УДК 517.98

Р. З. АБДУЛЛАЕВ

L_p -ПРОСТРАНСТВА ДЛЯ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР $(0<p<1)$

(Представлено акад. АН УзССР Т. А. Сарымсаковым)

В работах [1, 2] введены пространства L_p $(1\leqslant p<\infty)$ для йордановых банаховых алгебр (JBW-алгебр [3]) с точным нормальным полуконечным следом. В настоящей статье определяется пространство L_p для $0<p<1$. В частности, показано, что оно является пространством Фреше и при определенных условиях имеет тривиальное сопряженное. Полученные результаты являются обобщением теорем, приведенных в работе [4], где рассматриваются пространства L_p для алгебр фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом. Наше доказательство основано на другом методе и является более кратким.

Пусть A — JBW-алгебра, τ — точный нормальный полуконечный след. Для $\varepsilon, \delta > 0$ положим

$$N(\varepsilon, \delta) = \{a \in A : \exists e \in \Delta,\ \tau(1-e) < \delta,\ \| U_e a \| < \varepsilon\},$$

где $\nabla = \{e \in A : e^2 = e\}$ — решетка идемпотентов алгебры, 1 — единица алгебры A. Снабдим JBW-алгебру A инвариантной относительно сдвигов топологией t, в которой множества вида $N(\varepsilon, \delta)$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля. Назовем ее топологией сходимости по мере. Через $\hat{A}$ обозначим пополнение A в этой топологии. Можно показать, что $\hat{A}$ есть упорядоченная йорданова алгебра (OJ-алгебра) в смысле работы [5]. OJ-алгебра $\hat{A}$ является аналогом алгебры измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана [6]. Более точно, если JBW-алгебра A есть эрмитова часть алгебры фон Неймана U, то $\hat{A}$ совпадает с йордановой алгеброй всех самосопряженных операторов, измеримых относительно U. В общем случае, используя аналог теоремы Гельфанда—Наймарка для JBW-алгебр [3], можно также дать конкретное описание OJ-алгебры $\hat{A}$ [7].

Пусть $0 < p < 1$. Положим

$$L_p(A, \tau) = \{a \in \hat{A} : |a|^p \in L_1(A, \tau)\},$$

где $L_1(A, \tau)$ — пространство интегрируемых элементов [1]. Как и в работе [4], можно показать, что функция

$$\mu(a, b) = \left(\tau |a-b|^p\right)^{r/p} \left(\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\right)$$

является метрикой в пространстве $L_p(A, \tau)$.

Теорема 1. $L_p(A, \tau)$ — пространство Фреше. Доказательство этой теоремы опирается на следующие две леммы.

Лемма 1. Пусть $\{a_n\} \subset \hat{A}$ и $a_n \xrightarrow{t} a$, где $a \in \hat{A}$. Тогда $a_n^p \xrightarrow{t} a^p$ $(0 < p < \infty)$.

Лемма 2. (Лемма Фату). Пусть $\{a_n\} \subset L_1(A, \tau)$ и $\underline{\lim}_{n\to\infty} \|a_n\|_1 < \infty$, $a_n \xrightarrow{t} a$. Тогда $a \in L_1(A, \tau)$ и $\|a\|_1 \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \|a_n\|_1$.

Доказательство теоремы 1. Пусть последовательность $\{a_n\}$ μ-фундаментальна. Тогда легко показать, что она t-фундаментальна. В силу t-полноты алгебры $\hat{A}$ существует элемент a, такой, что $a_n \xrightarrow{t} a$. Из леммы 1 следует, что $|a_n - a_m|^p \xrightarrow{t} |a_n - a|^p$, при этом $|a_n - a_m|^p \in L_1(A, \tau)$ и существует n_0, для которого $\underline{\lim}_{m\to\infty} \tau\left(|a_n - a_m|^p\right) < \infty$. Теперь, используя лемму Фату, получаем $|a_n - a| \in L_1(A, \tau)$ и $\tau\left(|a_n - a|^p\right) \leqslant \underline{\lim}_{m\to\infty} \tau\left(|a_n - a_m|^p\right) \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда $a \in L_p(A, \tau)$ и $a_n \xrightarrow{\mu} a$.

Следующая теорема доказывается с использованием соответствующих свойств функциональных L_p-пространств.

Теорема 2. На пространстве $L_p(A, \tau)$ нет ненулевых непрерывных линейных функционалов тогда и только тогда, когда JBW-алгебра A не содержит минимальных идемпотентов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бердикулов М. А. Докл. АН УзССР, 1982, № 6, с. 3. [2] Абдуллаев Р. З. Неассоциативные пространства L_ρ — Деп. в ВИНИТИ, № 1875—83, 1983. [3] Shultz F. W. J. Func. Anal. v. 31, 1979, p. 360. [4] Kichi-Suke Saito. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., v. 89, 1981, p. 405. [5] Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А. Докл. АН СССР, т. 249, 1979, № 4, с. 789. [6] Segal J. Ann. Math., v. 57, 1953, p. 401. [7] Аюпов Ш. А. Докл. АН СССР, т. 267, 1983, № 3, с. 521—524.

Институт математики
им. В. И. Романовского
АН УзССР

Поступило
15. X 1982 г.