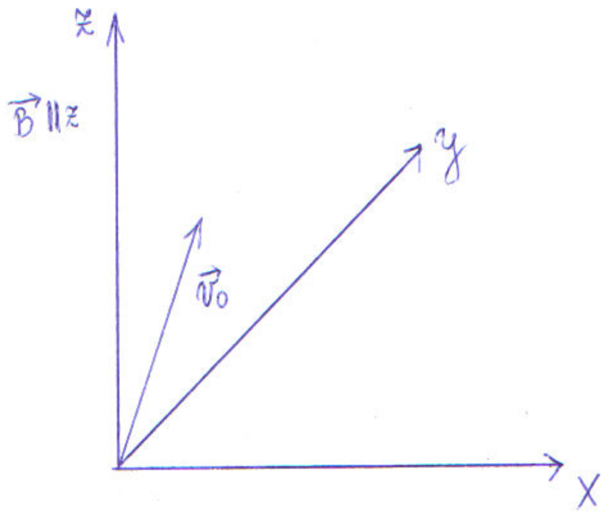
Mechanika klasyczna
Zestaw zadań domowych nr 1 – Rozwiązania

12 listopada 2008

1. Cząstka o ładunku q i masie m porusza się w jednorodnym polu magnetycznym $\vec{B}$. W czasie $t_0 = 0$ cząstka znajduje się w punkcie $\vec{r}(t_0) = 0$ i ma prędkość początkową równą v_0. Znaleźć tor cząstki, prędkość i przyspieszenie.

   Wskazówka:
   Wygodnie jest wybrać układ odniesienia w taki sposób, że oś z jest równoległa do kierunku pola magnetycznego i prędkość początkowa leży w płaszczyźnie xz.



Rys.1

Rozwiązanie:
Równanie Newtona:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \qquad gdzie \quad \vec{B} = (0, 0, B)$$

$$\ddot{x} = \omega\dot{y} \qquad x(0) = 0 \qquad \dot{x}(0) = v_{0x} \tag{1}$$

$$\ddot{y} = -\omega\dot{x} \qquad y(0) = 0 \qquad \dot{y}(0) = 0 \tag{2}$$

$$\ddot{z} = 0 \qquad z(0) = 0 \qquad \dot{z}(0) = v_{0z} \tag{3}$$

$$\omega \equiv \frac{qB}{m}$$

Całkując równanie (3) otrzymujemy: $z(t) = v_{0z}t$.
Mnożąc równianie (2) przez i oraz dodając równianie (1) mamy:

$$\ddot{z} + i\ddot{y} = -\omega i(\dot{x} + i\dot{y})$$

Wprowadzamy nową zmienną: $\xi(t) = \dot{x} + i\dot{y}$

$$\xi(0) = v_{0x}$$

$$\dot{x}(t) = Re\xi(t) \qquad \dot{y}(t) = Im\xi(t)$$

$$\dot{\xi} = -\omega i\xi$$

$$\xi(t) = Ce^{-i\omega t} \quad \Rightarrow \quad C = v_{0x} \quad \Rightarrow \xi(t) = v_{0x}e^{-i\omega t}$$

$$\dot{x}(t) = v_{0x}\cos(\omega t) \qquad \dot{y}(t) = -v_{0x}\sin(\omega t)$$

$$x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega}\sin(\omega t) + C_1 \qquad x(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$y(t) = \frac{v_{0x}}{\omega}\cos(\omega t) + C_2 \qquad y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{v_{0x}}{\omega}$$

Zatem:

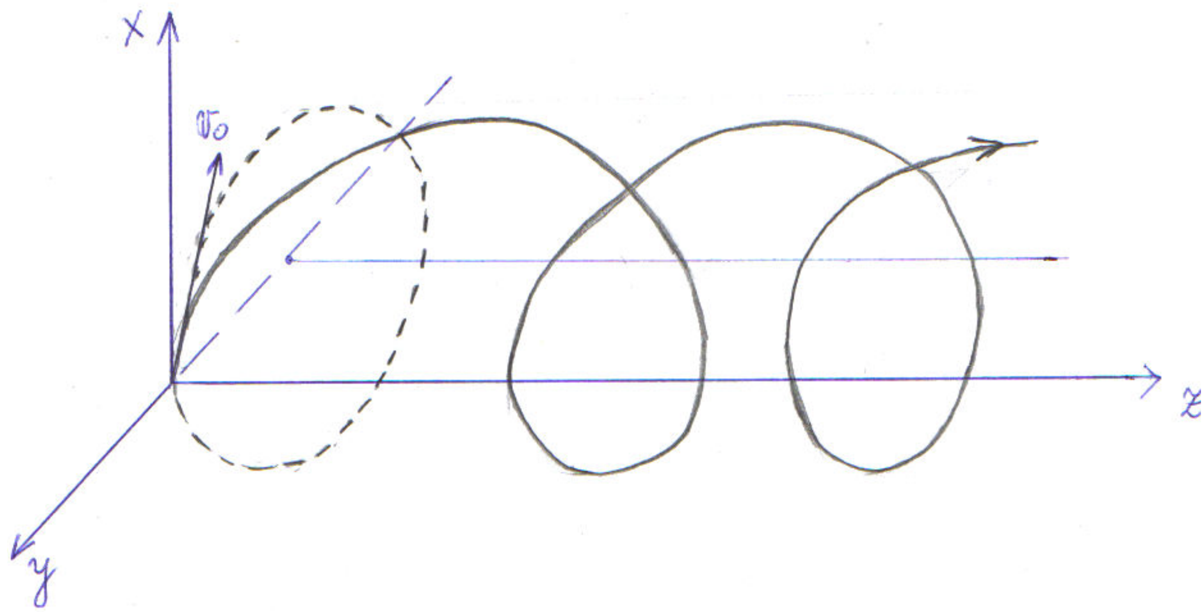
$$x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega}\sin(\omega t)$$

