Warszawa, 15/16.X.2001
revisited 30.X.2001

Ryszard Kostecki

Badanie wahadeł sprzężonych

dedykowane Zuzi

(jakkolwiek późna pora i zmęczenie
nie sprzyja zarówno stanom mentalnym,
jak i высококачественныму include'owaniu literackiego języka do fizyki doświadczalnej)

I. Streszczenie

Celem tej pracy jest obserwacja wahadeł sprzężonych, weryfikacja przewidywań teoretycznych ich dotyczących, oraz wyznaczenie współczynnika sprężystości sprężyny.

II. Podstawy teoretyczne

W poniższej pracy będę korzystał z następujących oznaczeń:

- M - masa wahadła
- k - współczynnik sprężystości sprężyny
- a - odległość punktu zaczepienia sprężyny na wahadle od punktu zaczepienia wahadła
- g - wartość przyspieszenia ziemskiego (= 9.80665 m/s^2)
- pi - liczba rzeczywista (= 3.14159)
- r - odległość środka masy wahadła od punktu zaczepienia wahadła
- I - moment bezwładności wahadła
- T - okres drgań
- w - częstotliwość drgań
- t - czas
- f - początkowy kąt wychylenia wahadła
- m - masa dodana na szalkę
- d - wychylenie szalki spowodowane umieszczeniem na niej masy m,

oraz wzorów teoretycznych (bądź oczywistych, bądź też wyprowadzonych w skrypcie):

- dla warunków początkowych f1L(t=0)=f, f1P(t=0)=f, df1L/dt(t=0)=df1P/dt(t=0)=0 zachodzi: T1=2*pi/w1 [1]#
- dla warunków początkowych f2L(t=0)=f, f2P(t=0)=-f, df2L/dt(t=0)=df2P/dt(t=0)=0 zachodzi: T2=2*pi/w2 [2]
- dla warunków początkowych f\`L(t=0)=0, f\`P(t=0)=f, df\`L/dt(t=0)=df\`P/dt(t=0)=0 występują dudnienia i charakterystyczne okresy: T\`1 = 2*T1*T2/(T1+T2) [3], T\`2 = 2*T1*T2/(T1-T2) [4]
- w1^2 = M*g*r/I [5],
  oraz w2^2 = (M*g*r + 2*k*a^2)/I [6]
- z czego wynika, że: k = M*g*r*((w2/w1)^2-1)/2/a/a [7]
- k*d=g*m <=> k = g*m/d [8]

Jeżeli mamy dane powyższe wzory, to ze wzoru na propagację małych błędów (widocznego obok w postaci ogólnej) można wyprowadzić następujące zależności:

$$\Delta y = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x \right)^2}$$

- Δw = 2*pi* | ΔT/T^2 | [9]
- ΔT\`1 = 2*sqrt ((T2^4)*(ΔT1^2)+(T1^4)*(ΔT2^2))/(T1+T2)^2 [10]
- ΔT\`2 = 2*sqrt ((T2^4)*(ΔT1^2)+(T1^4)*(ΔT2^2))/(T1-T2)^2 [11]
- Δk = g*sqrt((Δm/d)^2+(m*Δd/d/d)^2) [12]
- $$\Delta k = \sqrt{\left(\frac{\Delta M * r}{2a^2} \left(\left(\frac{w2}{w1} \right)^2 - 1 \right) \right)^2 + \left(\frac{\Delta r * M}{2a^2} \left(\left(\frac{w2}{w1} \right)^2 - 1 \right) \right)^2 + \left(\frac{\Delta a * r * M}{a^3} \left(\left(\frac{w2}{w1} \right)^2 - 1 \right) \right)^2 + \left(\frac{\Delta w1 * r * M * w2^2}{a^2 * w1^3} \right)^2 + \left(\frac{\Delta w2 * r * M * w2}{a^2 * w1^2} \right)^2}$$ [13]

- nawiasami kwadratowymi dokonuję numeracji wzorów (aby się do nich później w sposób uproszczony odwoływać), zaś notacja fxP oznacza kąt wychylenia prawego wahadła w części doświadczenia związanej z wyznaczaniem Tx.

III. Opis układu doświadczalnego

W doświadczeniu użyłem dwóch identycznych wahadeł o masach M = (3000 +/- 40) g, sprężyny, stopera, taśmy mierniczej, zestawu odważników, a także nieokreślonej bliżej ilości nitki oraz gazu w zapalniczce.

