V seria zadań domowych z Mechaniki klasycznej

data ukazania się: 12 styczeń 2009, termin oddania rozwiązań: 23 styczeń 2009

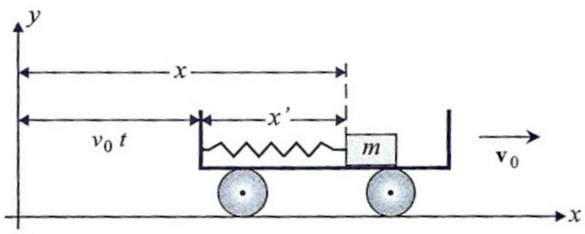
Zadanie 1.

Podać funkcję Hamiltona dla cząstki w potencjale V, używając zmiennych:

a) kartezjańskich (x,y,z)
b) cylindrycznych (r,φ,z)
c) sferycznych (r,φ,θ)

Zadanie 2.

Wagonik porusza się ze stałą prędkością $\vec{V}_0$ wzdłuż osi X jak pokazano na poniższym rysunku:



Na powierzchni wagonika znajduje się masa m połączona z jego ścianą sprężyną o stałej sprężystości k. Masa m porusza się bez tarcia, wykonując drgania. Długość nienaprężonej sprężyny wynosi l_0.

a) Podać funkcję Hamiltona dla powyższego problemu w spoczywającym układzie współrzędnych. Sprawdzić czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu i czy jest energią?
b) Wyznaczyć i zbadać funkcję Hamiltona powyższego układu używając zmiennych w poruszającym się układzie.
   Wskazówka. Dokonać transformacji (punktowej)

$$x = x' + V_0 t$$

   i użyć zmiennej x' w L i H.

Zadanie 3.

Znaleźć krzywą, której długość pomiędzy dwoma punktami P_1 i P_2 jest najkrótsza.
Rozważyć dwa punkty na:

a) płaszczyźnie
b) powierzchni cylindrycznej

Zadanie 4.

Rozważyć jednowymiarowy oscylator harmoniczny, dany przez lagranżjan:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{D}{2}x^2 \quad .$$

Pokazać, że działanie :

$$S = \int_0^{t_2} \left[\frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{D}{2}x^2 \right] dt$$

dla ruchu oscylatora danego przez zależność $x(t) = A\sin\omega t$, gdzie $\omega = \sqrt{D/m}$, nie przyjmuje ani minimalnej ani maksymalnej wartości, jeżeli t_2 jest większe niż połowa okresu drgań oscylatora $\left(t_2 \rangle \frac{T}{2} \right)$.

Wskazówka. Rozważyć trajektorie $\hat{x}(t) = x(t) + \varepsilon\eta(t)$, gdzie $\eta(0) = \eta(t_2) = 0$ w wyrażeniu na S i przeprowadzić całkowanie przez części. Zbadać człony proporcjonalne do ε^2 zakładając $\eta(t)$ w następującej postaci:

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{t_2} t \right),$$

gdzie b_k - dowolne stałe.