Rozwiązania II serii zadań z mechaniki klasycznej

Zadanie 1.

a) Niech walec toczy się po płaszczyźnie xy i niech będzie on równoległy do osi y. Każdy punkt walca może być opisany jako $x = u + R\cos(\varphi - \varphi_0)$, $y = v - v_0$, $z = R(1 + \sin(\varphi - \varphi_0))$, gdzie niezależnymi współrzędnymi są u, v i φ (zakładamy, że walec jest pusty w środku, różne parametry v_0 i φ_0 odpowiadają różnym punktom walca).

b) Przykładową parametryzacją jest: $x = u\cos\omega t$, $y = u\sin\omega t$, niezależną współrzędną jest wtedy u.

c) Niech punkt zaczepienia wahadła oscyluje wokół początku układu współrzędnych ustawionego tak, że oś x jest pozioma, zaś oś y skierowana jest w górę. Ruch końca wahadła możemy wtedy sparametryzować przez $x = a\cos\omega t + \ell\sin\varphi$, $y = -\ell\cos\varphi$, gdzie niezależną współrzędną jest φ. Równanie więzów można wtedy zapisać jako $(x - a\cos\omega t)^2 + y^2 - \ell^2 = 0$.

d) Przykładowa parametryzacja to $x = R\cos\varphi\sin\theta$, $y = R\sin\varphi\sin\theta$, $z = R\cos\theta$, niezależnymi współrzędnymi są wtedy θ i φ.

e) Przykładową parametryzacją jest $x = \frac{1}{2}at^2 + u\cos\alpha$, $y = u\sin\alpha$, niezależna współrzędna to u.

Zadanie 2. Wybierzmy układ współrzędnych w następujący sposób: spód równi pokrywa się z osią x, zaś oś y skierowana jest pionowo w górę i leży na niej wierzchołek równi, dzieląc spód równi na odcinki długości a i b spełniające związek $h = a\,\mathrm{tg}\alpha = b\,\mathrm{tg}\beta$. Zauważmy, że h jest dowolnym ustalonym parametrem. Niech (x_1, y_1) i (x_2, y_2) oznaczają odpowiednio położenie masy m_1 i m_2. Równania więzów możemy zapisać jako:

$$g_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = y_1\cos\alpha - x_1\sin\alpha - a\sin\alpha = 0 \quad (1)$$
$$g_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = y_2\cos\beta + x_1\sin\beta - b\sin\beta = 0 \quad (2)$$
$$g_3(x_1, y_1, x_2, y_2) = x_2\cos\alpha - x_1\cos\beta - \ell\cos\alpha\cos\beta = 0\,. \quad (3)$$

Równania ruchu to:

$$m_1\ddot{x}_1 = Z_{1x} \quad (4)$$
$$m_1\ddot{y}_1 = -m_1 g + Z_{1y} \quad (5)$$
$$m_2\ddot{x}_2 = Z_{2x} \quad (6)$$
$$m_2\ddot{y}_2 = -m_2 g + Z_{2y}\,. \quad (7)$$

Siły reakcji wyrażają sie wzorem $Z_A = \sum_{\gamma=1}^{3}\lambda_\gamma\frac{\partial g_\gamma}{\partial q_A}$, gdzie $A = 1x, 1y, 2x, 2y$ oraz $q_A = x_1, y_1, x_2, y_2$. Zatem:

$$Z_{1x} = -\lambda_1\sin\alpha - \lambda_3\cos\beta \quad (8)$$
$$Z_{1y} = \lambda_1\cos\alpha \quad (9)$$
$$Z_{2x} = \lambda_2\sin\beta + \lambda_3\cos\alpha \quad (10)$$
$$Z_{2y} = \lambda_2\cos\beta\,. \quad (11)$$

Równania Lagrange'a pierwszego rodzaju to:

$$m_1\ddot{x}_1 = -\lambda_1 \sin\alpha - \lambda_3 \cos\beta \tag{12}$$
$$m_1\ddot{y}_1 = \lambda_1 \cos\alpha - m_1 g \tag{13}$$
$$m_2\ddot{x}_2 = \lambda_2 \sin\beta + \lambda_3 \cos\alpha \tag{14}$$
$$m_2\ddot{y}_2 = \lambda_2 \cos\beta - m_2 g\,. \tag{15}$$

Różniczkując dwukrotnie względem czasu każde z równań więzów (1)-(3), otrzymujemy:

$$\ddot{y}_1 \cos\alpha - \ddot{x}_1 \sin\alpha = 0 \tag{16}$$
$$\ddot{y}_2 \cos\beta + \ddot{x}_2 \sin\beta = 0 \tag{17}$$
$$\ddot{x}_2 \cos\alpha - \ddot{x}_1 \cos\beta = 0\,. \tag{18}$$

Podstawiając równania (12)-(15) do związków (16)-(18), wyznaczamy mnożniki Lagrange'a:

$$\lambda_1 = m_1 g \left(\cos\alpha + \frac{m_2}{m_1+m_2}(\sin\alpha + \sin\beta)\mathrm{tg}\alpha\right) \tag{19}$$
$$\lambda_2 = m_2 g \left(\cos\beta + \frac{m_1}{m_1+m_2}(\sin\alpha + \sin\beta)\mathrm{tg}\beta\right) \tag{20}$$
$$\lambda_3 = -\frac{m_1 m_2 g}{m_1+m_2}\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\,. \tag{21}$$

