w pracy tej, tak jak w większości *całej* indyjskiej matematyki wszystkich epok (z wyłączeniem kilku wyjątków) nie występują dowody, ani nawet sama idea dowodu matematycznego. Tematy poruszane w tym dziele to przede wszystkim arytmetyka, trygonometria (między innymi tabela wartości funkcji sinus), oraz zagadnienia związane z pierwiastkowaniem i równaniami kwadratowymi. Podał on także rozwiązanie równania $ax - by = c$ oraz wartość $\pi = 3.1416$, przy czym zaznacza on, że wartość ta jest tylko przybliżeniem. Co ciekawe, Aryabhata zaproponował również, że dzienny obrót niebios wynika z obrotu Ziemi wokół swej osi, za co oczywiście został silnie skrytykowany. Bezdyskusyjnie jednak *Aryabhatiya* stała się punktem doniesienia wielu hinduskich prac matematycznych przez następne tysiąc lat. Drugim wielkim indyjskim matematykiem by Brahmagupta (598-670), autor dzieł *Brahmasphutasiddhanta* oraz *Khandakhayaka,* które miały wielki wpływ na późniejszą matematykę zarówno Indii, jak i Arabii, a w pewnym stopniu również Chin. Brahmagupta posiadł zrozumienie systemu liczbowego (łącznie z działaniem na ułamkach oraz na liczbach ujemnych, które oznaczał przy pomocy kropki stawianej nad liczbą) większe niż ktokolwiek przed nim, wprowadził nowe techniki mnożenia i operacje z użyciem zera. Był on prawdopodobnie pierwszym który próbował dzielić przez zero, próbując dowieść że $n/0 = \infty$. Podał też nowe metody liczenia pierwiastków kwadratowych i rozwiązywania równań kwadratowych, w tym równania $Nx^2 + 1 = y^2$, a także wzór na pole czworokąta wpisanego w okrąg. Późniejsze wieki cechował bujny rozwój matematyki w kierunkach zgodnych z tematyką dzieł Aryabhaty i Brahmagupty. Około roku 850 Mahavira napisał tekst *Ganitasar Sangraha*, który jest piewszym dziełem opisującym arytmetykę w formie zbliżonej do tej, jakiej używamy dzisiaj. Był on również jedynym matematykiem indyjskim, który wspomina o elipsie (tematyka krzywych stożkowych, intensywnie badana w Grecji i Europie, w Indiach praktycznie nie była poruszana). Za największego hinduskiego matematyka jest uznawany Bhāskara Aćarja (zwany również Bhāskarą II), żyjący w latach 1114-1185. Około roku 1150 napisał on poetyckie dzieło *Siddhantaśiromani*, będące kompendium wiedzy matematycznej, astronomicznej i astrologicznej. Składało się ono z kilku części. Część tego dzieła poświęcona w dużym stopniu arytmetyce nazywała się *Lilawati,* zaś część poświęcona algebrze – *Bidźaganita*. W *Lilawati* korzysta się z *definiowania* pojęć matematycznych, opisane są własności zera (łącznie z dzieleniem), systematyczne reguły arytmetyczne, oraz ciągi arytmetyczne i geometryczne, a także oszacowanie liczby $\pi \approx 3{,}141666$. Oprócz wielu innych osiągnięć matematycznych, Bhāskara Aćarja rozwiązał równanie $61x^2 = y^2 + 1$, otrzymując spektakularny wynik x = 226 153 980, y = 1 766 319 049.

IV. OKRES ISLAMSKI (PÓŹNE ŚREDNIOWIECZE) (ok. 1200 n. e. – 1596 n. e.)

Ostatnią wybitną postacią hinduskiej matematyki był Madhawa, żyjący w latach 1340-1425. Wymyślił on rozwinięcie funkcji w nieskończony szereg (odkryte ponownie w Europie w XVIII wieku i zwane dzisiaj szegiem Taylora) oraz podał rozwinięcie liczby π w nieskończony szereg $\pi = 4 * (1 - {}^{1}/_{3} + {}^{1}/_{5} - ...)$, co prowadzi do wartości π = 3.14159265359, poprawnej aż do 13 miejsca po przecinku (w późniejszym okresie założona przez niego szkoła matematyków z Kerali poprawiła ten wynik do 17 miejsca po przecinku). Oto niektóre spośród podanych przez Madhawę wzorów (zapisane we współczesnej symbolice):

$$\sin\varphi=\varphi-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}-\ldots \qquad \cos\varphi=1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\ldots \qquad \varphi=tg(\varphi)-\frac{(tg^3\varphi)}{3}+\frac{(tg^5\varphi)}{5}-\ldots$$

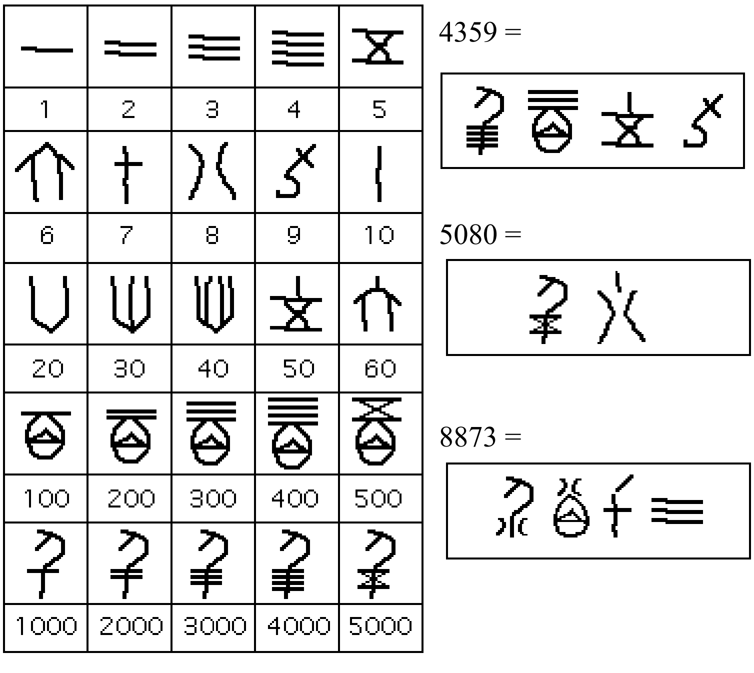
Finalnym sukcesem szkoły z Kerali było dzieło *Yuktibhasa* Jyestadevy (1500-1575), w którym pojawia się indyjska wersja rachunku różniczkowo-całkowego, ponad sto lat przed Newtonem i Leibnizem.

Chiny

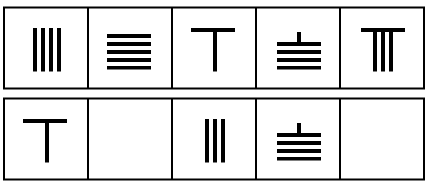
(Kultura Erlitou (dynastia Xia?) ok. 2000 p. n. e. – ok. 1500 p. n. e., dynastia Shang ok. 1800 p. n. e. – ok. 1200 p. n. e., dynastia Zhou ok. 1200 p. n. e. – 256 p. n. e., Cesarstwo Chińskie 256 p. n. e. – 1911 n. e.)

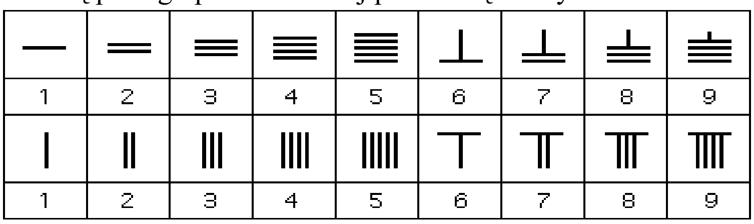
Początki historii chińskiej matematyki sięgają okresu okresu ok. 1400 lat p. n. e. Odkryto dużą liczbę pochodzących z tego okresu żółwiowych skorup oraz kości osłów pokrytych pismem, tzw. *Jiaguwen*, służącym do zapisywania przepowiedni i rytuałów. Pismo to zawiera dobrze rozwinięty system liczbowy, zbliżony do dziesiętnego. Ponieważ jednak nie jest obecne w nim cyfra zero (lub rodzaj pustego miejsca), nie jest to prawdziwy system dziesiętny. Zapis ten jest następujący:

Jaguwen na skorupie żółwia, ok. 1400 p. n. e.



Około IV wieku p. n. e. do powszechnego użycia w Chinach weszły pałeczki do liczenia, oparte na zbliżonym do dziesiętnego zapisie (według oznaczeń zawartych w poniższej tabelce, przy czym znaki z dolnego wiersza występowały na pozycjach parzystych, zaś znaki z górnego – na nieparzystych). Wtedy również pojawia się idea cyfry zero, pod postacią pustego pola[10]. Poniżej podane są liczby 45698 oraz 60390 zapisane przy pomocy tego systemu.

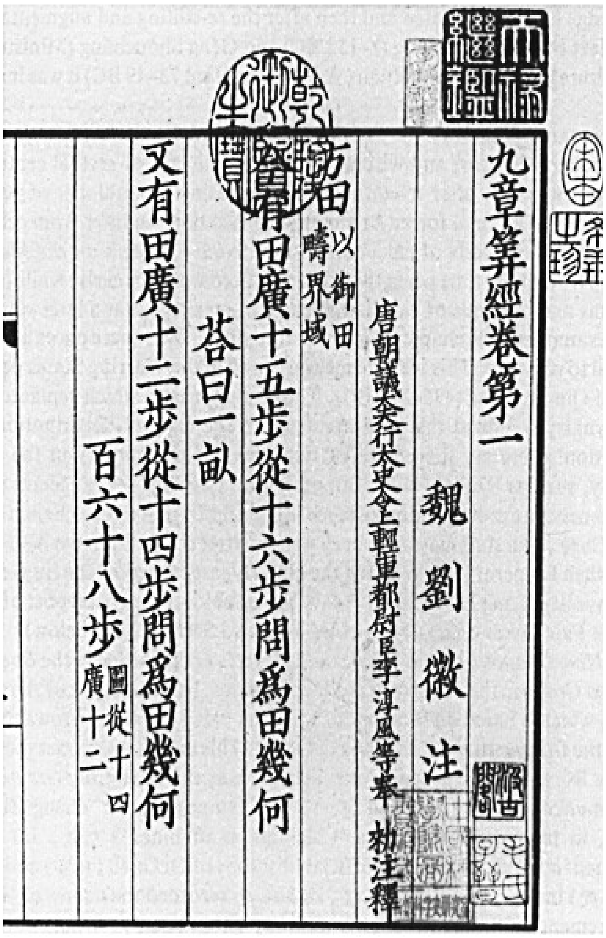




10 Co ciekawe, w mniej więcej tym samym czasie cyfra zero pojawia się również w Mezopotamii, pod postacią dwóch kresek w zapisie sześćdziesiątkowym, oraz w Indiach pod postacią pustego pola w zapisie dziesiątkowym.

Pałeczki chińskie bardzo długo służyły jako narzędzie rachunkowe, choć w późniejszym okresie były wypierane przez (wynalezione przez Chińczyków) liczydła. Chińczycy opracowali także następujący zapis liczb przy pomocy znaków pisma: 1 = 一, 2 = 二, 3 = 三, 4 = 四, 5 = 五, 6 = 六, 7 = 七, 8 = 八, 9 = 九, 10 = 十, 100 = 一百, 1000 = 一千, 10^4 = 一萬, 10^5 = 一十萬, 10^6= 一百萬, 10^7 = 一千萬, 10^8 = 一億,, 10^{10} = 一百億, 10^{11} = 一千億, 10^{12} = 一兆, 10^{16} = 一京 (jest to zapis w klasycznym piśmie chińskim).

W Chinach nieobecne było aksjomatyczne i abstrakcyjne rozwijanie matematyki, takie jak w Grecji lub Europie nowożytnej. Chińskie podejście do matematyki było bardzo zwięzłe i praktyczne, związane przede wszystkim z kwestiami kalendarza, handlu, pomiaru ziemi, własności, architektury, podatków oraz astronomii (chińskie słowo *chouren* oznacza zarówno matematyka jak i astronoma). Ciekawostką jest, że już około 400 lat p. n. e. uczono się w Chinach na pamięć tabliczki mnożenia 9 x 9. Ważną rolę w chińskiej matematyce odgrywały również rozmaite zagadki i łamigłówki, a także kwadraty magiczne[11]. Około III w. p. n. e. zostaje postawiony szczególny przypadek słynnego *chińskiego problemu reszty*: „Mamy pewną liczbę rzeczy, ale nie wiemy ile dokładnie. Jeśli policzymy je po trzy, pozostaną dwie. Jeśli policzymy je po pięć, pozostaną trzy. Jeśli policzymy je po siedem, pozostaną dwie. Ile rzeczy mamy?".


九章筭經卷第一
魏 劉 徽 注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉勅注釋
方田 以御田疇界域
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
百六十八步 圖從十四 廣十二

Strona z odpisu dzieła *Jiŭ zhāng suàn shù*

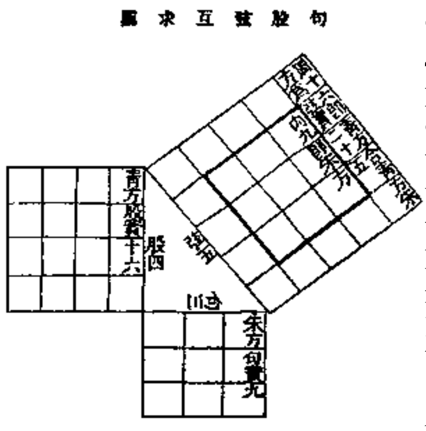
Wielką lukę w naszej wiedzy o starożytnych Chinach, a więc także o chińskiej matematyce tego czasu, spowodowało spalenie wszystkich książek w Chinach z rozkazu cesarza Shin Huang Ti w 213 r. p. n. e. Wskutek tego najstarszym posiadanym przez nas chińskim tekstem matematycznym jest, znaleziona niedaleko Jiangling, zapisana na paskach z bambusa *Suàn shù shū* („Książka o liczeniu") z około 180 r. p. n. e., zawierająca między innymi przybliżone metody obliczania ułamków, pierwiastków kwadratowych, oraz pól prostych figur. W *Suàn shù shū* korzysta się z założenia $\pi = 3$. Najstarszy kompletny tekst, *Zhoubi suanjing,* pochodzi z okresu między 100 r. p. n. e. a 100 r. n. e. Zawiera on tzw. zasadę *Gougu*, czyli twierdzenie Pitagorasa, oraz obliczenia z ułamkami o wspólnych mianownikach.

