УДК 517.98

Р. З. АБДУЛЛАЕВ

НЕАССОЦИАТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА L_p

Пространства L_p $(1\leqslant p<\infty)$ для полуконечных алгебр фон Неймана с точным нормальным состоянием были построены и описаны в виде билинейных форм в работе [1]. В [2] введены пространства L_p $(1\leqslant p<\infty)$ как пополнение идеала интегрируемых элементов JBW-алгебры [3] с точным нормальным полуконечным следом по L_p-норме и показано, что это пространство в точности совпадает с пространством измеримых относительно JBW-алгебры элементов интегрируемых в p-й степени.

В статье вводятся и исследуются пространства L_p $(1\leqslant p<\infty)$ на локально-модулярных (полуконечных) JBW-алгебрах с точным нормальным состоянием. Для специальных JBW-алгебр дается реализация этих пространств L_p в виде билинейных форм.

Пусть $\mathscr{A}$ — йорданова алгебра с единицей (обозначается **1**) над полем действительных чисел R [4, с. 67]. Тогда алгебра $\mathscr{A}$ называется JB-алгеброй [5], если она является банаховым пространством относительно нормы, удовлетворяющей соотношениям

$$\|x^2\|=\|x\|^2,\ \|x^2\|\leqslant\|x^2+y^2\|$$

для любых $x,\ y\in\mathscr{A}$.

Определение 1 [3]. JB-алгебра $\mathscr{A}$ называется JBW-алгеброй, если существует банахово пространство N, называемое предсопряженным к $\mathscr{A}$, такое, что $\mathscr{A}$ изометрически изоморфна пространству N^*, сопряженному к N.

В теории йордановых алгебр важную роль играет оператор

$$U_x y=2x\circ(x\circ y)-x^2\circ y\ (x,\ y\in\mathscr{A}),$$

где $\circ$ — йорданово умножение. Если $\mathscr{A}$ — JBW-алгебра, то для любого $x\in\mathscr{A}$ оператор U_x положителен.

Определение 2 [5] JW-алгеброй называется вещественное линейное пространство $\mathscr{A}$ ограниченных самосопряженных операторов в комплексном гильбертовом пространстве H, замкнутое относительно йорданова умножения $x\circ y=\frac{1}{2}(xy+yx)$ и замкнутое в слабой операторной топологии.

Легко видеть, что для JW-алгебр оператор U_x имеет вид

$$U_x y=xyx.$$

Теорема 1. Во всякой JBW-алгебре $\mathscr{A}$ существует единственный центральный идемпотент e такой, что алгебра $\mathscr{A}$ изоморфна прямой сумме $\mathscr{A}_1\oplus\mathscr{A}_2$, где JBW-алгебра $\mathscr{A}_1=e\circ\mathscr{A}$ изоморфна JW-алгебре, а JBW-алгебра $\mathscr{A}_2=(1-e)\circ\mathscr{A}$ изоморфна $C\left(X,\ M_3^8\right)$ всех непрерывных отображений некоторого гиперстоуновского компакта

X в исключительную алгебру M_3^8 эрмитовых 3×3 матриц над числами Кэли.

Доказательство см. в [3, теорема 39].

Пусть $\mathscr{A}$ — JBW-алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ. Через $L_p(\mathscr{A}, \tau)$ $(1\leqslant p<\infty)$ обозначим банахово пространство измеримых элементов для $\mathscr{A}$ интегрируемых в p-й степени и с нормой $\|x\|_p^\tau=(\tau(|x|^p))^{1/p}$ [2]. Пусть φ — точное нормальное состояние на $\mathscr{A}$. Тогда в силу теоремы 3 [6] справедливо представление

$$\varphi(x)=\tau(x\circ t)\quad (x\in\mathscr{A}),$$

где t — однозначно определенный элемент из $L_1(\mathscr{A}, \tau)$. Легко видеть, что для любого $x\in\mathscr{A}$ элемент $U_{t^{1/2p}}x\in L_p(\mathscr{A}, \tau)$.

Действительно,

$$U_{t^{1/2p}}x\leqslant U_{t^{1/2p}}\|x\|\mathbf{1}=\|x\|t^{1/p}\in L_p(\mathscr{A}, \tau).$$

Поэтому корректно определена функция

$$x\to\|x\|_p=\left(\tau\left(|U_{t^{1/2p}}x|^p\right)\right)^{1/p}=\|U_{t^{1/2p}}x\|_p^\tau\ (x\in\mathscr{A}).$$

Теорема 2. Отображение $x\to\|x\|_p$ $(1\leqslant p<\infty)$ является нормой на JBW-алгебре $\mathscr{A}$.

Доказательство. Учитывая, что $\|\cdot\|_p^\tau$ норма на $L_p(\mathscr{A}, \tau)$ $(1\leqslant p<\infty)$ [2], имеем для любых $x, y\in\mathscr{A}$

$$\|x+y\|_p=\|U_{t^{1/2p}}(x+y)\|_p^\tau=\|U_{t^{1/2p}}x+U_{t^{1/2p}}y\|_p^\tau\leqslant$$

$$\leqslant\|U_{t^{1/2p}}x\|_p^\tau+\|U_{t^{1/2p}}y\|_p^\tau=\|x\|_p+\|y\|_p,\ \|\lambda x\|_p=\lambda\|x\|_p,\ \lambda\in R.$$

Если $\|x\|_p=0$ для некоторого $x\in\mathscr{A}$, то это означает, что $U_{t^{1/2p}}x=\theta$. Отсюда

$$\varphi(x)=\tau(x\circ t)=\tau(U_{t^{1/2}}x)=\tau(U_{t^p}U_{t^{1/2p}}x)=0.$$

Теперь в силу точности φ получаем $x=\theta$. Теорема доказана.

