АКАДЕМИЯ НАУК УЗБЕКСКОЙ ССР

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ имени В.И.РОМАНОВСКОГО

На правах рукописи

АБДУЛЛАЕВ Рустамбай Зайирович

Р. Абд

ПРОСТРАНСТВА L_p ДЛЯ ПОЛУКОНЕЧНЫХ JBW - АЛГЕБР

(01.01.01 - математический анализ)

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель -
доктор физико-математических наук
Ш.А.АЮПОВ

Ташкент - 1984

О Г Л А В Л Е Н И Е

В В Е Д Е Н И Е

Теория интегрирования в алгебрах операторов возникла в связи с задачами математического обоснования квантовой механики и в настоящее время является интенсивно развивающейся частью теории алгебр операторов в гильбертовом пространстве.

Алгебраический подход к квантовой механике развивался преимущественно на W^* - алгебрах, введенных в работах Мюррея и фон Неймана [38], [39], [41]. W^* - алгебры - это слабо замкнутые комплексные $*$ - алгебры операторов в гильбертовом пространстве, получившие также название алгебр фон Неймана. При таком подходе наблюдаемым соответствуют самосопряженные операторы, а состояниям положительные функционалы на алгебре фон Неймана, принимающие значение 1 на единичном операторе. Обычное ассоциативное произведение $a \cdot b$ двух самосопряженных операторов a и b не является, вообще говоря, самосопряженным оператором. Этому произведению, в отличие от йорданова произведения $a \circ b = 1/2(a \cdot b + b \cdot a)$, трудно придать какой либо физический смысл [24]. Поэтому рассмотрение алгебр фон Неймана вызвано не столько физическими соображениями, сколько соображениями технического характера. В настоящее время теория алгебр фон Неймана - это глубоко развитая теория с многочисленными приложениями, которой посвящено огромное количество работ. Подробнее см. монографии Сакаи [45] и Такесаки [55] .

В начале 50-х годов в работах Сигала [48] и Диксмье [27] была создана теория интегрирования относительно унитарно инвариантных мер на проекторах в полуконечных алгебрах фон Неймана. Важным достижением Сигала, обеспечивающим разнообразные приложения его теории, является реализация L_1 и L_2 в виде пространств измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана. Диксмье дал двойственное описание пространства L_1, построенного по точному нормальному полуконечному следу на алгебре фон Неймана. Эти результаты были развиты многими авторами [42], [19], [20].

Различные виды сходимости в алгебре измеримых операторов были рассмотрены в работах Стайнспринга [51], Санкарана [46], [47], Падманапхана [43], Йедона [58] и других, вслед за которыми появились несколько работ ([37], [40], [59], [35]), в которых вводятся пространства L_p относительно точного нормального полуконечного следа на алгебре фон Неймана. В частности, Нельсоном [40] было введено пространство L_p $(1 \leq p < \infty)$ как пополнение идеала интегрируемых элементов по L_p - норме, и дана реализация этих пространств измеримыми операторами. Йедон [59] предложил другой подход. Пространства L_p $(1 \leq p < \infty)$ он ввел, как пространство измеримых операторов интегрируемых в p - ой степени. Им же было перенесено на эти пространства L_p классическое утверждение двойственности. Японский математик Сайто [35] рассмотрел пространства L_p для случая $p \in (0, 1)$.

Одним из первых достижений по распространению результатов Сигала на веса, которые являются наиболее общим аналогом интеграла на алгебре фон Неймана, стали работы А.Н.Шерстнева [21], [22], [14]. Пространства L_1, построенные в этих работах реализованы как пространства билинейных форм на линеале веса.

В последние годы в работах Н.В.Трунова введены пространства L_p $(1 \leq p < \infty)$ ассоциированные с точным нормальным состоянием [15] и с точным нормальным локально измеримым весом [16] на полуконечной алгебре фон Неймана. При этом существенно использованы результаты работ [44], [59]. Для случая точного нормального состояния дана реализация пространства L_p билинейными формами. Для точных нормальных локально измеримых весов, при дополнительном предположении локальной измеримости оператора, обратного к производной Радона-Никодима, пространства L_p описаны локально измеримыми операторами.

В настоящее время в работах [30], [32], [13], [8] предложены различные подходы к построению пространств L_p относительно точного нормального полуконечного веса на алгебре фон Неймана. Подробный обзор современного состояния теории интегрирования на алгебрах Неймана содержится в статье А.Н.Шерстнева [23].