Najsłynniejszą chińską matematyczną książką wszechczasów jest *Jiŭ zhāng suàn shù*, czyli „Dziewięć rozdziałów sztuki matematycznej", będące kompendium ówczesnej wiedzy matematycznej, powstałe pomiędzy 200 r. p. n. e. a 100 r. p. n. e., lecz obecnie istniejące tylko w późniejszych odpisach. Z pewnością *Jiŭ zhāng suàn shù* zawiera wiedzę wcześniejszą, lecz obecnie nie potrafimy ocenić o ile jest ona wcześniejsza. *Jiŭ zhāng suàn shù* zdominowało chińską matematykę aż do okresu kontaktu z zachodnią matematyką około 1600 r. n. e. Tekst ten zawiera 9 rozdziałów zawierających 246 zadań z odpowiedziami, lecz bez podanego sposobu rozwiązywania. Poruszone są w nim takie zagadnienia jak proporcje, ułamki, liczby ujemne, dokładne i przybliżone obliczanie objętości i powierzchni różnych figur (m. in. prostokąta, trójkąta, trapezu, koła, fragmentów koła i kuli przy założeniu $\pi = 3$), metody rozwiązywania równań kwadratowych oraz układów wielu równań liniowych[12], a także pierwiastki drugiego i trzeciego stopnia (w Europie pierwiastki trzeciego stopnia pojawiły się dopiero w XVI wieku, czyli około 1600 lat później).

11 Kwadrat magiczny to tablica o takiej samej liczbie wierszy i kolumn, w której każda komórka zawiera taką liczbę całkowitą, że suma wartości liczb w każdym wierszu, każdej kolumnie i na obu przekątnych jest taka sama.

12 Jeden z układów równań liniowych z *Dziewięciu rozdziałów matematycznej sztuki* dziś zapisalibyśmy jako:

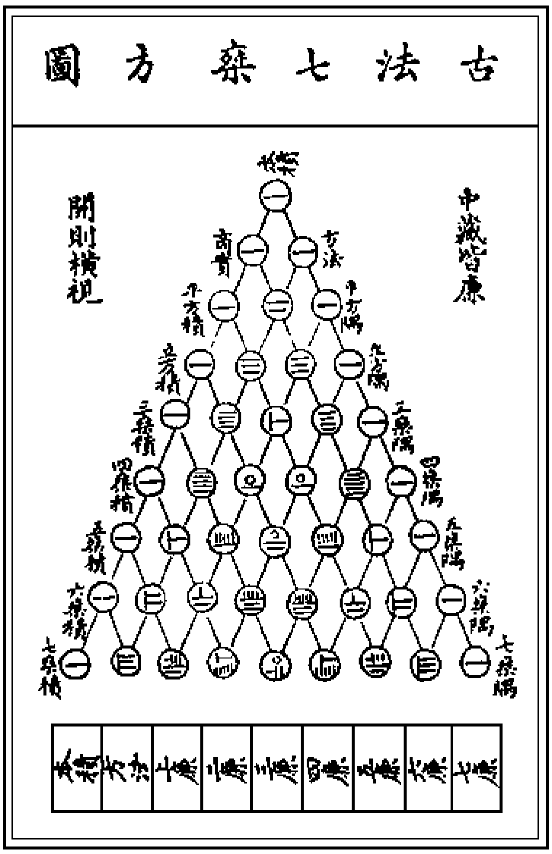
$$3x + 2y + z = 39,$$
$$2x + 3y + z = 34,$$
$$x + 2y + 3z = 26.$$



Zasada *Gougu*, czyli tw. Pitagorasa

Około roku 263 n. e. Lin Hui napisał słynny komentarz do *Jiŭ zhāng suàn shù* w którym podaje wartość $\pi = 3.141014$. Żyjący dwa wieki później Zu Chongzi, prowadzący dokładne obserwacje astronomiczne w celu wprowadzenia nowego kalendarza, poprawił te obliczenia podając wartość $3.1415926 < \pi < 3.1415927$, jednocześnie rekomendując używanie liczb $^{355}/_{113}$ lub $^{22}/_{7}$ w rachunkach o mniejszej dokładności. W V wieku n. e. Xiahou Yang wprowadza zapis liczb w systemie dziesiętnym korzystając z dodatnich i ujemnych potęg dziesiątki, zaś młodszy od niego o 30 lat Zhang Quijian podaje przykłady sumowania ciągu liczbowego. Od połowy wieku VI n. e. w Chinach, wskutek działalności buddyjskich misjonarzy oraz ożywienia wymiany handlowej, pojawiają się tłumaczenia tekstów indyjskich, m.in. prac Brahmagupty, a także podział kąta na 360 stopni oraz tablica wartości sinusa kątów od 0 do 90 stopni. Wydaje się jednak, że matematyka indyjska nie wywarła dużego wpływu na kierunki rozwoju, tematykę i sposoby uprawiania matematyki przez Chińczyków. Okres 700-1300 n. e. jest okresem względnej stagnacji w chińskiej matematyce, co jest o tyle dziwne, że był to okres dynastii Tang i Song, w trakcie którego nastąpił bujny rozkwit chińskiej kultury. Jednym z nielicznych ważnych wydarzeń matematycznych w tym czasie było wprowadzenie w XI w. przez Jia Xiana trójkąta Pascala (pięćset lat przed Pascalem) oraz powiązane z nim metody liczenia pierwiastków dowolnego stopnia przy pomocy liczydła.

XIII wiek (czyli okres podboju Chin przez Czyngis-chana!) jest szczytowym okresem rozwoju chińskiej matematyki. W tym wieku mamy do czynienia z co najmniej ośmioma ważnymi autorami oraz z przeszło piętnastoma ważnymi tekstami matematycznymi. Prawdopodobnie najsłynniejszą postacią z tego okresu jest Qin Jiushao (1202-1261), autor książki *Shushu jiuzhang*, czyli „Traktatu matematycznego w dziewięciu częściach", w którym zajmuje się on kalendarzem, chińskim problem reszty, obliczaniem pól figur, badaniem trójkątów prostokątnych i dużą liczbą matematycznych, niejednokrotnie wysoce skomplikowanych, problemów życia praktycznego. Np. problem „pomiaru okrągłego fortu z odległości" wymaga rozwiązania równania dziesiątego stopnia $x^{10} + 16x^8 + 72x^6 - 864x^4 - 11664x^2 - 34992 = 0$, zaś problem „naprawa fortu i ustawianie podatków" ma podane 180 możliwych rozwiązań. W jeszcze innym problemie rozwiązuje on równanie $-x^4 + 763220x^2 - 40642560000 = 0$. Qin służył władzy cesarskiej, ale ponieważ zachowywał się ekstrawagancko, chełpliwie i obsesyjnie na punkcie własnych osiągnięć, a prócz tego brał łapówki i oszukiwał, to kilkukrotnie został zwolniony z urzędu. Jednakże za każdym razem udawało się mu znów nieźle ustawić. Zgodnie z legendą, miał on nietypowy dom zbudowany na wspaniale umiejscowionym kawałku ziemi, który zdobył dzięki oszustwom. Na tyłach tego domu znajdował się szereg pokoi w których mieszkały piękne muzykantki i śpiewaczki. Wedle tej samej legendy miał on również niesamowite powodzenie i sukcesy jako kochanek.[13] W tym samym wieku tworzą także Li Chi, który bada wpisywanie i opisywanie okręgu na trójkącie, Guo Shoujing, badający interpolację wyższych rzędów (przybliżone wartości funkcji w przedziale pomiędzy podanymi wartościami), Yang Hui, który opisuje mnożenie, dzielenie, pierwiastkowanie, równania kwadratowe, ciągi, obliczenia powierzchni różnych figur, a także bada magiczne kwadraty aż do rozmiarów 10 x 10, oraz Zhu Shijiei, który używa cyfry zero. Wraz z początkiem wieku XIV chińska matematyka wchodzi jednak w okres stopniowego upadku, aż do okolic roku 1600, kiedy zaczyna się intensywnie zmieniać pod silnymi wpływami matematyki zachodniej.



Chiński trójkąt Pascala

13 Z porównania z biografiami współczesnych uczonych, takich jak Stefan Banach, Erwin Schroedinger, Richard Feynman, czy Lew Landau, wynika duże prawdopodobieństwo, że legenda ta jest prawdziwa!

Grecja

(Okres starożytny od ok. 1000 p. n. e. do 323 p. n. e., okres hellenistyczny 323 p. n. e. – 146 p. n. e., okres rzymski 146 p. n. e. – 330 n. e., pismo greckie od ok. 800 p. n. e.)

Liczba w Starożytności jako wielkość

Gdy w kręgu pitagorejczyków zaświtała około 540 roku myśl, iż liczba jest istotą wszechrzeczy, nie oznaczało to „kroku naprzód w rozwoju matematyki", lecz narodziny z głębi starożytnej duchowości całkiem nowej matematyki jako samowiednej teorii, przezierającej już od dawna spoza metafizycznych dociekań i artystycznych tendencji formalnych. Była to nowa matematyka, tak jak zrodzona niegdyś w wielkiej godzinie dziejowej, a wtedy od dawna wygasła matematyka (nigdy nie spisana) kultury egipskiej oraz algebraiczno-astronomiczna matematyka (z jej ekliptycznymi układami współrzędnych) kultury babilońskiej.

Owa sentencja, podług której liczba stanowi istotę wszystkich zmysłowo uchwytnych rzeczy, pozostała najcenniejszą tezą matematyki starożytnej. Wraz z nią zdefiniowano *liczbę jako miarę*. Mierzenie w tym sensie oznacza mierzenie czegoś bliskiego i cielesnego. Przywołajmy na myśl kwintesencję antycznego dzieła sztuki: wolno stojący posąg nagiego człowieka. Pitagorejskie pojęcie harmonii liczb, choć wywiedzione prawdopodobnie z muzyki, która nie znała polifonii i harmonii, i przez odpowiednie formowanie swych instrumentów dążyła do ideału odrębnych, miękko zaokrąglonych, prawie cielesnych tonów, wydaje się służyć tej rzeźbie za matrycę. Obrabiany kamień jest tylko o tyle „czymś", o ile posiada wyważone granice i odmierzoną formę — jako to, czym się stał pod dłutem artysty. W oderwaniu od tego jest chaosem, czymś jeszcze nie urzeczywistnionym, a więc tymczasem niczym. To uczucie, już w szerszych kategoriach znaczeniowych, stwarza jako przeciwieństwo do stanu chaosu wyobrażenie kosmosu, będącego dla duszy antycznej wyklarowaną sytuacją w świecie zewnętrznym, harmonijnym porządkiem wszystkich ściśle odgraniczonych i namacalnie obecnych rzeczy jednostkowo-konkretnych. Suma tych rzeczy jest już całym światem; odstęp między nimi, nasza przepojona całym patosem wielkiego symbolu przestrzeń kosmiczna, jest niebytem, τό μή όν. Patrząc wstecz z tego punktu widzenia, odszyfrujemy być może najgłębsze pojęcie antycznej metafizyki, άπειρον Anaksymandra, termin nieprzetłumaczalny na żaden język zachodni — άπειρον jest tym, co nie posiada żadnej „liczby" w sensie pitagorejskim, żadnej mierzalnej wielkości i granicy, a zatem żadnego bytu określonego; jest to bezmiar, bezkształt, posąg jeszcze nie wykuty z kamiennego bloku. Jest to άρχή, optyczna bezgraniczność i bezforemność, która dopiero dzięki granicom, dzięki zmysłowej indywiduacji staje się „czymś" — światem. Zasada owa jest tym, co tkwi u podstaw starożytnego poznania jako forma *a priori,* cielesność sama w sobie; w kantowskim obrazie świata pojawia się odpowiednio zamiast niej przestrzeń, z której Kant mógł jakoby sobie „odmyślić wszystkie rzeczy". Cała antyczna matematyka jest w ostatniej instancji stereometrią. Dla Euklidesa, który ostatecznie ją usystematyzował w III wieku p. n. e., trójkąt jest z najgłębszą koniecznością powierzchnią graniczną jakiegoś ciała, nigdy zaś systemem trzech przecinających się linii prostych lub zgrupowaniem trzech punktów w trójwymiarowej przestrzeni. Określa on linię jako „długość bez szerokości" (μηκος άπλατές). W naszych ustach definicja ta brzmiałaby żałośnie, w matematyce starożytnej zaś jest znakomita.

Liczby należą wyłącznie do sfery rozciągłości. Ale istnieje tyle możliwości, a więc i konieczności uporządkowanej prezentacji tego, co rozciągłe, ile mamy kultur. Liczba antyczna nie jest myślowym wyobrażeniem przestrzennych relacji, lecz uchwytnych dla cielesnego oka odgraniczonych jednostek. Starożytność zna przeto — w sposób konieczny — tylko liczby „naturalne" (dodatnie, całkowite), które wśród wielu nader abstrakcyjnych rodzajów liczb matematyki zachodniej, systemów liczb zespolonych, hiperzespolonych, niearchimedesowych *etc.,* odgrywają całkiem nieznaczną rolę.