Пополнение JBW-алгебры $\mathscr{A}$ по норме $\|\cdot\|_p$ обозначим через $L_p(\mathscr{A}, \varphi)$.

Для пространств $L_p(\mathscr{A}, \varphi)$ $(1\leqslant p<\infty)$ сформулируем аналог классической двойственности, доказываемый с использованием соответствующего результата работы [2].

Теорема 3. Пусть $\mathscr{A}$ — JBW-алгебра, φ — точное нормальное состояние. Тогда пространство сопряженное к $L_p(\mathscr{A}, \varphi)$ изометрически изоморфно пространству $L_q(\mathscr{A}, \varphi)$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$.

Для случая специальных JBW-алгебр пространство $L_p(\mathscr{A}, \varphi)$ допускает реализацию p_A-интегрируемыми билинейными формами.

Пусть $\mathscr{A}$ — JW-алгебра, φ — точное нормальное состояние на $\mathscr{A}$, $\mathscr{U}$ — обертывающая алгебра фон Неймана порожденная JW-алгеброй $\mathscr{A}$.

Продолжим след τ, заданный на $\mathscr{A}$ до точного нормального полуконечного следа τ' на $\mathscr{U}$, как в теореме 2 [7]. Тогда функция $\varphi'(\cdot)=\tau'(t\cdot)$ является точным нормальным состоянием, продолжающим φ.

Линеалом состояния φ' называется плотное в H линейное многообразие

$$D_{\varphi'}=\{f\in H\,|\,\exists\lambda>0:(xf, f)\leqslant\lambda\varphi'(x)\ (x\in\mathscr{U}^+)\}.$$

Под билинейной формой на $\mathscr{D}_{\varphi}$, будем понимать функцию a, сопоставляющую каждой паре $f,\ g \in D_{\varphi}$, комплексное число $a(f,\ g)$ причем эта функция линейна по первому и антилинейна по второму аргументу. Билинейная форма называется эрмитовой, если $a(f,\ g) = \overline{a(g,\ f)}$ $(f,\ g \in \mathscr{D}_{\varphi'})$.

Определение 3. Эрмитову билинейную форму a, заданную на линеалесостоянии, назовем p_A-интегрируемой, если существует последовательность $\{x_n\} \subset \mathscr{A}$ (ее назовем p_A-определяющей для a), такая что

$$(i)\ a(f,\ g) = \lim_{n\to\infty} (x_n f,\ g)\ (f,\ g \in \mathscr{D}_{\varphi'});$$

$$(ii)\ \|x_n - x_m\|_p \to 0\ (m,\ n \to \infty).$$

Из теоремы 3 [1] следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_p$ не зависит от выбора p_A-определяющей последовательности $\{x_n\}$. Поэтому корректно определена норма $\|a\|_p = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_p$ на линейном пространстве p_A-интегрируемых билинейных форм. Очевидно, пространство p_A-интегрируемых билинейных форм является подпространством в пространстве p-интегрируемых билинейных форм [1].

Из доказательства теоремы 3 [1] видно, что совокупность всех p_A-интегрируемых билинейных форм является банаховым пространством относительно нормы $\|\cdot\|_p$. Элемент x из JW-алгебры $\mathscr{A}$ будем отождествлять с билинейной формой $a(f,\ g) = (xf,\ g)$.

Теперь нетрудно доказывается следующий результат, дающий реализацию пространств $L_p(\mathscr{A},\ \varphi)$ для случая специальных JBW-алгебр.

Теорема 4. Пусть $\mathscr{A}$ — JW-алгебра, φ — точное нормальное состояние. Тогда пространство $L_p(\mathscr{A},\ \varphi)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ отождествляется с пространством p_A-интегрируемых билинейных форм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трунов Н. В. О некоммутативном аналоге пространства L_p.—Изв. вузов. Сер. Матем., 1979, № 11, с. 69—77. 2. Пространства L_p для йордановых алгебр с полуконечным следом $(1 \leqslant p < \infty)$ / Абдуллаев Р. З.; Редкол. Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук. Ташкент, 1983, 19 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ 7. 04. 83, № 1875—83 Деп. 3. Shultz F. W. On normed Jordan algebras which a dual spaces. — J. of Funct. Anal., 1979, v. 31, N 3, p. 360—376. 4. Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. М., 1978. 5. Topping D. M. Iordan algebras of selfadjoint operators. — Mem. Amer. Math. Soc., 1965, v. 53, p. 1—48. 6. Бердикулов М. А. Пространства L_1 и L_2 для полуконечных JBM-алгебр.—ДАН УзССР, 1982, № 6, с. 3—4. 7. Ajupov Ch. A. Extension of Treaces and type Criterions for Iordan Algebras of self — Adjoint Operators.— Math., Z., 1982, v. 181, p. 253—268.

Институт математики
им. В. И. Романовского
АН УзССР

Поступило
9. XI 1981 г.