$$y(t) = \frac{v_{0x}}{\omega}(\cos(\omega t) - 1)$$

$$z(t) = v_{0z}t$$

$$x^2 + (y + \frac{v_{0x}}{\omega})^2 = (\frac{v_{0x}}{\omega})^2$$

Jest to równanie dla okręgu o środku w punkcie $(0, -\frac{v_{0x}}{\omega})$ i promieniu $\frac{v_{0x}}{\omega}$.



Rys.2

$$\vec{v} = (v_{0x}\cos(\omega t), -v_{0x}\sin(\omega t), v_{0z})$$

$$v = \sqrt{(v_{0x}^2 + v_{0z}^2)} = v_0 \qquad \dot{v} = 0$$

$$\vec{a} = (-\omega v_{0x}\sin(\omega t), -\omega v_{0x}\cos(\omega t), 0)$$

$$a = \omega v_{0x} \qquad \vec{a} \perp \vec{v}$$

2. Biedronka porusza się po krzywej, która we współrzędnych kartezjańskich jest opisana następująco:

$$x(t) = v_0 t\cos(\omega t), \quad y(t) = v_0 t\sin(\omega t), \quad z(t) = 0, \quad v_0 > 0, \quad \omega > 0.$$

   a) Narysować krzywą, po której porusza się biedronka.
   b) Obliczyć prędkość i przyspieszenie.
   c) Znaleźć krzywiznę i skręcenie krzywej.
   d) Zakładając, że biedronka porusza się od chwili $t = 0$ do chwili $t = T$ obliczyć długość przebytej w czasie T drogi.

Rozwiązanie:

a)

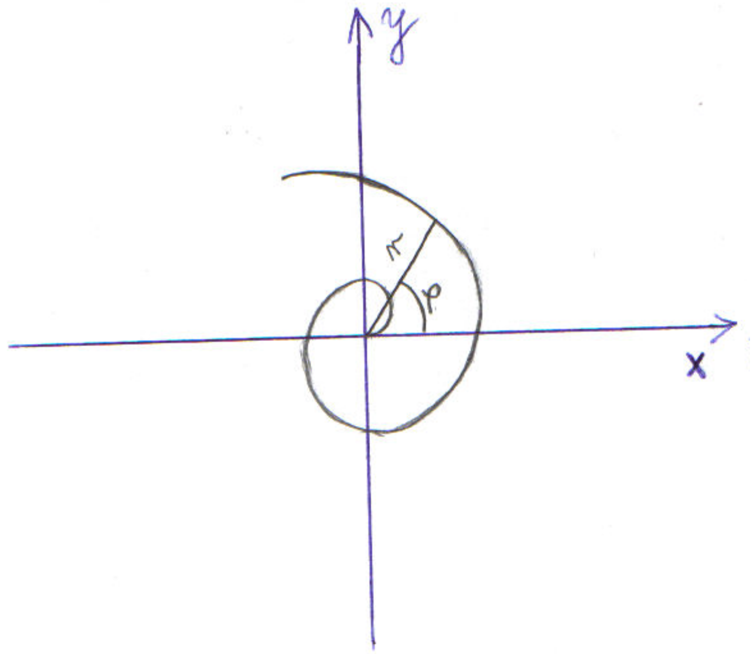
$$x(t) = v_0 t\cos(\omega t) \qquad x^2 = v_0^2 t^2\cos^2(\omega t)$$

$$y(t) = v_0 t\sin(\omega t) \qquad y^2 = v_0^2 t^2\sin^2(\omega t)$$

$$z(t) = 0$$

$$x^2 + y^2 = v_0^2 t^2 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{v_0}$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{\omega}{v_0}\sqrt{x^2+y^2}$$