Dlatego właśnie wyobrażenie liczb niewymiernych, a więc w naszym zapisie nieskończonych ułamków dziesiętnych, pozostało nieosiągalne dla greckiego umysłu. Euklides mówi — i należałoby go lepiej rozumieć — że niewspółmierne odcinki „mają się do siebie nie tak, jak liczby". W zrealizowanym pojęciu liczby niewymiernej kryje się w istocie całkowite oddzielenie pojęcia liczby od pojęcia wielkości, i to dlatego, że liczby takiej, na przykład *n,* nigdy nie można odgraniczyć ani ściśle przedstawić przez jakiś odcinek. Wynika stąd jednak, iż w wyobrażeniu choćby stosunku boku kwadratu do przekątnej liczba antyczna — będąca na wskroś zmysłową granicą, zamkniętą wielkością — natyka się nagle na całkiem inny rodzaj liczby, który pozostaje z gruntu obcy i niepokojący dla antycznego poczucia świata, jakby się było przez to bliskim odkrycia jakiejś niebezpiecznej tajemnicy własnego istnienia[1]. Jest to głęboki metafizyczny lęk przed erozją tego, co zmysłowo uchwytne i obecne, czym byt antyczny otoczył się niby szańcem — kto pojmuje to uczucie, ten pojął także ostateczny sens liczby w Starożytności, miary w przeciwieństwie do tego, co niezmierzone, jak również wzniosły religijny etos jej ograniczeń.

Duchowość starożytna odczuwała zasadę niewymierności, burzącą posągowy szereg liczb całkowitych [naturalnych], reprezentantów doskonałego w sobie porządku świata, jako występek przeciw samej Boskości. Uczucie to jest widoczne u Platona, w dialogu *Timajos*. Wraz z przemianą nieciągłego szeregu liczbowego [charakterystycznego dla Starożytnej Grecji] w [zachodnioeuropejską nowoczesną ideę] kontinuum zakwestionowaniu ulega nie tylko antyczne pojęcie liczby, lecz i samo pojęcie antycznego świata. Rozumie się teraz, iż w starożytnej matematyce nie są nawet możliwe liczby ujemne, wyobrażalne dla nas bez żadnego trudu, a tym bardziej zero jako liczba — spekulatywny twór godnej podziwu energii abstrahowania, który dla duszy indyjskiej (ona właśnie wykoncypowała go jako podstawę pozycyjnych układów numeracyjnych) stanowi wręcz klucz do sensu bytu. Wszystko zrodzone z rozbudzonej w antyku świadomości zostało więc podniesione do rangi czegoś rzeczywistego wyłącznie dzięki rzeźbiarskiemu poczuciu ograniczoności. To, czego nie sposób nakreślić, nie jest „liczbą”. Platon, Archytas i Eudoksos mówią o liczbach powierzchniowych (kwadratowych) i cielesnych (stereometrycznych), mając przy tym na myśli nasze podnoszenie do drugiej i trzeciej potęgi; rozumie się samo przez się, że nie istniało dla nich pojęcie wyższych potęg o wykładnikach całkowitych. Potęga czwartego stopnia byłaby w świetle fundamentalnego poczucia rzeźbiarskiego, które podstawia od razu pod to wyrażenie czterowymiarową, i to materialną rozciągłość, niedorzecznością. Wyrażenie w rodzaju e^{-ix}, które ciągle pojawia się w naszych formułach, czy nawet użyte już w XIV wieku przez Mikołaja Oresme oznaczenie $5^{1/2}$, wydawałyby się im zupełnie absurdalne. Euklides określa mnożniki jakiegoś iloczynu mianem boków (πλευραί). Rachuje się ułamkami — oczywiście skończonymi — analizując wyrażany liczbami całkowitymi stosunek dwóch odcinków. Właśnie dlatego nie mogło w ogóle powstać wyobrażenie liczby zero jako rysunkowo bezsensowne. Nie twierdźmy na mocy przyzwyczajeń naszego inaczej ukonstytuowanego myślenia, że jest to właśnie „pierwotny szczebel” rozwoju „matematyki”. Matematyka starożytna jest w obrębie świata, jaki stworzył wokół siebie człowiek tej epoki, czymś doskonałym. Nie jest wszakże taka dla nas.

O. Spengler, 1917, *Zmierzch zachodu*, Monachium
(przeł. J. Marzęcki, Warszawa 2001)
fragmenty rozdziału *O znaczeniu liczb*

Najstarsze znane oryginały greckich tekstów matematycznych pochodzą z okresu rzymskiego, posiadamy jednak bardzo dużo kopii i odpisów wcześniejszych tekstów o dobrze zgadzającej się chronologii. Grecka matematyka powstała pod silnymi wpływami matematyki egipskiej i babilońskiej, jednak praktycznie od razu nabrała swojego wyjątkowego kształtu. Charakterystyczne cechy matematyki greckiej to rozumienie liczby jako wielkości geometrycznej, oraz idea formalnego dowodu w oparciu o zasady logiki (rozumianej jako czyste, abstrakcyjne myślenie). Grecy intensywnie rozwijali geometrię figur płaskich oraz, w późniejszym okresie, stereometrię. Trzema wielkimi zagadnieniami matematyki starożytnej Grecji były bez wątpienia konstrukcje trysekcji kąta (podziału kąta na trzy równe części), kwadratury koła (czyli kwadratu o polu równym polu zadanego koła), oraz podwojenia sześcianu. Tylko ostatni z tych problemów został rozwiązany w starożytności[14]. Jednym z głównych dzieł greckiej matematyki jest geometria krzywych stożkowych (okrąg, elipsa, parabola, hiperbola), rozwinięta zwłaszcza w okresie hellenistycznym. Grecy stworzyli również oryginalną metodę wyczerpywania, dzięki której mogli obliczać pola bardziej skomplikowanych figur geometrycznych. Ich system liczbowy był oparty na oznaczaniu liczb przy pomocy liter alfabetu:

$$\alpha = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = 3,\ \delta = 4,\ \epsilon = 5,\ a = 6,\ \zeta = 7,\ \eta = 8,\ \theta = 9,$$

$$\iota = 10,\ \kappa = 20,\ \lambda = 30,\ \mu = 40,\ \nu = 50,\ \xi = 60, o = 70, \pi = 80,\ b = 90,$$

$$\rho = 100,\ \sigma = 200,\ \tau = 300,\ \upsilon = 400,\ \phi = 500,\ \chi = 600,\ \psi = 700,\ \omega = 800,\ c = 900.$$

Liczby od napisów odróżniano przez pisanie nad liczbami poziomej kreski, natomiast cyfrę tysięcy pisano

14 Zrobił to Diokles (240-180 p. n. e.), lecz nie przy pomocy cyrkla i linijki, lecz bardziej skomplikowanej metody.

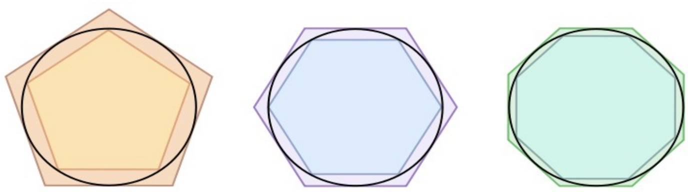
dużą literą, lub poprzedzano kreską u dołu. Przykładowo, liczba 1234 mogła zostać zapisana na dwa sposoby:

$$\overline{A\sigma\lambda\delta} \qquad \overline{{}_{\prime}\alpha\sigma\lambda\delta}$$

Liczby większe od 9999 zapisywano pisząc pod nimi μ (od słowa *myriad*, czyli 10 000). Ten system umożliwiał zapisanie liczby nie większej niż sto milionów[15].

Właściwa historia matematyki greckiej rozpoczyna się wraz z Talesem i Pitagorasem, którzy twórczo zaadaptowali i przekształcili wiedzę egipskiej i babilońskiej matematyki. Tales (ok. 624 – ok. 546) pochodził z Miletu, będącego w tym czasie ważnym ośrodkiem handlowym. Prawdopodobnie podróżował on w związku ze sprawami handlowymi do Egiptu, gdzie zapoznał się z geometrią egipską, oraz na Bliski Wschód, gdzie zapoznał się z astronomią babilońską (w tym czasie przeżywała ona okres ponownego rozkwitu). Talesowi przypisywane jest sformułowanie pięciu twierdzeń Euklidesa[16], oraz stosowanie ich do rozwiązywania praktycznych problemów, takich jak obliczanie wysokości piramid oraz odległości statków od brzegu. Tales nie formułował dowodów swoich twierdzeń, lecz pokazywał, że w wielu przypadkach dane twierdzenie jest prawdziwe. Zapoczątkowało to rozwój greckiej nauki, zarówno przyrodniczej, jak i matematycznej, początkowo w ramach tzw. szkoły milezyjskiej, do której należeli między innymi Anaksymander i Anaksymenes. Połączenie ogólnej wiedzy z praktycznym myśleniem było prawdopodobnie cechą charakterystyczną Talesa. Jak opisuje Diogenes Laertios, Tales przewidział obfite zbiory oliwek i w związku z tym wydzierżawił wszystkie tłocznie oliwy znajdujące się w okolicach Miletu, dzięki czemu mógł określać ceny w czasie urodzaju, dużo zarabiając na swoim monopolu. Najsławniejsze dokonanie Talesa jest jednak związane z astronomią – otóż przewidział on poprawnie pełne zaćmienie Słońca w 585 r. p. n. e. Niestety nie wiemy w jaki sposób udało mu się to zrobić, świadczy to jednak z pewnością o jego głębokiej wiedzy matematycznej i astronomicznej.

Pitagoras (ok. 582 – ok. 507) również zdobył swoją wiedzę dzięki podróżom. Podróżował on między innymi do Egiptu, ucząc się matematyki, geometrii i astronomii od egipskich kapłanów. Po powrocie do Grecji założył on hermetyczną sektę pitagorejczyków, zajmującą się w takim samym stopniu liczbami co mistyką. Pitagorejczycy, który za swój symbol przyjęli pentagram, prowadzili życie w dość rygorystycznej wspólnocie. Wierzyli oni że wszystko w świecie pozostaje w bezpośrednim związku z matematyką, gdyż liczby są faktyczną istotą świata. Byli przekonani, że matematyczny opis przy pomocy cykli, harmonii i proporcji umożliwia pełne wyrażenie świata. To właśnie od Pitagorasa wywodzi się tak charakterystyczne dla starożytnej kultury greckiej, rozumienie liczby jako proporcji pomiędzy obiektami geometrycznymi. Jemu także przypisywane jest pitagorejskie zdanie: *liczba jest istotą wszystkich rzeczy*. W odróżnieniu od Talesa, którego dzieł nie posiadamy raczej dlatego, że nie przetrwały, niż dlatego, że nic po sobie nie pozostawił, Pitagoras po prostu nic nie napisał. Cała wiedza pitagorejczyków była przekazywana drogą ustną, a jej upowszechnienie nastąpiło dopiero wraz z rozpadem ich wspólnoty około 450 r. p. n. e. Trudno również określić, ile wiedzy pitagorejskiej było dziełem samego Pitagorasa, a ile było dziełem jego uczniów, gdyż pitagorejczycy wszystkie swoje odkrycia przypisywali mistrzowi. Oprócz autorstwa twierdzenia Pitagorasa $a^2 + b^2 = c^2$, przypisywano mu również rozpoznanie, że gwiazda wieczorna i gwiazda poranna jest tą samą planetą (Wenus). Co ciekawe, pitagorejczycy odkryli liczby niewymierne, lecz ze względu na swój światopogląd nie traktowali ich jako liczby. Według legendy zaszła następująca historia: Pewnego razu kilkoro pitagorejczyków wyprawiło się w podróż morską. W trakcie podróży jeden z nich odkrył, że wynik jego obliczeń nie jest liczbą wymierną. Pozostali pitagorejczycy uświadomili sobie wagę tego odkrycia i – nie chcąc dopuścić, aby inni ludzie dowiedzieli się o tym przerażającym fakcie – zamordowali feralnego odkrywcę, wrzucając go do morza. Jeśli nawet legenda ta nie jest prawdziwa, to świadczy o wadze, jaką do liczb przypisywali pitagorejczycy!



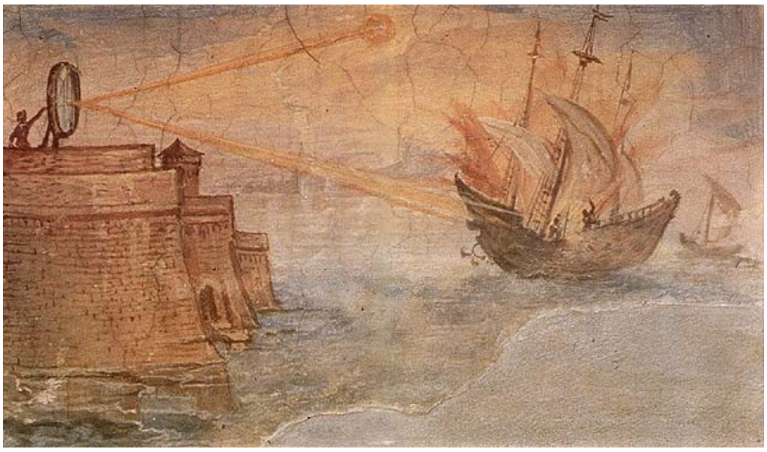
Obliczanie pola okręgu metodą wyczerpywania

15 Por. Księga Daniela 7,10 i Apokalipsa św. Jana 5,11.

16 Są to następujące twierdzenia: 1. Średnica dzieli okrąg na połowy; 2. Dwa kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego są równe; 3. Jeśli dwie linie przecinają się, to dwa kąty przeciwległe są równe; 4. Kąt wpisany na półokręgu jest kątem prostym; 5. Trójkąt jest określony, jeżeli dana jest jego podstawa i kąty przy podstawie.

W V w. p. n. e. grecka matematyka zaczęła się bujnie rozwijać, stając się jednym z podstawowych zajęć greckich elit intelektualnych. Świadczy o tym fakt, że Platon zakładając Akademię ok. 387 r. p. n. e. umieścił na jej wejściu napis „Niech nie wchodzi tu nikt, kto nie zna geometrii". Grecka geometria w dojrzałej postaci została wyłożona przez Euklidesa (ok. 365 – ok. 300), jednego z pierwszych nauczycieli słynnej Szkoły Aleksandryjskiej. Euklides był autorem wielu prac syntetyzujących całe dziedziny wiedzy, między innymi z geometrii, optyki, astronomii oraz muzyki, jednak do historii przeszedł przede wszystkim jako autor dzieła *Stoicheia geometrias* („Elementy geometrii"), w którym podał systematyczny wykład całości ówczesnej wiedzy matematycznej. Jego sposób przestawienia jest wybitnie *aksjomatyczny* i *dedukcyjny*. *Elementy* Euklidesa wywarły ogromny wpływ na późniejszą matematykę europejską. Dzieło to stanowiło kanon nauczania geometrii w Europie przez następne 2000 lat. Sposób wykładu Euklidesa opiera się na metodach logiki Arystotelesa, który miał wielki wkład w rozwój precyzyjnego (a więc też i matematycznego) myślenia.