В середине 60-х годов в работах Топпинга [56] и Штёрмера [52, 53] впервые были рассмотрены неассоциативные вещественные аналоги алгебр фон Неймана - JW - алгебры, т.е.: слабо замкнутые йордановы алгебры самосопряженных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве.

После появления работ Альфсена, Шульца, Штёрмера [25] и Шульца [49] (были введены JB- и JBW -алгебры) бурно начала развиваться теория йордановых банаховых алгебр.

Как отмечалось выше, перечисленные результаты, полученные для алгебр фон Неймана, более естественно, с точки зрения приложения в квантовой механике, рассмотреть для JBW - алгебр. Так, недавно [2] Ш.А.Аюповым была построена теория интегрирования по конечному следу, рассмотрены аналоги пространств L_1 и L_2, которые инъективно вложены в OJ - алгебру тотально измеримых элементов JBW - алгебры. Для случая полуконечных следов пространства L_1 и L_2 были рассмотрены М.А.Бердикуловым в [7] .

Все сказанное указывает на актуальность темы диссертации, целью которой является:

а) Изучение топологии сходимости по мере в OJ - алгебре тотально измеримых элементов.

б) Построение и описание пространств L_p $(0 < p < \infty)$ относительно точного нормального полуконечного следа на JBW - алгебрах;

в) Изучение свойств весов на JBW - алгебрах и доказательство теоремы Радона-Никодима.

г) Построение и описание пространств L_p $(1 \leq p < \infty)$ ассоциированных с нормальным регулярным локально конечным весом и с точным нормальным состоянием на полуконечной JBW - алгебре.

При решении этих задач не всегда можно применять технику, хорошо развитую для алгебр фон Неймана. Это обусловлено тем, что в йордановых алгебрах произведение элеметов неассоциативно, а также тем, что существуют неоператорные (исключительные) йордановы банаховы алгебры и необратимые JW - алгебры. В некоторых случаях, для того, чтобы обойти эти трудности, от JBW - алгебры отщепляется исключительная часть и используется метод исследования JW - алгебр с помощью обертывающей алгебры фон Неймана, разработанный Ш.А.Аюповым [1], [3] [5], [6], [26]. В доказательстве некоторых результатов использованы методы, отличные от случая алгебр фон Неймана (например, в исследовании пространств L_p $p \in (0,1)$). Эти методы являются новыми и в случае алгебр фон Неймана.

Перейдем к краткому изложению основных результатов диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на семь параграфов и списка литературы.

В первой главе вводятся йордановы алгебры измеримых, локально измеримых и тотально измеримых элементов, присоединенных к JBW - алгебре. Исследованы различные свойства топологии сходимости по мере в OJ-алгебре тотально измеримых элементов для JBW - алгебр.

Первая глава состоит из трех параграфов. В первом параграфе приведены необходимые сведения из теории йордановых алгебр и теории йордановых банаховых алгебр. (JB - и JBW - алгебр в смысле работ Альфсена, Шульца и Штёрмера [25], [49]). В этом же параграфе вводятся OJ - алгебры [3] измеримых и локально измеримых элементов, присоединенных к JBW - алгебре.

I.I.22. Определение. Если A - произвольная JBW - алгебра, $A = A_{sp} \oplus A_{ex}$ - ее разложение на JW - алгебру A_{sp} и исключительную часть A_{ex} (см. [49]), то через $\mathcal{A}(A)$ обозначим формальную сумму $\mathcal{A}(A_{sp}) \oplus S(X, M_3^8)$, где $\mathcal{A}(A_{sp})$ - множество самосопряженных операторов, присоединенных к A_{sp} и $S(X, M_3^8)$ - универсальная OJ - алгебра измеримых элементов для JBW - алгебры A_{ex} [3]. Эту сумму $\mathcal{A}(A)$ назовем множеством элементов, присоединенных к JBW - алгебре A.

Из спектральной теоремы для OJ - алгебр (см. [10]) и спектральной теоремы для самосопряженных операторов вытекает спектральная теорема для элементов множества $\mathcal{A}(A)$.

I.I.23. Определение. Элемент $x \in \mathcal{A}(A)$ назовем измеримым относительно JBW - алгебры A, если в его спектральном разложении $x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, de_\lambda$ идемпотенты $e_{\lambda_0}^{\perp}$ и $e_{-\lambda_0}$ модулярны при некотором $\lambda_0 > 0$. Элемент $x \in \mathcal{A}(A)$ назовем локально измеримым относительно A, если существует возрастающая к $\mathbb{1}$ последовательность центральных идемпотентов $\{q_n\} \subset A$ такая, что элементы $q_n x$ измеримы для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Совокупность $\mathcal{L}(A)$ всех локально измеримых элементов JBW - алгебры A является OJ - алгеброй, а совокупность $\mathcal{M}(A)$ измеримых элементов является OJ - подалгеброй в $\mathcal{L}(A)$.