Rys.3

$$\phi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \omega t$$

$$r = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = v_0 t$$

b)

$$\vec{v} = (v_0\cos(\omega t) - v_0\omega t\sin(\omega t), v_0\sin(\omega t) + v_0\omega t\cos(\omega t), 0)$$

$$\vec{a} = (-2v_0\omega\sin(\omega t) - v_0\omega^2 t\cos(\omega t), 2v_0\omega\cos(\omega t) - v_0\omega^2 t\sin(\omega t), 0)$$

$$v = v_0\sqrt{1+\omega^2 t^2}$$

$$a = v_0\omega\sqrt{4+\omega^2 t^2}$$

c) Możemy skorzystać ze wzoru na krzywiznę i skręcenie, wyprowadzonego w zadaniu 3:

$$K = \frac{1}{v^3}\sqrt{v^2a^2 - (\vec{v}\vec{a})^2}$$

$$\vec{v}\vec{a} = v_x a_x + v_y a_y = v_0^2\omega^2 t$$

$$K = \frac{\omega(2+\omega^2 t^2)}{v_0(1+\omega^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Promień krzywizny zatem wyraża się:

$$\rho = \frac{1}{K} = \frac{v_0(1+\omega^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}{\omega(2+\omega^2 t^2)}$$

Wzór na skręcenie możemy zapisać jako:

$$w = \frac{1}{K^2}\frac{1}{v^6}(\vec{v}\times\vec{a})\frac{d\vec{a}}{dt}$$

Wektor $\vec{v}\times\vec{a}$ ma formę: $(0, 0, f(t))$, natomiast wektor $\frac{d\vec{a}}{dt}$: $(g_1(t), g_2(t), 0)$.
Zatem $(\vec{v}\times\vec{a})\frac{d\vec{a}}{dt} = 0$.
Skręcenie w każdym punkcie krzywej jest równe 0.

d) Składowa styczna przyspieszenia:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = v_0\frac{\omega^2 t}{\sqrt{1+\omega^2 t^2}}$$

Składowa normalna przyspieszenia:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = Kv^2 = \frac{v_0\omega(2+\omega^2 t^2)}{\sqrt{1+\omega^2 t^2}}$$

Składową a_n można takze znaleźć z wyrażenia:

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

,
wtedy krzywiznę można zapisać jako:

$$K = \frac{a_n}{v^2}$$

Droga przebyta od $t_0 = 0$ do T wynosi:
$S = \int_0^T vdt = v_0\int_0^T \sqrt{1+\omega^2 t^2}dt = v_0\omega\int_0^T \sqrt{\frac{1}{\omega^2}+t^2}dt = v_0\omega[\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{\omega^2}+t^2} + \frac{1}{2\omega^2 \operatorname{arc\,sin}(\omega t)}]_0^T = \frac{v_0\omega}{2}[\sqrt{\frac{1}{\omega^2}+T^2}T + \frac{1}{\omega^2 \operatorname{arc\,sin}(\omega t)}]$

3. Wyznaczyć krzywiznę i skręcenie krzywej danej parametrycznym równaniem $\vec{r} = \vec{r}(t)$ przez $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ oraz $\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}$, a także długości tych wektorów.

   Rozwiązanie:
   Krzywizna:

$$K := \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|$$

$$K = \mid \frac{d\vec{T}}{ds} \mid = \sqrt{\frac{d\vec{T}}{ds}\frac{d\vec{T}}{ds}}$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{v}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{T}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{v}\frac{d\vec{T}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{v}\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{1}{v}\frac{d}{dt}(\frac{\vec{v}}{v}) = \frac{1}{v}((-\frac{1}{v^2})\frac{dv}{dt}\vec{v} + \frac{1}{v}\frac{d\vec{v}}{dt}) = \frac{-\frac{dv}{dt}}{v^3}\vec{v} + \frac{1}{v^2}\vec{a}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds}\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{(\frac{dv}{dt})^2}{v^6}v^2 + \frac{a^2}{v^4} - \frac{2\frac{dv}{dt}}{v^5}\vec{v}\vec{a}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{\vec{v}\vec{v}} = \frac{(\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v})}{2\sqrt{\vec{v}\vec{v}}} = \frac{\vec{v}\vec{a}}{v}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds}\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{(\vec{v}\vec{a})^2}{v^6} + \frac{a^2}{v^4} - \frac{2(\vec{v}\vec{a})^2}{v^6} = \frac{1}{v^6}(v^2a^2 - (\vec{v}\vec{a})^2)$$