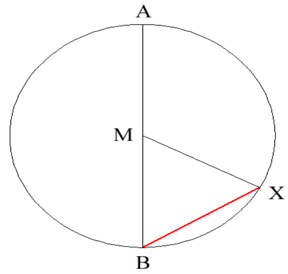
Prawdopodobnie największym greckim matematykiem był Archimedes (ok. 287 – ok. 212). Szeroko znana jest anegdota o tym, jak Archimedes rozmyślał w wannie nad problemem określenia ilości złota w koronie króla Syrakuz. Gdy wreszcie wymyślił sposób (oparty na zasadzie zwanej dziś prawem Archimedesa), wyskoczył z wanny, i rzucił się nago w bieg przez miasto krzycząc „Eureka! Eureka!" („Znalazłem!"). Z pewnością nie jest to jednak jego największe dokonani.! Archimedes studiował w Aleksandrii, gdzie nawiązał kontakty z uczniami Euklidesa, z którymi zresztą przez całe życie prowadził korespondencję. Mistrzowsko opanował obliczanie pól i objętości rozmaitych, częstokroć skomplikowanych, figur geometrycznych, posługując się metodą wyczerpywania, którą zresztą twórczo rozwinął. Metoda wyczerpywania w zastosowaniu do obliczania pola koła polegała na policzeniu pól powierzchni dwóch wielokątów foremnych – jednego wpisanego na kole, a drugiego opisanego na nim (tak jak na obrazku poniżej). Stosując tę metodę w przypadku 96-kąta foremnego, Archimedes obliczył że $3 + {}^{1}/_{7} > \pi > 3 + {}^{10}/_{71}$ (zazwyczaj Grecy używali mniej dokładnej wartości π równej $\sqrt{10}$ lub ${}^{22}/_{7}$), a także wykazał (w słynnej pracy *O kuli i walcu*), że stosunek objętości kuli do objętości opisanego na niej walca wynosi 2:3, co zresztą uznawał za swoje największe odkrycie (Cyceron pisze że w 75 r. p. n. e. widział jeszcze grób Archimedesa na którym znajdował się rysunek walca opisanego na kuli)[17]. Oprócz geometrii Archimedes zajmował się również wielkimi liczbami. W dziele *Psammites* („O liczeniu ziaren piasku") oblicza ile piasku zmieści się w całym wszechświecie. Do tego celu tworzy on nowy system liczbowy, który za podstawę bierze największą liczbę nazywalną w starożytnej grece – *myriadę*. Korzystając po drodze ze stwierdzenia że $10^{a}10^{6}=10^{a+6}$, oraz oszacowań opartych na *heliocentrycznym* [!] systemie Arystarcha, Archimedes określa liczbę ziaren piasku która wypełni cały świat na $8*10^{63}$, przy okazji wspominając również o ogromnej liczbie $10^{8*10^{16}}$. Wśród współczesnych sobie wsławił się on jednak nie tyle takimi igraszkami umysłu, co konstrukcją wielu pomysłowych mechanizmów (między innymi śruby Archimedesa), oraz obroną Syrakuz przed Rzymianami. Plutarch opisuje jak dzięki zaprojektowanym przez niego wysuwanym ramionom (żurawiom) obrońcy byli w stanie zatapiać statki na morzu, zaś dzięki katapultom zarzucali wojska lądowe głazami i ołowiem. Prócz tego ponoć zaprojektował on układ luster, który umożliwiał skupianie promieni słonecznych na wrogich okrętach, a w konsekwencji wywoływanie pożaru lub oślepianie. W roku 212 p. n. e., po dwóch latach oblężenia, Rzymianie zdobyli Syrakuzy. Archimedes był ponoć tak pochłonięty rozważaniem jakiegoś problemu, rysując w tym czasie koła na piasku, że nie zauważył zdobycia miasta. Kiedy rzymski żołnierz zbliżył się do niego, Archimedes nieuważnie nie odpowiedział na pytanie kim jest, prosząc jedynie o to, by nie niszczyć jego rysunku kół (gr. μή μου τούς κύκλους τάραττε, łac. *noli turbare circulos meos*), co tak



Giulio Parigi – Fresk w Galerii Uffizi (1599-1600)

17 Stosując metodę wyczerpywania obliczył on również że pierwiastek z 3 zawiera się pomiędzy ${}^{265}/_{153}$ (≈ 1.732) oraz ${}^{1351}/_{780}$ (≈ 1.73205). Dzisiaj wiemy że przybliżona wartość pierwiastka z 3 wynosi 1.7320508076, więc wynik Archimedesa był bardzo dokładny!

rozzłościło żołnierza, że ów w przypływie wściekłości zabił wielkiego uczonego[18]. Wraz ze śmiercią Archimedesa rozpoczął się okres powolnego upadku greckiej matematyki. Pragmatyczni Rzymianie nie byli zainteresowani abstrakcyjnymi spekulacjami Greków, mimo że korzystali z ich technicznych osiągnięć.



W okresie hellenistycznym i rzymskim na uwagę zasługują astronomowie Hipparch (190-120 p. n. e.) i Ptolemeusz (90-168 n. e.). Mają oni na swoim koncie pokaźny dorobek astronomiczny, zarówno jeśli chodzi o pomiary, jak i o teorię. Z perspektywy historii matematyki szczególnie ważne jest stworzenie przez Hipparcha, i późniejsze rozwinięcie przez Ptolemeusza, tablicy cięciw okręgu (na obrazku przykładowa cięciwa jest odcinkiem XB). Tablice te są równoważne tablicy funkcji trygonometrycznej sinus, stąd też Hipparcha i Ptolemeusza uznaje się za prekursorów trygonometrii (rozwiniętej jednak przede wszystkim w Indiach), podobnie jak Archimedesa uważa się za prekursora rachunku różniczkowego i całkowego. Ptolemeusz otrzymał także wartość liczby $\pi = 3.1416$, czyli taką samą jak Aryabhata w Indiach 300 lat wcześniej. Ostatnim ważnym greckim matematykiem był żyjący w III w. n. e. Diofantos. Jego dzieło *Arithmētika* stanowiło podsumowanie dokonań matematycznych szkoły neopitagorejskiej, rozwijającej się od I w. n. e. W odróżnieniu od reszty matematyki greckiej, dzieło Diofantosa jest nie geometryczne, lecz arytmetyczno-algebraiczne. Diofantos traktuje ułamki tak samo jak inne liczby, wprowadza liczby ujemne, rozwiązuje równania trzeciego stopnia, oraz wprowadza zapis symboliczny (algebraiczny) równań. Te dokonania powodują że często nazywa się go „ojcem algebry". W tym sensie można uznać go nie tyle za ostatniego wybitnego matematyka śródziemnomorskiej starożytności, co za pierwszego wybitnego matematyka powstającej dopiero nowej formacji kulturowej.

W roku 529 cesarz Justynian I wydał kodeks praw zawierający paragraf „O złoczyńcach, matematykach i tym podobnych osobnikach", głoszący między innymi że „potępienia godna sztuka matematyczna jest zakazana przede wszystkim". Tego samego roku zlikwidowano również platońską Akademię. Do problemów studiowanych przez Greków powrócono w Europie dopiero w późnym średniowieczu oraz w czasach Renesansu. Klasyczne greckie problemy kwadratury koła wraz z metodami wyczerpywania podległy dalszym badaniom dopiero w renesansowej Europie, prowadząc między innymi do stworzenia rachunku różniczkowego i całkowego. Co ciekawe, dopiero w XIX wieku Pierre Wantzel i Ferdinand Lindemann udowodnili że *nie da się* skonstruować trysekcji kąta *ani* kwadratury koła. Wiele wieków trwała również dyskusja nad aksjomatami *Elementów* Euklidesa. Dopiero w wieku XIX Nikołaj Łobaczewski i János Bolyai wykazali że V aksjomat jest niezależny od pozostałych, konstruując geometrie nie spełniające tego warunku.

Arabia i Persja
(VIII–XV w.)

Obraz świata Arystarcha. Diofant i liczba arabska

Liczby są tworami oderwanego od doznań zmysłowych rozumienia, czystego myślenia. Noszą one swą abstrakcyjną ważność w sobie samych. Natomiast ich ścisła stosowalność do rzeczywistej treści rozumiejącego doznania stanowi osobny problem — taki mianowicie, który wielokrotnie był stawiany, nigdy jednak nie znalazł zadowalającego rozwiązania. Zgodność systemów matematycznych z faktami codziennego doświadczenia nie jest bynajmniej na razie czymś oczywistym. Mimo laickich przekonań co do tego, że matematyka znajduje bezpośrednie poświadczenie w danych naocznych — co znajdujemy u Schopenhauera — geometria euklidejska, która zdradza powierzchowną tożsamość z popularną geometrią wszystkich czasów, tylko w bardzo wąskich granicach („na papierze") zgadza się w przybliżeniu z oglądem. Prosty fakt poucza — jak dzieje się to przy dużych odległościach — że dla naszego oka równoległe stykają się w linii horyzontu. Polega na tym cała perspektywa malarska. Euklides, gwoli naocznej pewności swych aksjomatów, unikał powoływania się na, dajmy na to, trójkąt, którego punkty są utworzone przez miejsce obserwatora oraz dwie gwiazdy stałe — nie mógł on bowiem być ani wyrysowany ani też „bezpośrednio oglądany". I jako myśliciel epoki Starożytności Euklides miał rację. Przejawiało się tu to samo uczucie, które wzdragało się przed liczbami niewymiernymi i nie odważyło się pojąć nicości jako zero, jako liczbę — uczucie, które także w bezpośrednim przedstawianiu kosmicznych relacji schodziło z drogi temu, co bezgraniczne, aby uchronić symbol miary.

18 Warto przy tej okazji przypomnieć sobie wiersz Słonimskiego pt. *Niemcom*.

Arystarch z Samos w latach 288-277 należał do kręgu astronomów aleksandryjskich, powiązanych niewątpliwie z chaldejsko-perskimi szkołami; tam też naszkicował ów heliocentryczny system świata, który po ponownym odkryciu go przez Kopernika poruszył w samej głębi metafizyczne namiętności Zachodu — przywołajmy na pamięć Giordana Bruna — został jednak przez Starożytność przyjęty z pełną obojętnością i wkrótce (chciałoby się rzec: rozmyślnie) zapomniany. Arystarchowy system świata był w istocie duchowo nieznaczący dla tej kultury. Mógłby nawet zagrozić jej poczuciu świata. Był jednak w odróżnieniu od systemu Kopernika — a ten decydujący fakt pozostał niedostrzeżony — ściśle dostosowany dzięki szczególnej koncepcji do antycznego poczucia świata. Arystarch przyjął jako kres kosmosu cieleśnie na wskroś ograniczoną, optycznie opanowywalną pustą kulę, w której środku znajdował się pomyślany po kopernikańsku system planetarny. Antyczna astronomia uważała stale ziemię i ciała niebieskie za dwie różne rzeczy, bez względu na to, jak się z osobna ujmowało ich ruchy. Powzięta już przez Mikołaja z Kuzy i Leonarda da Vinci myśl, iż ziemia jest tylko gwiazdą pomiędzy gwiazdami, harmonizuje równie dobrze z systemem ptolemejskim, jak i kopernikańskim. Ale wraz z przyjęciem kuli niebieskiej ominięto zasadę nieskończoności, mogącą zagrozić zmysłowo-antycznemu pojęciu granic. Nie wyłania się żadna idea bezgranicznej przestrzeni kosmicznej, która już tu nieuchronnie się jawi i której wyobrażenie od dawna zaświtało myślicielom babilońskim. Wprost przeciwnie. Archimedes dowodzi w swym słynnym traktacie o liczbie ziaren piasku — traktacie będącym, jak już *zdradza* sam tytuł, próbą obalenia wszelkich tendencji infinitezymalnych, choć wielokrotnie uznawanym za pierwszy krok na drodze ku rachunkowi całkowemu — że wypełnienie tego ciała stereometrycznego (gdyż Arystarchowy kosmos nie jest niczym innym) atomami (ziarnkami piasku) prowadziłoby do bardzo wysokich, lecz nie nieskończonych rezultatów liczbowych. Równa się to jednak zaprzeczeniu wszystkiego, co oznacza dla nas termin „analiza". Eudoksos, Apollonios i Archimedes — bezsprzecznie najprzenikliwsi i najodważniejsi matematycy Starożytności — przeprowadzili w kompletnej formie czysto optyczną [geometryczną] analizę tego, co się stało, na podstawie rzeźbiarsko-antycznej wartości granicznej, stosując przy tym głównie cyrkiel oraz liniał.

Należy do tego przede wszystkim metoda ekshaustii (wyczerpywania), widoczna w niedawno odkrytym liście Archimedesa do Eratostenesa, gdzie rozwiązując, na przykład, problem kwadratury odcinka paraboli, Archimedes wychodzi od obliczenia wpisanych prostokątów, nie zaś podobnych wielokątów. Ale właśnie ów pomysłowy, nieskończenie zawiły sposób dochodzenia do rezultatów — w oparciu o pewne geometryczne idee Platona — każe nam odczuć ogromną sprzeczność między tą intuicją a na pozór podobną intuicją Pascala. Nie ma jaskrawszego do tego kontrastu — jeśli pominiemy riemannowskie pojęcie całki — niż (niestety) jeszcze dzisiaj tak zwane „kwadratury", przy których „powierzchnia" ma być ograniczana przez funkcję, z całkowitym odrzuceniem wszelkiej manipulacji rysunkowej. Nigdzie obaj ci matematycy tak się do siebie nie zbliżają i nigdzie owa nieprzekraczalna przepaść tak wypowiadających się obu dusz nie daje się wyraźniej odczuć. (...)