Podstawiając wyniki (19)-(21) do (8)-(11) wyznaczamy związki między składowymi sił reakcji, a podstawiając je do (12)-(15), otrzymujemy równania ruchu. Zasada d'Alemberta przybiera w opisywanym przypadku postać:

$$\sum_{i=1}^{2} m_i \left[\ddot{x}_i \delta x_i + (\ddot{y}_i + g)\delta y_i\right] = 0\,. \tag{22}$$

Wybierając x_1 jako niezależną współrzędną i wyrażając pozostałe przy pomocy więzów (1)-(3), otrzymujemy:

$$\left[m_1\ddot{x}_1 + m_1\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ddot{x}_1 + g\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + m_2\frac{\cos^\beta}{\cos^2\alpha} + m_2\left(\frac{\cos^2\beta}{\cos\alpha\sin\beta} - g\right)\frac{\cos^2\beta}{\cos\alpha\sin\beta}\right]\delta x_1 = 0\,. \tag{23}$$

Przyrównując do zera współczynnik przy δx_1, otrzymujemy równanie ruchu dla niezależnej współrzędnej x_1. Równania ruchu dla pozostałych współrzędnych uzyskujemy, podstawiając wynik na $\ddot{x}_1$ do zróżniczkowanych dwukrotnie względem czasu równań więzów, które wypisaliśmy uprzednio jako równania (16)-(18).

Zadanie 3. Oznaczmy współrzędne pierwszego i drugiego końca wahadła odpowiednio przez (x_1, y_1) i (x_2, y_2). Równania ruchu to:

$$m_1\ddot{x}_1 = Z_{1x} \tag{24}$$
$$m_1\ddot{y}_1 = -m_1 g + Z_{1y} \tag{25}$$
$$m_2\ddot{x}_2 = Z_{2x} \tag{26}$$
$$m_2\ddot{y}_2 = -m_2 g + Z_{2y}\,. \tag{27}$$

Więzy nałożone na układ uwzględniamy, wyrażając współrzędne końców wahadła przy pomocy niezależnych współrzędnych x i φ, opisujących odpowiednio położenie końca wahadła ślizgającego się po osi x oraz odchylenie wahadła od pionu, w następujący sposób: $x_1 = x$, $y_1 = 0$, $x_2 = x + \ell\sin\varphi$, $y_2 = -\ell\cos\varphi$.

Równania ruchu (24)-(27) możemy wtedy przepisać jako:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x} &= Z_{1x} && (28)\\ m_1 g &= Z_{1y} && (29)\\ m_2(\ddot{x} + \ell\ddot{\varphi}\cos\varphi - \ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi) &= Z_{2x} && (30)\\ m_2(\ell\ddot{\varphi}\sin\varphi + \ell\dot{\varphi}^2\cos\varphi + g) &= Z_{2y}\,. && (31) \end{aligned}$$

Ponieważ w kierunku x nie działają żadne siły zewnętrzne, mamy

$$Z_{1x} + Z_{2x} = 0\,. \tag{32}$$

Jedyne siły reakcji działające na masę m_2 są przekazywane przez pręt wahadła, toteż:

$$Z_{2x}\cos\varphi + Z_{2y}\sin\varphi = 0\,. \tag{33}$$

Równania (29), (32) i (33) podają związki między składowymi sił reakcji. Dodając równanie (30) pomnożone przez $\cos\varphi$ oraz równanie (31) pomnożone przez $\sin\varphi$ i wykorzystując związek (33), otrzymujemy:

$$\ddot{x}\cos\varphi + \ell\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0\,. \tag{34}$$

Doadając równania (28) oraz (30) i wykorzystując związek (32), otrzymujemy:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2\ell(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) = 0\,. \tag{35}$$

Równania (34) i (35) są równaniami ruchu dla niezależnych współrzędnych x i φ.

Zadanie 4. Równania więzów możemy zapisać jako:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \text{const} && (36)\\ x_3 + x_4 - 2x_2 &= \text{const}\,. && (37) \end{aligned}$$

Zasadę d'Alemberta możemy tu zapisać jako:

$$\sum_{i=1}^{4} m_i(\ddot{x}_i - g)\cdot\delta x_i = 0\,. \tag{38}$$

Możemy wybrać x_1 i x_3 jako niezależne współrzędne i przepisać (38), wykorzystując (36) i (37):

$$[m_1(\ddot{x}_1 - g) + m_2(\ddot{x}_2 + g) + 2m_4(2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_3 + g)]\,\delta x_1 + [m_3(\ddot{x}_3 - g) + m_4(2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_3 + g)]\,\delta x_3 = 0\,. \tag{39}$$

Ponieważ współczynniki przy δx_1 i δx_3 muszą być oba równe zeru, otrzymujemy stąd dwa równania ruchu na niezależne współrzędne x_1 i x_3. Stąd:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{m_1 - (m_3 + \mu_{34})}{m_1 + (m_3 + \mu_{34})}g\,, \qquad \text{gdzie} \qquad \mu_{34} = \frac{m_3 m_4}{m_3 + m_4} && (40)\\ \ddot{x}_3 &= \frac{(m_3 - m_4)(m_1 + m_2) - 2m_4(m_1 - m_2) + 4m_3m_4}{(m_3 + m_4)(m_1 + m_3) + 4m_3m_4}g\,. && (41) \end{aligned}$$

Wyrażenia na $\ddot{x}_2$ i $\ddot{x}_4$ otrzymujemy, podstawiając (40) i (41) do zróżniczkowanych dwa razy względem czasu związków (36) i (37).