В § I.2 рассмотрены веса и следы на JBW - алгебрах, играющие основную роль в теории интегрирования.

I.2.I. Определение. Вес φ , заданный на JBW - алгебре A назовем полуконечным, если в A существует сеть положительных элементов $\{a_\alpha\}$, возрастающая к $\mathbb{1}$ такая, что $\varphi(a_\alpha) < \infty$ для всех α ; локально конечным, если для любого ненулевого положительного $x \in A$ существует ненулевой положительный элемент $y \in A$ такой, что $y \leq x$ и $\varphi(y) < \infty$; регулярным, если для любого ненулевого положительного нормального линейного функционала ψ на A существует ненулевой положительный нормальный линейный функционал ψ' на A такой, что $\psi' \leq \psi$ и $\psi' \leq \varphi$ (ср. [I8]).

В § I.3 рассмотрены некоторые свойства топологии сходимости по мере в OJ - алгебре тотально измеримых элементов.

Пусть A - JBW - алгебра, τ - точный нормальный полуконечный след на A .

I.3.I. Определение. Измеримый элемент a , присоединенный к A , называется тотально измеримым, если существует идемпотент e такой, что

$\tau(e) < \infty$ и $U_{1-e}\, a \in A$.

Множество тотально измеримых элементов JBW - алгебры A обозначим $K(A,\tau)$.

1.3.4. Теорема. Пространство $K(A,\tau)$ полно в топологии сходимости по мере и является OJ - алгеброй.

1.3.8. Теорема. Пусть последовательность $\{a_n\} \subset K(A,\tau)$ сходится по мере к элементу $a \in K(A,\tau)$. Тогда последовательность $\{a_n^p\}$ сходится по мере к a^p, где $p \in (0,\infty)$.

Вторая глава посвящена построению и изучению пространств L_p $(0<p<1,\ 1\le p<\infty)$ относительно точного нормального полуконечного следа на JBW - алгебре.

В § 2.1 рассмотрен случай, когда $p \in [1,\infty)$. Пусть A - JBW - алгебра, τ - точный нормальный полуконечный след на A. Определим L_p - норму на идеале интегрируемых элементов $\mathfrak{M}_\tau$, полагая $\|x\|_p = (\tau(|x|^p))^{1/p}$ для $x \in \mathfrak{M}_\tau$ и обозначим пополнение $\mathfrak{M}_\tau$ по L_p - норме через $L_p(A,\tau)$.

Так как из сходимости по L_p - норме вытекает сходимость по мере и алгебра $K(A,\tau)$ полна в топологии сходимости по мере, то естественным образом определено вложение $L_p(A,\tau)$ в $K(A,\tau)$.

2.I.5. Т е о р е м а. Естественное отображение пространства $L_p(A,\tau)$ в $K(A,\tau)$ инъективно и

$$L_p(A,\tau) = \{x \in K(A,\tau) : \tau(|x|^p) < \infty\}.$$

В заключение параграфа 2.I доказывается теорема, являющаяся аналогом классической теоремы о двойственности пространств L_p и L_q $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$.

2.I.I0. Т е о р е м а. Пространство $L_p^*(A,\tau)$ изометрически изоморфно пространству

$$L_q(A,\tau) \quad \left(1<p<\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

В § 2.2 введены пространства L_p для $p \in (0,1)$ следующим образом

$$L_p(A,\tau) = \{x \in K(A,\tau) : |a|^p \in L_1(A,\tau)\}.$$

С помощью теоремы I.3.8 и аналога леммы Фату для JBW - алгебр доказывается следующая теорема

2.2.I. Т е о р е м а. Пространство $L_p(A,\tau)$ $(0<p<1)$ - является пространством Фреше относительно метрики

$$\mu(a,b) = (\tau(|a-b|^p))^{2/p} \quad \left(\frac{1}{2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\right).$$

Следующий результат доказан с использованием соответствующих свойств функциональных пространств.

2.2.7 Т е о р е м а. Пространство $L_p(A,\tau)$ $(0<p<1)$ не содержит минимальных идемпотентов тогда и только тогда, когда на нем нет ненулевых непрерывных линейных функционалов.

Третья глава посвящена построению пространств L_p по точному нормальному локально конечному весу на полуконечной JBW - алгебре. С этой целью в § 3.I доказан некоторый аналог теоремы Радона-Никодима. Всюду в этой главе τ - фиксированный точный нормальный полуконечный след на JBW - алгебре A.