Dopiero Diofant — jak ciągle słyszymy — uwolnił arytmetykę starożytną z więzów zmysłowości, poszerzył ją i pchnął na nowe tory; nie stworzył on wprawdzie algebry jako nauki o wielkościach nieokreślonych, ale — z nagła, niewątpliwie w efekcie przetworzenia obecnych już idei — dał jej wyraz w obrębie znanej nam matematyki doby starożytnej. Nie jest te wszakże wzbogacenie, lecz całkowite przezwyciężenie antycznego poczucia świata. W jego dziele wyłania się — około 250 roku n. e. — spod powłoki euklidejskich *intencji* myślowych owo nowe poczucie granic wobec rzeczywistości, tego, co się stało — określam je mianem *magicznego* — które okazuje się mimowiednie sprzeczne z zamierzoną wizją antyczną. Idea liczby jako wielkości nie jest tu poszerzona, ale niepostrzeżenie unieważniona. Żaden Grek nie umiałby niczego orzec o liczbie nieokreślonej *a* oraz liczbie oderwanej *3* — nie będących ani wielkością, ani też miarą czy odcinkiem.

U Diofanta liczba nie jest już miarą i istotą plastycznych rzeczy. Nie zna on wprawdzie zera i liczb ujemnych, ale nie zna też już plastycznych jednostek liczb pitagorejskich. Z drugiej strony nieokreśloność oderwanych liczb arabskich jest przecież czymś z gruntu innym niż prawidłowa wariabilność późniejszej liczby zachodniej, funkcji. Magiczna matematyka — nie znamy tu oczywiście szczegółów — wykroczyła logicznie na całej linii poza Diofanta (który jest już kolejnym ogniwem pewnego procesu rozwoju) i osiągnęła kulminację w okresie Abbasydów w IX wieku, jak wskazuje stan wiedzy matematycznej u Al-Chuwarizmiego i Al-Sidżiziego.

O. Spengler, 1917, *Zmierzch zachodu*, Monachium
(przeł. J. Marzęcki, Warszawa 2001)
fragmenty rozdziału *O znaczeniu liczb*

Narodziny i rozwój arabskiej matematyki[19] zbiegają się w czasie ze „złotym wiekiem” islamskiego imperium pod panowaniem dynastii Abbasydów, którzy przejęli władzę w roku 750, przenosząc jednocześnie stolicę z Damaszku do Bagdadu. Począwszy od panowania kalifa Haruna al-Rashida, który objął władzę w roku 786, rozpoczął się okres mecenatu i bujnego rozwoju islamskiej kultury. Harun al-Rashid i jego syn al-Ma'mun bardzo wspierali rozwój kultury, badania muzułmańskich uczonych, a także tłumaczenia obcych tekstów na język arabski. Szczególnie ważną rolę w arabskiej matematyce odegrały dokonane w tym czasie tłumaczenia *Elementów* Euklidesa (geometria), *Āryabhatīyi* Aryabhaty (trygonometria), oraz *Brahmasphutasiddhanty* Brahmagupty (arytmetyka). Nieco później przetłumaczono również inne dzieła Euklidesa, a także Archimedesa, Ptolemeusza, Diofantosa i innych autorów grackich, jak również prawdopodobnie niektórych innych autorów indyjskich. Na bazie tych tłumaczeń bardzo szybko rozwinęła się oryginalna arabska myśl matematyczna, korzystająca wprawdzie z dokonań poprzedników, lecz posiadająca unikalny charakter.

Najsłynniejszym matematykiem arabskim jest, uznawany za jednego z największych matematyków wszechczasów, Abu Ja'far Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (ok. 780-850), zwany również al-Chuwarizmim. Był on matematykiem, astronomem, astrologiem i geografem. Stał się prekursorem kilku dyscyplin matematycznych, oraz wpłynął na współczesną myśl matematyczną najmocniej ze wszystkich średniowiecznych matematyków. W swoim najważniejszym dziele *al-Kitāb al-Maqala fī Hīsāb al-Jabr wa-al-Muqābala* („Kompendium o liczeniu przez uzupełnienie i wyrównywanie”) podał systematyczny wykład *ogólnych* metod rozwiązywania wszystkich możliwych równań kwadratowych. Tekst ten jest bardzo często uznawany za pierwsze dzieło o algebrze[20], najbardziej charakterystycznej dziedziny arabskiej matematyki i jednej z najważniejszych dziedzin współczesnej matematyki. Dzieło Al-Chuwarizmiego stało się podstawą zastosowania arytmetyki do geometrii w oparciu o metody algebraiczne. Al-Chuwarizmi dokonał twórczej syntezy wiedzy greckiej i indyjskiej, wprowadzając nowe, algebraiczne podejście. Rozwinął on działania w indyjskim systemie dziesiętnym, korzystając z zera, ułamków i innych procedur arytmetycznych i zastosował je do problemów algebraicznych, arytmetycznych i geometrycznych. Słowo *al-jabr* oznacza *uzupełnienie*, czyli przenoszenie wyrazów na drugą stronę równania, natomiast *al-muqabala* oznacza *wyrównywanie*, czyli zastępowanie podobnych wyrazów przez jeden. Rozwinięta przez Al-Chuwarizmiego algebra umożliwiła traktowanie liczb całkowitych, ujemnych, ułamków i liczb niewymiernych w ten sam sposób, jako pewnych obiektów podlegających przekształceniom. Późniejsze łacińskie tłumaczenie dzieła Al-Chuwarizmiego pod nazwą *Liber algebra et almucabala* stało się źródłem nazwy „algebra”, zaś imię autora stało się źródłem nazwy „algorytm”, oznaczającej skończony i uporządkowany zbiór dobrze określonych działań, które są konieczne do wykonania danego zadania.[21] Al-Chuwarizmi napisał także kilka innych książek, m. in. dzieło *al-Kitāb al-Jam' wa-l-tafrīq bil Hisāb al-Hindi* („Książka o dodawaniu i odejmowaniu przy pomocy rachunku indyjskiego”, przetłumaczone w XI wieku na łacinę jako *Algorithmi de numero Indorum*) traktujące o liczbach indyjskich, oraz traktat geograficzny *al-Kitāb Surat-al-Ard* („Obraz Ziemi”). Podał on także szczegółową tablicę funkcji sinus, geometryczne przedstawienie cięć krzywych stożkowych, uczestniczył w pomiarach obwodu Ziemi, a także prowadził oryginalne badania związane z zegarami i astrolabium (przyrządem do pomiarów położenia ciał niebieskich).

Strona tytułowa dzieła *al-Kitāb al-Maqala fī Hīsāb al-Jabr wa-al-Muqābala*

Od końca wieku VIII aż do czasów początków dominacji imperium ottomańskiego (początek XV wieku) żyło i tworzyło wielu arabskich i perskich matematyków, rozwijających idee algebraiczne, arytmetyczne, geometryczne i trygonometryczne. Spośród nich warto wymienić następujących:

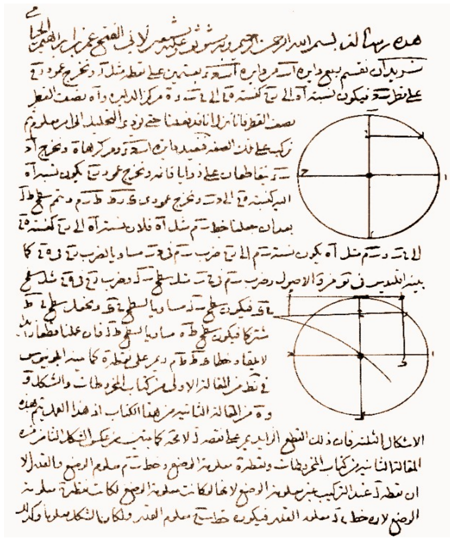
19 Zwyczajowe określenie „matematyka arabska” jest jedynie wygodnym uproszczeniem językowym, gdyż w rzeczywistości stosunkowo dużo twórców arabskiej matematyki było Persami. Bardziej precyzyjne byłoby więc mówienie o arabsko-perskiej matematyce, lub matematyce islamskiej czy też muzułmańskiej.

20 Lub drugie, jeśli słusznie uwzględnić *Arytmetykę* Diofantosa.

21 Ciekawostką jest, że słowo *cyfra* pochodzi z arabskiego *sifr*, które oznaczało zero, jak również pustkę i próżnię.

- Abū ‘Alī al-Hasan ibn al-Hajtam (965-1039), zwany Alhazenem, był urodzonym w Persji matematykiem, fizykiem i astronomem. Jest uznawany za „ojca optyki”. W matematyce zajmował się między innymi teorią liczb. Był on pierwszym, który próbował sklasyfikować wszystkie parzyste liczby doskonałe (tzn. takie, które są równe sumie ich dzielników właściwych, np. 6 = 3 + 2 +1, 28 = 14 + 7 + 4 + 2 + 1) o formie $2^{k-1}(2^k-1)$, gdzie 2^k-1 jest liczbą pierwszą (niepodzielną przez inną niż ona sama i jedynka). Jako pierwszy podał także twierdzenie, że jeśli *p* jest liczbą pierwszą, to $1+(p-1)!$ Jest podzielne przez *p*. Co ciekawe, w Europie twierdzenie to zostało odkryte ponownie dopiero 750 lat później przez Johna Wilsona.

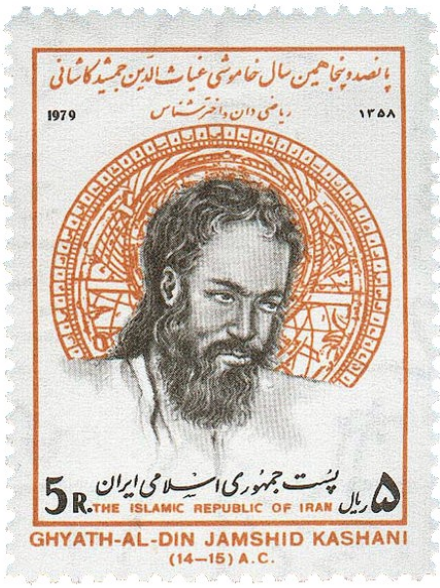
- Wybitny perski matematyk Abu Bakr al-Karadżi (953-1029) w swoim słynnym traktacie *al-Fakhri* rozwinął idee algebraiczne, całkowicie uwalniając algebrę od operacji geometrycznych, zastępując je przez znane dzisiaj działania algebraiczne. Był pierwszym który wprowadził wyrażenia x, x^2, x^3,... oraz 1/x, $1/x^2$, $1/x^3$,... podając również zasady ich mnożenia przez siebie. Odkrył również wzór (zwany dziś twierdzeniem o dwumianie):
$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k y^{n-k}.$$
Al-Karadżi zapoczątkował szkołę algebraików która działała i tworzyła przez kilka następnych stuleci.



Strona z oryginalnego manuskryptu autorstwa Omara Chajjáma

- Słynny Omar Chajjám (1048-1131), którego pełne imię brzmiało Ghiyath al-Din Abu'l-Fath Omar ibn Ibrahim Al-Nisaburi Khayyāmi (w arabskim), perski poeta, filozof i astronom, twórca poetyckich *Rub‘āyāt* („Rubajjatów”), był także matematykiem. Napisał on dzieło „Rozprawę o zademonstrowaniu zagadnień z algebry”, stanowiące komentarz do *Elementów*, w którym, studiując przecięcia krzywych stożkowych, podaje geometryczne rozwiązanie równań trzeciego stopnia, co jest jednym z najbardziej oryginalnych odkryć w matematyce islamskiej. Napisał on także znaczącą pracę na temat V postulatu Euklidesa o równoległości prostych, zastępując V postulat różnymi innymi twierdzeniami.

- Perski matematyk Ghiyath al-Kashi (1380-1429), znany również jako Gijasedin Dżamszid ben Mas'ud ben Mahmud al-Kaszi Kaszani, przyczynił się bardzo do rozwoju ułamków dziesiętnych. Główne dzieło al-Kasziego *Miftahul hisabi* („Klucz do arytmetyki”) jest jednym z najważniejszych średniowiecznych tekstów matematycznych. Przedstawia on rozwinięcia dziesiętne liczb algebraicznych (takich jak np. $\sqrt{2}$) oraz liczb rzeczywistych, w tym również liczby π. W *Traktacie o okręgu* al-Kaszi policzył π z dokładnością do szesnastego miejsca po przecinku, podając π = 3.1415926535897932. Zarówno jeśli chodzi o arytmetykę, jak i obliczenia rozwinięć dziesiętnych, al-Kaszi wyprzedził rozwój matematyki europejskiej o około dwieście lat. Al-Kaszi rozwinął także metodę obliczania pierwiastków *n*-tego stopnia, podaną przez Hornera i Ruffiniego wiele wieków później. Podał także tablicę wartości funkcji sinus, dokładną do około 8 miejsc po przecinku (w systemie dziesiętnym).



W wieku XV, wraz z dominacją Imperium Ottomańskiego, nastąpiła stagnacja i upadek arabsko-perskiej matematyki, z przyczyn podobnych do stagnacji i upadku greckiej i hellenistycznej matematyki pod panowaniem Rzymian. Warto pamiętać, że wiele odkryć i pomysłów europejskich matematyków XVI-XVIII wieku pojawia się kilka wieków wcześniej w tekstach matematyków arabskich. Ze względu na zastosowanie abstrakcyjnych symboli algebraicznych jako podstawowej metody formułowania problemów, współczesna europejska matematyka ma dużo więcej wspólnego z matematyką arabską niż grecką.

Matematyka europejska
(XIII-XXI w.)