Układ doświadczalny składał się z trzech części, jednej głównej i dwóch pomocniczych:

część główna (rys.1): część pomocnicza 1 (rys.2): część pomocnicza 2 (rys.2):

(na rysunkach zostały zaznaczone niektóre z wielkości charakterystycznych układu, zdefiniowanych w punkcie II.; oczywiście ruch wahadła odbywał się w płaszczyźnie rysunku)

IV. Przebieg doświadczenia

Część IV.0

Wpierw, w celu przekonania się o rzekomej identyczności wahadeł, dokonałem kilku pomiarów okresów wahań każdego z nich (mierzyłem oczywiście czas trwania 10 okresów, po czym dzieliłem go przez dziesięć). Okresy te okazały się być nierozróżnialnymi w obliczu błędu generowanego przez czas reakcji naciskającego stoper (czas reakcji = 0.2s), takowoż uznałem obydwa wahadła za równoważne sobie (a testowe okresy wahnięć wahadła lewego umieściłem w tabeli 1 w kolumnie I pod numerami 1 i 2, zaś prawego jako 3 i 4).

Część IV.I

Po tej zaprawie doświadczalnej przystąpiłem do pomiarów właściwych. Obrałem sobie jedno z tożsamych wzajemnie wahadeł i dlań mierzyłem czas 10 okresów jego wahnięć (aby zmniejszyć błąd pomiarowy wynikający z opóźnionej reakcji ręka-oko), po czym wyniki te (zapisane już jako czas trwania 1 okresu) umieściłem w tabelce 1 w kolumnie I). To wykonawszy, robotę tę powtórzyłem kilkakrotnie, aby ustrzec się przed zbytnim wpływem błędów grubych, acz i nie tylko...

Część IV.II

Po zakończeniu powyższych czynności założyłem sprężynę na obydwa wahadła w odległości a = (25 +/- 0.1) cm od punktu zaczepu każdego z nich, wychyliłem je (poniekąd jako czarę goryczy) obydwa do wewnątrz o nieduży kąt f (tak, by zachować sensowność przybliżenia małych drgań: sin f ≈ f), po czym ustabilizowałem związując nitką. W chwili t=0 przepaliłem nitkę płonącym gazem z zapalniczki jednocześnie (z dokładnością do czasu reakcji ręka-oko, oraz Szczególnej Teorii Względności (jakkolwiek mam świadomość faktu, iż błąd wynikający z tego pierwszego jest *nieco* istotniejszy)) uruchamiając stoper. Po dziesięciu okresach wahnięć zatrzymałem stoper. Czas na nim uwieczniony spisałem do tabelki 1 w kolumnę II, po czym powtórzyłem tę procedurę (bez zakładania sprężyny, oczywiście, bowiem nie została ona zdjęta, więc tej potrzeby nie było) aż do uzyskania zadowalającej liczby wyników (a było ich 10 (notabene, interesującym jest wpływ systemu liczbowego używanego przez istoty myślące dokonujące pomiarów wahań wahadeł sprzężonych na charakterystykę tych pomiarów)).

Część IV.III

Jedno z wahadeł ustawiłem w pozycji pionowej, a drugie wychyliłem o jak zwykle mały kąt f. Nie zważając na zmienną amplitudę drgań mierzyłem czas 5 pełnych okresów drgań jednego z wahadeł. Wartości te, już po podzieleniu przez 5, znajdują się w tabelce 1, w kolumnie III.

Część IV.IV

Zadając te same warunki początkowe, co w części IV.III doświadczenia, mierzyłem czas trzech okresów T`2, czyli 6 odcinków czasu pomiędzy amplitudami wahnięć równymi zero. Zmierzone wartości T`2 znajdują się w tabelce (dla odmiany) 1, w kolumnie IV.

Część IV.V

Jedno z wahadeł zamocowałem w statywie, drugie zaś wychylałem o (dla odmiany) mały kąt f. Mierzyłem czas 10 okresów T0. Wartości 10*T0/10=T0 znajdują się w tabelce 1, kolumna V.

Część IV.VI

Jedno z wahadeł ułożyłem na pryzmatycznym ostrzu (patrz: rys.2), tak, ażeby znajdowało się w pozycji równowagi. Po zmierzeniu odległości punktu styku z ostrzem od końca wahadła otrzymałem wartość r = (82 +/- 1) cm.

Część IV.VII

Sprężynę zamocowałem na statywie, a na niej zawiesiłem szalkę (rys.3). Następnie na szalce tej umieszczałem odważniki o masach m, które powodowały wychylenie układu "szalka+sprężyna" o d. Wyniki w tabelce 1 w kolumnie VI.