Ostatecznie krzywiznę zapisujemy jako:

$$K = \frac{1}{v^3}\sqrt{v^2a^2 - (\vec{v}\vec{a})^2}$$

Skręcenie (torsja) :

$$w := \frac{1}{K^2}(\frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{d^2\vec{r}}{ds^2})\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{v}\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d}{ds}(\frac{d\vec{r}}{ds}) = \frac{d}{ds}(\frac{\vec{v}}{v}) = \frac{1}{v}\frac{d}{dt}(\frac{\vec{v}}{v}) = \frac{1}{v^2}\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{1}{v^3}\frac{dv}{dt}\vec{v} = \frac{\vec{a}}{v^2} - \frac{1}{v^3}\frac{dv}{dt}\vec{v}$$

$\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = \frac{d}{ds}(\frac{1}{v^2}\vec{a} - \frac{1}{v^3}\frac{dv}{dt}\vec{v}) = \frac{1}{v}\frac{d}{dt}(\frac{\vec{a}}{v^2} - \frac{1}{v^3}\frac{dv}{dt}\vec{v}) = \frac{1}{v}\frac{d}{dt}(\frac{1}{v^2})\vec{a} + \frac{1}{v^3}\frac{d\vec{a}}{dt} - \frac{1}{v}\frac{d}{dt}(\frac{1}{v^3}\frac{dv}{dt})\vec{v} - \frac{1}{v^4}\frac{dv}{dt}\frac{d\vec{v}}{dt} = \alpha(t)\vec{v} + \beta(t)\vec{a} + \frac{1}{v^3}\frac{d\vec{a}}{dt}$

gdzie:

$$\alpha(t) := -\frac{1}{v}\frac{d}{dt}(\frac{1}{v^3}\frac{dv}{dt})$$

$$\beta(t) := \frac{1}{v}\frac{d}{dt}(\frac{1}{v^2}) - \frac{1}{v^4}\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{\vec{v}}{v} \times (\frac{\vec{a}}{v^2} - \frac{1}{v^3}\frac{dv}{dt}\vec{v}) = \frac{1}{v^3}\vec{v}\vec{a}$$

$$(\frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{d^2\vec{r}}{ds^2})\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = (\frac{1}{v^3}\vec{v} \times \vec{a})(\alpha\vec{v} + \beta\vec{a} + \frac{1}{v^3}\frac{d\vec{a}}{dt}) = \frac{1}{v^6}(\vec{v} \times \vec{a})\frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{\alpha}{v^3}(\vec{v} \times \vec{a})\vec{v} + \frac{\beta}{v^3}(\vec{v} \times \vec{a})\vec{a}$$

Ostatecznie skręcenie zapisujemy jako:

$$w = \frac{1}{K^2}(\frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{d^2\vec{r}}{ds^2})\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = \frac{1}{K^2}\frac{1}{v^6}(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2})\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}$$

4. Pokazać, że siła $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}$ jest zachowawcza i obliczyć potencjał dla $f(r) = -ar^2$ (założyć, że potencjał w początku układu współrzędnych jest równy 0). Czy siła $\vec{F}(\vec{r}) = h(\vec{r})\vec{r}$ jest zachowawcza?

Rozwiązanie:

$$\nabla\times[f(r)\vec{r}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} xf(r) \\ yf(r) \\ zf(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial[zf(r)]}{\partial y} - \frac{\partial[yf(r)]}{\partial z} \\ \frac{\partial[xf(r)]}{\partial z} - \frac{\partial[zf(r)]}{\partial x} \\ \frac{\partial[yf(r)]}{\partial x} - \frac{\partial[xf(r)]}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z\partial[f(r)]}{\partial y} - y\frac{\partial[f(r)]}{\partial z} \\ \frac{x\partial[f(r)]}{\partial z} - z\frac{\partial[f(r)]}{\partial x} \\ \frac{y\partial[f(r)]}{\partial x} - x\frac{\partial[f(r)]}{\partial y} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial f(r)}{\partial r} \begin{pmatrix} \frac{z\partial r}{\partial y} - y\frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{x\partial r}{\partial z} - z\frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{y\partial r}{\partial x} - x\frac{\partial r}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siła postaci: $\vec{F} = f(\vec{r})\vec{r}$ nie jest zachowawcza, gdyż:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial y} = \frac{y}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

Potencjał siły $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}$:

$V(\vec{r}) = V(\vec{r}) - V(0) = \int_0^{\vec{r}} \nabla V(\vec{r'})d\vec{r'} = -\int_0^{\vec{r}} F(\vec{r'})d\vec{r'} = \int_0^{\vec{r}} \alpha r'^2\vec{r'}d\vec{r'} = \int_0^{r} \alpha r'^3 dr' = \frac{\alpha}{4}r^4$, ponieważ $\vec{r'}$ jest równoległy do $d\vec{r'}$.