Liczba jako funkcja na Zachodzie

Decydujący wyczyn Kartezjusza, którego geometria ukazała się w 1637 roku, polegał nie na wprowadzeniu nowej metody czy punktu widzenia w dziedzinie tradycyjnej geometrii — jak wielokrotnie się stwierdza — lecz na stworzeniu ostatecznej koncepcji nowej idei liczb, która wyraziła się w ogólności w oderwaniu geometrii od optycznie uchwytywalnych konstrukcji, od mierzonych i mierzalnych odcinków. Analiza nieskończoności stała się *eo ipso* faktem. Zamiast zmysłowego elementu konkretnego odcinka i powierzchni — specyficznego wyrazu antycznego poczucia granic — pojawia się abstrakcyjno-przestrzenny, a więc nieantyczny element punktu, który odtąd jest charakteryzowany jako grupa przyporządkowanych czystych liczb. Kartezjusz zniszczył przekazane przez tradycję arabską i teksty starożytne pojęcie wielkości, zmysłowego wymiaru, zastępując je zmienną wartością relacji między usytuowaniami w przestrzeni. Nie dostrzega się jednak, że oznaczało to w ogólności eliminację geometrii, która odtąd w obrębie liczbowego świata analizy wiedzie pozorne tylko — spowite w antyczne reminiscencje — istnienie. Termin „geometria” ma niezbywalny, nie dający się zreinterpretować sens apolliński. Od czasów Kartezjusza ta rzekomo „młodsza geometria” jest albo czynnością syntetyczną, która określa położenie punktów w niekoniecznie już trójwymiarowej przestrzeni („rozmaitości punktowej”)[22] za pomocą liczb, albo też analityczną, określającą liczby przez położenie punktów. To zastępowanie odcinków położeniami oznacza jednak czysto przestrzenne, już nie cielesne pojmowanie rozciągłości.

Klasycznym przykładem tego zniszczenia odziedziczonej optyczno-skończonej geometrii wydaje mi się przeobrażenie funkcji kątowych (trygonometrycznych) — które były w prawie nieuchwytnym dla nas sensie „liczbami” indyjskiej matematyki — w funkcje cyklometryczne, i dalej ich rozpłynięcie się w szeregach, które w nieskończonej liczbowej sferze algebraicznej analizy zatraciły nawet ślady najlżejszego podobieństwa do tworów geometrycznych w stylu Euklidesa. Liczba okręgu *pi* — wyłaniając się wszędzie niczym podstawa naturalnych logarytmów *e* w całym tym królestwie liczb — rodzi relacje, które unieważniają wszelkie granice dawnej geometrii, trygonometrii, algebry, i które nie mają charakteru arytmetycznego ani geometrycznego; przy ich rozważaniu nikt już nie myśli o rzeczywiście nakreślonych okręgach czy też obliczalnych potęgach.

Podczas gdy dusza starożytna w osobie Pitagorasa doszła około 540 roku do odkrycia swojej apollińskiej liczby jako mierzalnej wielkości, dusza zachodnia wykryła za sprawą Kartezjusza i jego pokolenia (Pascala, Fermata, Desarguesa) w analogicznym punkcie czasowym ideę liczby, która zrodziła się z namiętnego faustowskiego pędu ku nieskończoności. Liczba jako *czysta wielkość,* sprzęgnięta z cielesną teraźniejszością konkretnej rzeczy, znajduje swój odpowiednik w liczbie jako *czystej relacji*[23]. Jeśli świat antyczny, kosmos, można przy założeniu owej głębokiej potrzeby widzialnej ograniczoności określić jako policzalną sumę rzeczy materialnych, to nasze poczucie świata urzeczywistniło się w obrazie nieskończonej przestrzeni, w której wszystko widzialne — jako coś uwarunkowanego wobec tego, co nieuwarunkowane — odczuwane jest nieomal jako rzeczywistość drugorzędna. Zachodnim symbolem jest decydujące, nie wzmiankowane w żadnej innej kulturze, pojęcie funkcji. Funkcja nie jest bynajmniej poszerzeniem jakiegoś istniejącego już pojęcia liczby — jest ona jej całkowitym przezwyciężeniem. Nie tylko euklidejska, a *eo ipso* także „ogólnoludzka”, oparta na codziennym doświadczeniu geometria dzieci i laików, ale też i archimedesowa sfera elementarnych rachunków przestaje tym samym mieć jakąkolwiek wartość dla naprawdę znaczącej matematyki zachodnioeuropejskiej. Istnieje już tylko abstrakcyjna analiza. I właśnie potęga, będąca zrazu tylko liczbowym oznaczeniem określonej grupy działań mnożenia (dla iloczynów równych wielkości), zostaje całkowicie oderwana przez nowy symbol wykładnika (logarytmu) i jego zastosowanie w ramach złożonych, ujemnych, ułamkowych form, od pojęcia wielkości i przetransponowana do transcendentnego świata relacji — świata, który musiał pozostać niedostępny dla Greków, znających wyłącznie dwie dodatnie, wyrażane liczbami całkowitymi potęgi jako reprezentantki powierzchni i ciała. Pomyślmy tu choćby o wyrażeniach w rodzaju

22 Dziś powiedzielibyśmy – „rozmaitością teoriomnogościową” (przyp. RPK).

23 Odpowiada to dokładnie relacji między monetą a podwójną buchalterią w finansowych wyobrażeniach obu kultur. (przyp. autora)

$$e^{-x}, \sqrt[\pi]{x}, a^{1/i}.$$

Każda z nasyconych głębokim znaczeniem koncepcji, które począwszy od renesansu szybko po sobie następowały — liczby urojone i zespolone, wprowadzone przez Cardana już około 1550 roku, nieskończone szeregi, które zostały ugruntowane teoretycznie przez wielkie Newtonowskie odkrycie dwumianu w 1666 r., logarytmy odkryte około 1610 roku, geometria różniczkowa, oznaczona całka Leibniza, zbiór jako nowa jednostka liczbowa, sugerowana już przez Kartezjusza, nowe procesy, jak choćby nieoznaczone całkowanie, rozwój funkcji w postaci szeregów, nawet nieskończonych szeregów innych funkcji — jest triumfem nad obecnym w nas pospolito-zmysłowym poczuciem liczby, które w duchu nowej matematyki — realizującej z konieczności nowe poczucie świata — musiało być przezwyciężone. Nie istniała dotąd druga taka kultura, która by okazywała tak wielką cześć dokonaniom innej, dawno wygasłej kultury i tak bardzo ulegała jej wpływom naukowym, jak właśnie kultura zachodnia wobec starożytnej. Mimo to każdy krok na tej drodze był faktycznym oddaleniem od zamierzonego ideału. Historia zachodniej wiedzy jest historią postępującej emancypacji od antycznego myślenia, uwolnienia nie tyle chcianego, ile wymuszonego w głębi nieświadomości. Tak więc rozwój nowej matematyki przybrał kształt skrytej, długiej i ostatecznie zwycięskiej walki przeciw pojęciu wielkości.

Obecny matematyczny język znaków zafałszowuje ten stan rzeczy; jemu to należy przede wszystkim przypisać, iż jeszcze dzisiaj nawet matematycy hołdują przekonaniu, jakoby liczby były wielkościami — na tej bowiem przesłance opiera się w istocie nasza notacja. Ale to nie poszczególne, służące do wyrażania funkcji znaki (x, *n,* 5), lecz sama funkcja jako jedność, jako element, zmienna, nie dająca się już zawrzeć w optycznych granicach relacja, jest nową liczbą. Dla niej właśnie byłby potrzebny nowy, nie skażony w swej strukturze antycznymi wpływami, język formuł.

Uprzytomnijmy sobie różnicę pomiędzy dwoma równaniami — samo to słowo nie powinno obejmować tak różnorodnych rzeczy — jak na przykład $3^X + 4^X = 5^X$ oraz $x^n + y^n = z^n$ (równanie twierdzenia Fermata). Pierwsze składa się z kilku „liczb antycznych” (wielkości), drugie zaś jest jedną liczbą innego rodzaju, co przesłonięte zostało przez identyczną notację rozwiniętą pod wpływem wyobrażeń euklidejsko-archimedesowych. W pierwszym wypadku znak równości jest konstatacją sztywnego powiązania określonych, uchwytnych wielkości; w drugim — przedstawia on relację, istniejącą w obrębie grupy zmiennych tworów — relację tego rodzaju, że pewne zmiany z konieczności pociągają za sobą inne zmiany. Pierwsze równanie ma na celu określenie (pomiar) jakiejś konkretnej wielkości, „rezultatu”; drugie nie ma w ogóle żadnego rezultatu, lecz jest tylko obrazem i znakiem pewnej relacji, która dla $n > 2$ — jest to słynny problem Fermata — wyklucza (co można prawdopodobnie wykazać[24]) całkowite wartości liczbowe. Grecki matematyk nie byłby w stanie zrozumieć, co się właściwie kryje za takimi operacjami, których końcowym celem nie jest „wyliczanie”.

Już bowiem wraz z pojęciem niewymiernych, z gruntu antyhelleńskich, liczb unieważnione zostało u samych podstaw pojęcie konkretnej, oznaczonej liczby. Odtąd liczby te nie stanowią już dającego się ogarnąć wzrokiem szeregu wzrastających, nieciągłych, plastycznych wielkości, lecz tworzą przede wszystkim jednowymiarowe kontinuum, w którym każde cięcie (w sensie Dedekinda) reprezentuje jakąś liczbę, nie podpadającą raczej pod stare oznaczenie. Dla umysłu starożytnego pomiędzy istnieje 1 a 3 tylko jedna liczba, dla zachodniego zaś — nieskończony zbiór. Wraz z wprowadzeniem liczb urojonych ($\sqrt{-1}$ = i) i w końcu zespolonych (o formie ogólnej a + bi), które nadają linearnemu kontinuum szerszą postać wysoce transcendentnej konstrukcji ciała liczbowego (całości zbioru jednorodnych elementów), w którym każde cięcie reprezentuje teraz jakąś płaszczyznę liczbową — nieskończony zbiór mniejszej „mocy”, choćby ogół wszystkich liczb rzeczywistych — destrukcji uległa wszelka

24 I faktycznie zostało to wykazane, lecz dopiero w roku 1995 przez Andrew Wilesa, po 357 latach po postawieniu tego problemu przez Pierre'a de Fermata. (przyp. RPK).

śladowa pozostałość antyczno-popularnej konkretnej uchwytności. Te płaszczyzny liczbowe, które od czasów Cauchy'ego i Gaussa odgrywają ważną rolę w teorii funkcji, są czystymi tworami myślowymi. Nawet dodatnią liczbę niewymierną jak $\sqrt{2}$ dałoby się poniekąd wykoncypować — przynajmniej negatywnie — z antycznego myślenia liczbowego, wykluczając ją właśnie jako liczbę – jako ἀρρετος i ἀλογος; wyrażenia typu x+yi wykraczają jednak poza wszelkie możliwości starożytnego myślenia. *Teoria funkcji* polega na rozciągnięciu praw arytmetycznych na całą dziedzinę liczb zespolonych, w obrębie której prawa te mają stałe zastosowanie; reprezentuje ona wreszcie zachodnią matematykę w jej formie czystej, zawierając w sobie i znosząc wszystkie dziedziny szczegółowe. Dopiero dzięki temu matematyka ta daje się w pełni stosować do obrazu współrozwijającej się dynamicznej fizyki Zachodu, podczas gdy matematyka starożytna stanowi dokładny odpowiednik owego świata plastycznych osobnych rzeczy, który jest przedmiotem teoretycznych i mechanicznych dociekań fizyki statycznej od Leukippa aż do Archimedesa.

Klasycznym stuleciem tej barokowej matematyki — zachodniego antytypu stylu jońskiego — jest wiek XVIII, który od decydujących odkryć Newtona i Leibniza prowadzi poprzez Eulera, Lagrange'a, Laplace'a i d'Alemberta aż do Gaussa. Świetny rozwój tego potężnego tworu duchowego nosił pozory cudowności. Nie ośmielano się wprost wierzyć własnym oczom. To stulecie wzniosłego upojenia całkowicie abstrakcyjnymi, usuniętymi sprzed cielesnego oka formami — w jednym bowiem rzędzie z tymi mistrzami analizy stoją Bach, Gluck, Haydn, Mozart — gdy wąski krąg wybranych i głębokich umysłów rozkoszował się świetnymi odkryciami i hazardowymi spekulacjami, odpowiada dokładnie w swej treści najdojrzalszemu stuleciu stylu jońskiego, wiekowi Eudoksosa i Archytasa (440-350) — trzeba tu nadto dodać: Fidiasza, Polykleta, Alkamenesa i budowli Akropolu — w którym świat form antycznej matematyki i rzeźby rozkwitnął całą pełnią swych możliwości, dobiegając swego kresu.

O. Spengler, 1917, *Zmierzch zachodu*, Monachium
(przeł. J. Marzęcki, Warszawa 2001)
fragmenty rozdziału O znaczeniu liczb

Wraz ze zmierzchem starożytności wiedza matematyczna Greków została w Europie zatracona. Korzystano wprawdzie z operacji dodawania, odejmowania, dzielenia i mnożenia (przy pomocy cyfr rzymskich), lecz zapisywano je słownie. Znano również już tylko elementarną geometrię. Właściwa historia matematyki europejskiej rozpoczyna się dopiero wraz z obszernymi łacińskimi tłumaczeniami dzieł arabskich w XII i XIII wieku, zwłaszcza prac Al-Chuwarizmiego, w *Hisab al-jabr w'al-muqabala* (łac. *Liber algebra et almucubala*) oraz *Kitab al-Adad al-Hindi* (łac. *Algoritmi de numero Indorum*). W tym samym czasie przełożono na łacinę szereg greckich i hebrajskich rękopisów matematycznych. W roku 1202 Leonard z Pizy (zw. Fibbonaccim) wydał księgę *Liber Abaci*. Fibonacci spędził dużą część młodości w północnej Afryce, gdzie uczył się arabskiego i studiował arabską matematykę. *Liber Abaci* wprowadza obliczenia wykonywane na liczbach hinduskich używanych podówczas przez Arabów. Tekst ten zawiera między innymi opis mnożenia w słupku, działania na ułamkach, chińskie twierdzenie o resztach (chiński problem reszty), oraz zagadnienia związane z liczbami doskonałymi. *Liber Abaci* jest uznawane za pierwsze istotne europejskie dzieło matematyczne. Potrzebne jednak było kilka wieków aby europejska matematyka nabrała wiatru w skrzydła. Przykładowo, znaki + oraz – pojawiają się w matematyce europejskiej dopiero pod koniec XV wieku, zaczerpnięte z notacji stosowanej przez kupców (notabene, w Europie przez bardzo długi czas traktowano liczby ujemne jako *fikcyjne*, czy też *fałszywe*), zaś systematycznego ustalenia symboliki i notacji w algebrze dokonano dopiero pod koniec XVI wieku. W XVI wieku zostały przełożone i wydane dzieła Archimedesa, które spowodowały silny ferment intelektualny, opozycyjny wobec dotychczasowej dominacji dzieł Arystotelesa i scholastyków. Intelektualny klimat renesansu powodował wielkie zainteresowanie myślą starożytnej Grecji. Wskutek tego europejska matematyka zaczęła się rozwijać na dwoistej bazie wpływów arabskiej arytmetyki i algebry oraz greckiej geometrii[25].