V. Wyniki

Tabela 1, czyli Zbiorcza Tabelka Wyników Otrzymanych W Doświadczeniu (ZTWOWD)

kolumna:	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	VIII	IX
X:	T1 [s]	T2 [s]	T'1 [s]	T'2 [s]	T0 [s]	m [g]	d [mm]	k [kg/s^2]	Δk [kg/s^2]	k(T0) [kg/s^2]
ΔX:	0,002	0,002	0,004	0,006	0,002	0,1	1	-	-	-
1.	1,879	1,715	1,838	43,01667	1,821	20	7	28,019	4,0051652	24,58803421
2.	1,888	1,741	1,844	42,76	1,807	30	12	24,51663	2,0446859	34,60450389
3.	1,888	1,731	1,824	42,46667	1,818	40	15	26,15107	1,7446298	29,72418271
4.	1,894	1,747	1,878	42,99667	1,825	50	17	28,84309	1,6976326	29,18716968
5.	1,885	1,758	1,868	42,71667	1,816	60	20	29,41995	1,4718145	29,33181975
6.	1,907	1,748	1,856	42,95	1,817	70	23	29,84633	1,2983666	38,23783925
7.	1,9	1,773	1,864	43,16667	1,823	80	28	28,019	1,0012913	32,60692297
8.	1,885	1,749	1,852	42,83333	1,809	90	32	27,5812	0,8624572	32,43252686
9.	1,887	1,749	1,85	42,73	1,82	100	35	28,019	0,801033	28,41902511
10.	1,898	1,747	1,858	42,46667	1,813	120	41	28,70239	0,7004668	36,19319166
11.				42,90667		150	51	28,84309	0,5658775	
12.				42,93333						

Kolumny VII i VIII wynikają z zastosowania wzorów [8] i [12] wobec zmierzonych zmiennych m i d
(oczywiście, jak widać, poruszamy się w zakresie stosowalności prawa Hooke'a),
zaś kolumna IX wynika z zastosowania wzoru k(T0) = M*g*r*((T1/T0)^2-1)/a/a
Z powyższych danych wynikają ostatecznie takie oto wartości średnie mierzonych wielkości:

T1 = (1.8911 +/- 0.0085) s
T2 = (1.746 +/- 0.016) s
T`1 = (1.853 +/- 0.016) s
T`2 = (42.83 +/- 0.22) s
T0 = (1.8169 +/- 0.0059) s
k = (28.0 +/- 1.5) kg/s^2
k(T0) = (31.5 +/- 4.1) kg/s^2 ... czas wobec tego na ...

VI. Przygotowanie oręża

(czyli wstęp do konfrontacji doświadczenia z teorią)

Opierając się na wyznaczonych wartościach (T1, ΔT1) i (T2, ΔT2), oraz korzystając ze wzorów [3], [4], [10], [11], możemy wyznaczyć (T`1, ΔT`1) i (T`2, ΔT`2):

T`1 = (1,82 +/- 0,15) s
T`2 = (45,51 +/- 0,87) s

a wiedząc przy okazji, że zachodzą wzory [1], [2] i [9], możemy sobie pozwolić na napisanie:

w1 = (3,323 +/- 0,015) 1/s
w2 = (3,599 +/- 0,033) 1/s

zaś ze wzorów [7] i [13], po przypomnieniu sobie, iż:

a = (0,25 +/- 0,001) m
r = (0,82 +/- 0,01) m
M = (3 +/- 0,04) kg
g = (9,80655 +/- 0) m/s^2 wynika już, że:
k = (33,4 +/- 4,7) kg/s^2

VII. Podsumowanie

Metodą dynamiczną otrzymałem: k = (33,4 +/- 4,7) kg/s^2
Metodą dynamiczną w drugiej wersji, czyli z użyciem T0, otrzymałem: (31.5 +/- 4.1) kg/s^2
Metodą statyczną otrzymałem: k = (28,0 +/- 1,5) kg/s^2

Wyniki te zgadzają się ze sobą w granicy przedziału potrójnego błędu pomiarowego.

Ostateczna wartość k, otrzymana z powyższych trzech wartości poprzez średnią ważoną błędami, wynosi:

k = (28,8 +/- 2,2) kg/s^2

Jeśli chodzi o wartości T`1 i T`2, to teoretycznie przewidywane ich wartości, oparte o pomiar T1 i T2 wyniosły:

T`1 = (1,82 +/- 0,15) s
T`2 = (45,51 +/- 0,87) s

z pomiarów bezpośrednich wynikły zaś następujące wartości:

T`1 = (1,853 +/- 0,016) s
T`2 = (42,83 +/- 0,22) s

Widać, że wartości wyznaczone doświadczalnie potwierdzają (a ściślej: nie zaprzeczają), w obliczu "testu 3σ", przewidywania teoretyczne.