Pierwsze istotne dokonania matematyczne nowożytnych europejczyków, będące zresztą pod wyraźnym wpływem arabskiej algebry, datują się na renesansowe Włochy wieku XV i XVI. Pod koniec wieku XV Scipione del Ferro znalazł ogólne rozwiązanie równania trzeciego stopnia. Swoją tajemnicę wyjawił on dopiero na łożu śmieci swoim uczniom, Hannibalowi della Nave oraz Antonio Mario Fiorowi. Korzystając z

25 Arabska trygonometria, wywodząca się w większym stopniu z opartej na funkcji sinus trygonometrii hinduskiej, niż z opartej na cięciwie trygonometrii hellenistycznej, wywarła wpływ w pierwszej kolejności na astronomów, znajdując ważne miejsce w matematyce dopiero w okolicach XVII wieku.

metody del Ferro, Fior wygrał kilka turniejów matematycznych, przegrywając jednak w roku 1535 z Niccolò Fontaną, zwanym Tartaglią, czyli jąkałą. Tartaglia był matematycznym samoukiem. Dokonał on między innymi pierwszych włoskich tłumaczeń Euklidesa i Archimedesa. Turniej pomiędzy Fiorem a Tartaglią trwał 50 dni. Czterdziestego drugiego dnia turnieju Tartaglia dokonał tego samego odkrycia co Scipione del Ferro i wygrał konkurs. Nieco później Gerolamo Cardano wyprosił u Tartaglii sekret jego metody pod przysięgą że nigdy nie ujawni tej tajemnicy. Gdy jednak w roku 1543 Cardano wraz ze swoim uczniem Lodovico Ferrarim odwiedził Hannibala della Nave i dowiedział się o pierszeństwie Scipione del Ferry, zdecydował się opublikować zarówno metodę del Ferry – Tartaglii, jak i odkrytą przez Ferrariego w 1540 roku metodę rozwiązania równań czwartego stopnia. Wydane w roku 1545 dzieło Gerolamo Cardana *Ars Magna* spowodowało wielki żal i złość u Tartaglii, który oskarżył Cardano o plagiat. Tartaglia wyzwał Cardana w 1548 roku na turniej, na który ten nie raczył się pofatygować, przysyłając Ferrariego. Tartaglia przegrał ten turniej. Ironią historii jest fakt, że metoda którą niezalenie odkryli del Ferro i Fontana/Tartaglia nazywa się dziś metodą Cardana.

Giacomo Cardano

Prawdziwym początkiem nowożytnej matematyki europejskiej jest jednak wiek XVII, w którym nagle i silnie wyłania się odrębny charakter europejskiej matematyki. W tym wieku powstaje *geometria analityczna* stworzona przez René Descartesa (1596-1650) oraz Pierre'a de Fermata, *rachunek różniczkowo-całkowy*, stworzony przez Isaaka Newtona i Gottfrieda Wilhema Leibniza oraz *rachunek prawdopodobieństwa*, stworzony przez Pierre'a de Fermata oraz Blaise'a Pascala. Prace wszystkich tych autorów są naznaczone ścieraniem się idei geometrycznych starożytnej Grecji z ideami arytmetycznymi i algebraicznymi Arabów. Jednak pomimo braku ustalonego języka (który został sformułowany dopiero w wieku XVIII), wszystkie te trzy teorie stały się podstawą współczesnej matematyki. Również w tym wieku John Napier wymyślił *logarytmy,* które zostały później rozpropagowane przez Henry'ego Briggsa. Jedne z najważniejszych matematycznych dzieł tego wieku to z pewnością *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* oraz *De quadratura curvarum* Newtona, w którym wykłada on metodę flusji, czyli swoją wersję rachunku różniczkowo-całkowego, oraz traktat *La géométrie* Descartesa, w którym przedstawia on swoją geometrię analityczną.

Portret Leonharda Eulera pędzla Emanuela Handmanna

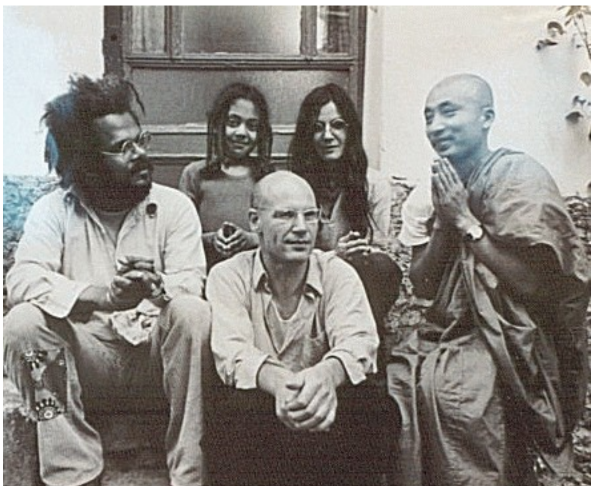
Dopiero w następnym wieku, który cechuje bujny rozwój *mechaniki teoretycznej* (wywodzącej się z geometrii analitycznej, rachunku różniczkowo-całkowego, oraz mechaniki Newtona), ostatecznie formuje się kształt europejskiej matematyki, opartej przede wszystkim na pojęciu *funkcji.* Słynnymi twórcami mechaniki teoretycznej byli Leonhard Euler (1707-1783), Joseph Louis Lagrange, oraz Pierre-Simon Laplace. Największym matematykiem XVIII wieku i jednym z największych matematyków w historii ludzkości był z pewnością Leonhard Euler. Dokonał on nie tylko wielu odkryć, lecz również stworzył nowe działy matematyki, rachunek wariacyjny oraz geometrię różniczkową, a także wprowadził charakterystyczne dla matematyki europejskiej pojęcie funkcji oraz ustandaryzował wiele matematycznych określeń. To właśnie Euler wprowadził oznaczenie i oznaczające pierwiastek z liczby –1, oraz oznaczenie e dla badanej przez Bernoulliego, Leibniza i Napiera liczby 2.7182..., jak również podał jeden z najsłynniejszych wzorów wszechczasów, łączący w sobie wszystkie najważniejsze stałe matematyczne: 0, 1, π, i, oraz e:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Wiek XIX cechuje duży wzrost abstrakcyjności matematyki, połączony z jednoczesnym powstawaniem nowych dziedzin matematycznych. Évariste Galois (zmarły w wieku 21 lat) oraz i Niels Henrik Abel (zmarły w wieku 26 lat) badali rozwiązania równań stopnia wyższego niż czwarty, co doprowadziło do powstania i rozwoju teorii grup oraz teorii równań algebraicznych. Augustin Louis Cauchy oraz Karl Weierstraß stworzyli podstawy teorii granicy funkcji oraz (wraz z Carlem Friedrichem Gaußem) teorii funkcji analitycznych, czyli różniczkowalnych funkcji na zmiennych zespolonych. W geometrii Nikołaj Łobaczewski i niezależnie János Bolyai wykazali że V aksjomat Euklidesa jest niezależny od pozostałych i że istnieją geometrie nie spełniające tego warunku. Konsekwencją ich odkryć było sformułowanie przez Bernharda Riemanna nowej teorii geometrycznej (zwanej dziś geometrią Riemanna), znacznie ogólniejszej od geometrii Euklidesowej. W ten sposób nowożytna matematyka europejska przekroczyła swoje korzenie również w geometrii, gdyż geometria riemannowska oparta była na teorii funkcji i geometrii różniczkowej, dziedzinach bardzo odległych od euklidesowego studiowania wymiernych proporcji między odcinkami. Geometria Riemanna stała się pół wieku później podstawą matematyczną ogólnej teorii względności Einsteina. Za największego matematyka XIX wieku uznaje się powszechnie Carla Friedricha Gaußa (1777-1855), geniusza matematycznego zwanego „księciem matematyki”, który dokonał wielkiej liczby odkryć między innymi w teorii liczb, analizie, geometrii różniczkowej, a takze w badaniach magnetyzmu, w geodezji, oraz w optyce. Swoje wielkie dzieło *Disquisitiones Arithmeticae* poświęcone teorii liczb Gauss napisał mając jedynie 21 lat. Scalił w nim dokonania Fermata, Eulera, Lagrange'a i Legendre'a, dodając wiele oryginalnych twierdzeń i obserwacji. W tym samym roku udowodnił również podstawowe twierdzenie algebry (mówiące, że równanie algebraiczne stopnia *n* ma *n* rozwiązań zespolonych). Pod koniec XIX wieku Georg Cantor stworzył teorię mnogości, badającą zbiory. Cantor odkrył, że w jego teorii zbiory mogą posiadać nieskończoności różnego rodzaju: czym innym jest nieskończoność, która pojawia się u liczb naturalnych 1, 2, 3, 4, ..., a czym innym jest nieskończoność liczb rzeczywistych. Badania te doprowadziły do rozważania nieskończonej liczby różnych nieskończoności, indeksowanych przy pomocy hebrajskiej litery alef ℵ. Nieskończoność związana z liczbami naturalnymi oznaczona została jako ℵ z indeksem zero – co oznacza najmniejszą z nieskończoności.

Portret Carla Friedricha Gaussa pędzla Christiana Albrechta Jensena

W wieku XX matematyka stała się dziedziną bardzo rozległą, częstokroć nie obejmowaną już przez samych matematyków. Głównymi zjawiskami w tym czasie stały się z pewnością rozwój metod analitycznych z jednej strony oraz algebraicznych z drugiej. W pierwszej połowie XX wieku silnie zaznaczyła się tendencja do sprowadzenia podstaw matematyki do logiki i operacji gramatycznych na znakach, nad czym pracowali między innymi Bertrand Russell oraz David Hilbert (tzw. program Hilberta miał na celu właśnie formalizację matematyki). Jednak pracom tym ostateczny kres położyły twierdzenia Kurta Gödla, który wykazał (mówiąc w skrócie), że tego typu działalność jest skazana na fiasko. Dziedziną matematyki powstałą w XX wieku, która od razu zyskała ogromne znaczenie, jest topologia, rozważająca takie własności przestrzeni, które nie zmieniają się przy ich wyginaniu i rozciąganiu. W drugiej połowie wieku XX bardzo silnie rozwinęła się abstrakcyjna algebra, łącząc się zarówno z badaniem problemów geometrycznych (jako geometria algebraiczna) jak i topologicznych (topologia algebraiczna). W obydwu tych dziedzinach bardzo istotną rolę pełni teoria kategorii, która bada ogólne przekształcenia między obiektami zachowujące strukturę tych obiektów.



Alexander Grothendieck

Ze względu na różnorodność oraz specjalistyczność najnowszej wiedzy trudno ją ująć syntetycznie w skrócie zrozumiałym dla osoby postronnej. Ogólnie jednak można powiedzieć, że cechą charakterystyczną wieku XX był wybitny wzrost abstrakcyjności badanych zagadnień matematycznych, odkrywaniem wielu powiązań pomiędzy różnymi dziedzinami wiedzy matematycznej, odrywaniem się nowych dyscyplin i specjalizacja badań, a także powstanie dziedzin, które badają ogólne struktury w ramach których mogą istnieć obiekty matematyczne (teoria grup, a zwłaszcza teoria kategorii). Pośród wielkich matematyków dwudziestego wieku z pewnością należy wymienić dwie postacie: Srinivāsę Aiyangāra Rāmānujana, genialnego indyjskiego samouka[26], oraz Alexandre'a Grothendiecka, który w latach sześćdziesiątych zrewolucjonizował rozległe połacie nowożytnej matematyki (między innymi topologię algebraiczną i geometrię algebraiczną).

Zakończenie

Trudno powiedzieć, jak dalej potoczy się historia zachodnioeuropejskiej matematyki. Z pewnością jednak w jej przemianach odegra ważną rolę zarówno czynnik indywidualny, jak i kulturowy. Zamiast zbędnych podsumowań oddamy zatem raz jeszcze głos syntetycznemu komentarzowi Spenglera.

> *Geometria i arytmetyka*
>
> Punktem wyjścia wszelkiego formowania w epoce Starożytności było — jak widzieliśmy — porządkowanie tego, co się stało, o ile jest to obecne, ogarnialne wzrokiem, mierzalne i policzalne. Zachodnie, gotyckie poczucie formy, właściwe niepohamowanej, przepojonej silną wolą, wybiegającej w dal duszy, wybrało znak czystej, niepostrzegalnej, bezgranicznej przestrzeni. Nasza nieskończona przestrzeń kosmiczna, której istnienie jest dla nas — jak się zdaje — zrozumiałe samo przez się, nie istnieje dla człowieka starożytnego. Nie potrafił on nawet jej sobie wyobrazić. Absolutna *przestrzeń* naszej fizyki jest w istocie formą obudowaną bardzo licznymi i nader zawiłymi przesłankami — formą naturalną i konieczną wyłącznie dla naszej duchowości. Najprostsze pojęcia są zawsze najtrudniejsze. Począwszy od Kartezjusza, cała matematyka służy teoretycznej interpretacji tego wielkiego, przesyconego religijną treścią symbolu. Starożytna matematyka i fizyka nie znają w ogóle treści tego słowa. Tu też miana antyczne, które przejęliśmy z literackiej spuścizny Greków, przesłaniają ten stan rzeczy. Geometria oznacza sztukę mierzenia, arytmetyka — sztukę liczenia. Matematyka zachodnia nie ma już nic wspólnego z tymi dwoma rodzajami odgraniczania, nie znalazła jednak dla siebie żadnych nowych terminów. Słowo „analiza" nie mówi bynajmniej wszystkiego.
>
> Człowiek starożytny zaczyna i kończy swe rozważania na pojedynczych ciałach i ich powierzchniach granicznych, do których pośrednio należą przecięcia stożkowe i wyższe krzywe. My znamy w gruncie rzeczy tylko abstrakcyjny przestrzenny element punktu, który — bez naocznego ujęcia, bez możliwości zmierzenia i nazwania — stanowi wyłącznie ośrodek relacji. Linia prosta jest dla Greka mierzalną krawędzią, dla nas zaś bezgranicznym kontinuum punktów. Leibniz podaje jako przykład swej zasady infinitezymalnej linię prostą, która przedstawia graniczny przypadek okręgu o nieskończenie wielkim promieniu, podczas gdy punkt stanowi inny przypadek graniczny. Dla Greków jednak okrąg jest płaszczyzną, i problem polega na tym, by sprowadzić ją do współmiernej postaci. Tak więc klasycznym problemem granicznym dla antycznego umysłu stała się kwadratura koła. Dla nas przeobraziło się to w mało znaczącą procedurę, polegająca na przedstawianiu liczby *n* za pomocą środków algebraicznych, przy czym nie ma już w ogóle mowy o konstrukcjach geometrycznych.
>
> Matematyk starożytny zna tylko to, co widzi i uchwytuje. Tam, gdzie ustaje ograniczona i ograniczająca widzialność — temat jego procesów myślowych — jego wiedza dobiega kresu. Matematyk zachodni — skoro tylko, uwolniwszy się od „uprzedzeń" Starożytności, rozpoznał własną tożsamość — zapuszcza się w całkowicie abstrakcyjny region nieskończonej liczbowej różnorodności o *n,* już nie 3 wymiarach, w obrębie której *jego* tak zwana geometria może i przeważnie musi obejść się bez jakiejkolwiek pomocy naoczności.
>
> Tak więc Starożytność stała się stopniowo z wewnętrzną koniecznością kulturą „małego". Dusza

26 Właściwie jednak Rāmānujan był wielkim współczesnym matematykiem indyjskim, a nie europejskim – jego dzieła są znacznie bliższe matematyce kultury indyjskiej niż europejskiej.

apollińska usiłowała zaczarować sens tego, co się stało, przez zasadę ogarnialnej wzrokiem granicy; jej „tabu” ześrodkowywało się na bezpośredniej obecności i bliskości tego, co obce. To, co dalekie, niewidzialne, tym samym nie istniało. Jak greka nie miała terminu na oznaczenie przestrzeni — będziemy jeszcze wielokrotnie śledzić przemożną symbolikę takich fenomenów językowych — tak też brakuje Grekom naszego poczucia krajobrazu, poczucia horyzontu, widoków, dali, obłoków, a także pojęcia ojczyzny, która się daleko rozpościera i ogarnia wielki naród. Antyczna świątynia, dająca się objąć jednym rzutem oka, jest najmniejszym z wszystkich klasycznych typów budowli. Geometria od Archytasa aż do Euklidesa zajmuje się — jak czyni to jeszcze dzisiaj podległa jej wpływom geometria szkolna — małymi, poręcznymi figurami i ciałami, nie dostrzegając tym samym trudności, jakie wyłaniają się przy pierwszoplanowym uwzględnianiu figur o wymiarach astronomicznych, co nie pozwala już stosować wszędzie geometrii euklidesowej. W przeciwnym razie subtelny duch attycki miałby zapewne już wtedy jakieś przeczucie problemu geometrii nieeuklidesowych, gdyż zarzuty przeciw znanemu aksjomatowi równoległych[6], którego wątpliwe, a przecież nie ulepszalne sformułowanie bardzo wcześnie wzbudzało zdecydowany sprzeciw, ocierały się prawie o to decydujące odkrycie. O ile dla myśli starożytnej oczywiste było wyłączne zajmowanie się „bliskim i małym”, o tyle równie oczywiste jest dla naszej umysłowości rozważanie tego, co nieskończone, co przekracza granice wzroku. Wszystkie koncepcje matematyczne, odkryte czy zapożyczone przez Zachód, zostały ewidentnie podporządkowane infinitezymalnej mowie form, i to na długo przedtem, zanim odkryto właściwy rachunek różniczkowy. Algebra arabska, indyjska trygonometria, starożytna mechanika zostały bezceremonialnie wcielone do analizy. Można do pewnego stopnia traktować geometrię algebraicznie albo też algebrę geometrycznie, to znaczy wyeliminować wzrok lub pozwolić mu panować. To pierwsze jest naszym dziełem, to drugie uczynili Grecy. Archimedes, który w swych efektownych obliczeniach spirali dotyka pewnych faktów ogólnych, stanowiących także podstawę metody całki oznaczonej u Leibniza, podporządkowuje natychmiast swą — z pozoru nader nowoczesną procedurę badawczą — zasadom stereometrii. Matematyk indyjski znalazłby z całą oczywistością w podobnym przypadku jakieś sformułowanie trygonometryczne[27].

Z fundamentalnego przeciwieństwa liczb antycznych i zachodnich wynika równie dogłębne przeciwieństwo stosunku, w jakim stoją do siebie elementy każdego z tych liczbowych światów. Stosunek wielkości zwie się *proporcją,* stosunek relacji zawiera się w pojęciu *funkcji.* Oba terminy mają — wykraczając poza dziedzinę matematyki — ogromne znaczenie dla techniki dwu pokrewnych z nią sztuk: rzeźby oraz muzyki. Jeśli abstrahujemy całkowicie od sensu, jaki posiada termin „proporcja” dla rozczłonkowania osobnego posągu, to właśnie typowe dla Starożytności artystyczne formy posągu, reliefu i fresku pozwalają na powiększanie i pomniejszanie skali — słowa te zaś nie mają żadnego w ogóle sensu dla muzyki. Natomiast w obrębie teorii funkcji decydujące znaczenie ma pojęcie *transformacji grup,* i muzyk potwierdzi, że analogiczne formacje i stanowią istotną część nowożytnych teorii kompozycji. Wspomnę i tu tylko o jednej z najbardziej wyszukanych form instrumentalnych XVIII wieku *„tema con variazioni”.*

Każda proporcja zakłada stałość, każda transformacja zakłada zmienność elementów; porównajmy tu twierdzenie o przystawaniu trójkątów w ujęciu Euklidesa, którego dowód opiera się faktycznie na naocznym stosunku 1:1, z nowożytnym ich wyprowadzaniem za pomocą funkcji kątowych (trygonometrycznych).

Konstrukcja — która w szerszym znaczeniu obejmuje wszystkie metody elementarnej arytmetyki —jest *alfą i omegą* matematyki starożytnej: jest to sporządzanie osobnej i naocznej figury. Każda *konstrukcja* potwierdza, każda zaś *operacja* neguje to, co widoczne — pierwsza bowiem uwydatnia dane optyczne, druga natomiast je unieważnia. I tak rysuje się dalsze przeciwieństwo obu tych rodzajów procedury matematycznej: starożytna matematyka „małego” rozważa konkretne pojedyncze przypadki, rozwiązuje liczbowo określone zadania, wykonuje jednorazową konstrukcję. Matematyka „nieskończonego” traktuje o całych klasach możliwości formalnych, grupach funkcji, operacjach, równaniach, krzywych, i to wcale nie w odniesieniu do jakiegokolwiek rezultatu, lecz mając na względzie ich przebieg. W ten sposób powstała w ciągu ostatnich dwu stuleci — z czego dzisiejsi matematycy nie zdają sobie przeważnie sprawy — *idea ogólnej morfologii operacji matematycznych,* którą można określić jako właściwą treść całej nowożytnej matematyki. Ujawnia się tu szeroko zakrojona tendencja zachodniej duchowości, która ze strony na stronę będzie się coraz bardziej uwyraźniać —

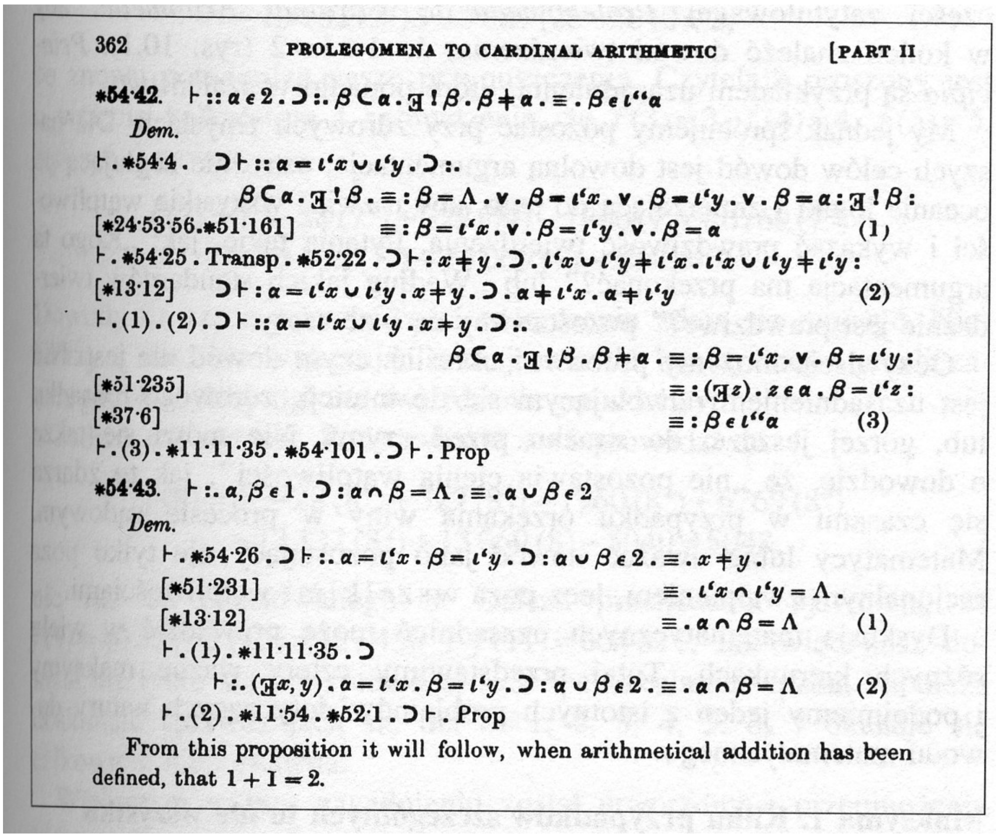
27 Nie sposób już dzisiaj ustalić, jaka część znanej nam indyjskiej matematyki powstała w dawnej, tj. przedbuddyjskiej epoce. (przyp. autora)

tendencja, będąca wyłączną własnością ducha faustowskiego i jego kultury, nie znajdująca żadnych pokrewieństw w innych kulturach. Przeważająca większość kwestii zaprzątających naszą matematykę jako jej specyficzne problemy — odpowiednio do kwadratury koła u Greków — jak na przykład analiza kryteriów konwergencji nieskończonych szeregów (Cauchy) lub transformacja eliptycznych i ogólnoalgebraicznych całek w funkcje wielokrotno-periodyczne (Abel, Gauss), wydałaby się „starożytnym", którzy poszukiwali zwykłych określonych wielkości jako rezultatów, pomysłową, nieco dziwaczną igraszką myślową. Pokrywałoby się to zresztą dokładnie z dzisiejszymi zapatrywaniami szerszych kręgów społeczeństwa.

O. Spengler, 1917, *Zmierzch zachodu*, Monachium
(przeł. J. Marzęcki, Warszawa 2001)
fragmenty rozdziału O znaczeniu liczb

Post scriptum

Zawarty w niniejszym tekście dowód równości 2 + 2 = 4 jest nieco uproszczony. Dla osób zainteresowanych bezwzględną matematyczną precyzją przytaczamy dowód tego że 1 + 1 = 2, podany przez Bertranda Russella i Alfreda N. Whiteheada w pracy *Principia Mathematica* (1913).


362 **PROLEGOMENA TO CARDINAL ARITHMETIC** [PART II

***54·42.** $\vdash :: \alpha \in 2 . \supset :. \beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \beta \neq \alpha . \equiv . \beta \in \iota``\alpha$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}4 . \quad \supset \vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y . \supset :.$

$\beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \equiv : \beta = \Lambda . \vee . \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y . \vee . \beta = \alpha : \exists ! \beta :$

[*24·53·56.*51·161] $\equiv : \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y . \vee . \beta = \alpha$ (1)

$\vdash . *54{\cdot}25 . \mathrm{Transp} . *52{\cdot}22 . \supset \vdash : x \neq y . \supset . \iota`x \cup \iota`y \neq \iota`x . \iota`x \cup \iota`y \neq \iota`y :$

[*13·12] $\supset \vdash : \alpha = \iota`x \cup \iota`y . x \neq y . \supset . \alpha \neq \iota`x . \alpha \neq \iota`y$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y . x \neq y . \supset :.$

$\beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \beta \neq \alpha . \equiv : \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y :$

[*51·235] $\equiv : (\exists z) . z \in \alpha . \beta = \iota`z :$

[*37·6] $\equiv : \beta \in \iota``\alpha$ (3)

$\vdash . (3) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . *54{\cdot}101 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***54·43.** $\vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

[*51·231] $\equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$

[*13·12] $\equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda$ (1)

$\vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda$ (2)

$\vdash . (2) . *11{\cdot}54 . *52{\cdot}1 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

Bibliografia

1. Carl Boyer, *Historia rachunku różniczkowego i całkowego i rozwój jego pojęć*, Warszawa 1964.
2. Stefan Kulczycki, *Z dziejów matematyki greckiej*, Warszawa 1973.
3. Nicolas Bourbaki, *Elementy historii matematyki*, Warszawa 1980.
4. Marek Kordos, *Historia matematyki*, Warszawa 1994.
5. Witold Więsław, *Matematyka i jej historia*, Opole 1997.
6. Oswald Spengler, *Zmierzch zachodu*, Warszawa 2001.
7. Mariusz Wodzicki, *A summary of muslim mathematics,* Berkeley 2005.
8. David Joyce, *History of mathematics*, http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/mathhist.
9. Joseph Leichter, *Mathematics and Mathematical Astronomy*, http://www.wilbourhall.org.
10. *The MacTutor History of Mathematics archive*, http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history.