3.I.3 Т е о р е м а (Радона-Никодима). Для любого нормального полуконечного веса φ на A существует единственный элемент $h \in \mathcal{A}^+(A)$ такой, что $\varphi(x)=\tau(hx)$ для всех $x\in A^+$. Обратно, для любого $h\in\mathcal{A}^+(A)$ функция $\varphi=\tau(h\cdot)$ является нормальным полуконечным весом на A.

Полученные в §§ I.2, 2.I, 3.I результаты позволяют развить теорию L_p - пространств по весу на полуконечных JBW - алгебрах по аналогии со случаем алгебр фон Неймана, который был рассмотрен Н.В.Труновым [I5], [I6].

Пусть φ точный нормальный локально конечный вес на JBW - алгебре A. Тогда существует локально измеримый элемент h, присоединенный к A такой, что $\varphi=\tau(h\cdot)$. Введем следующие обозначения

$$\mathfrak{M}_\varphi^{1/p}=\{x\in A:\ U_{h^{1/2p}}x\in L_p(A,\tau)\},$$

$$\|x\|_p = \left(\tau\left(|U_{h^{1/2p}} x|^p\right)\right)^{1/p}, \quad x \in \mathfrak{M}_\varphi^{1/p}, \ p \in [1, \infty).$$

3.2.1 Т е о р е м а. Отображение $x \to \|x\|_p$ является нормой на $\mathfrak{M}_\varphi^{1/p}$.

Пополнение $\mathfrak{M}_\varphi^{1/p}$ по норме $\|\cdot\|_p$ обозначим $L_p(A, \varphi)$.

3.2.2 Т е о р е м а. Пространство, сопряженное к $L_p(A, \varphi)$, изометрически изоморфно пространству $L_q(A, \varphi)$ $(1 < p < \infty, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.

Пусть $p \in [1, \infty)$ и

$$\mathcal{L}_p(A, \varphi) = \{x \in \mathcal{L}(A) \mid U_{h^{1/2p}} x \in L_p(A, \tau)\}.$$

3.2.4 Т е о р е м а. Если вес φ - регулярен, то $L_p(A, \varphi)$ в точности совпадает с $\mathcal{L}_p(A, \varphi)$

В заключение последнего параграфа дается описание пространств L_p , ассоциированных с точным конечным, но не обязательно регулярным весом, по аналогии с [15] .

Основные положения диссертации, выносящиеся на защиту

I. Доказана полнота $\mathcal{OJ}$ - алгебры тотально измеримых элементов в равномерности порожденной топологией сходимости по мере и непрерывность операции возведения в p - ю степень в этой топологии $(0 < p < \infty)$.

II. Построены пространства L_p $(0 < p < \infty)$ относительно точного нормального полуконечного следа на JBW - алгебре, которые реализуются тотально измеримыми элементами.

III. Доказана теорема Радона-Никодима для нормальных весов относительно точного нормального полуконечного следа на JBW - алгебре.

IV. Построено пространство L_p $(1 \leq p < \infty)$, ассоциированное с точным нормальным локально конечным весом на полукпнечной JBW - алгебре.

Основное содержание диссертации отражено в четырех работах [60-63]. В статье [63] Аюповым Ш.А. была доказана теорема Радона-Никодима для необратимых JW - алгебр и исключительных JBW - алгебр. Для обратимых JW - алгебр эта теорема доказана диссертантом.

Результаты диссертации докладывались на городском семинаре при кафедре функционального анализа в ТашГУ им. В.И.Ленина (I983 г.), на семинаре "Теория упорядоченных алгебр и ее приложение в квантовой теории вероятности" при отделе функционального анализа Института математики АН УзССР (I98I-I984 гг.), на конференциях молодых ученых ТашГУ (I983 г.), на ежегодных конференциях молодых ученых Института математики АН УзССР (I98I-I983 гг.), на ХУШ Воронежской зимней математической школе (I984 г.), на семинаре "Алгебра операторов и их приложения" при кафедре математического анализа Казанского государственного университета (I984 г.).

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю Шавкату Абдуллаевичу Аюпову за постоянное внимание и помощь при работе над диссертацией.

ГЛАВА I

ТОПОЛОГИЯ СХОДИМОСТИ ПО МЕРЕ

§ 1.1. Предварительные сведения

В этом параграфе приведем основные определения и результаты из теории йордановых алгебр [12], [9] и теории йордановых банаховых алгебр, развитых в работах [25], [49], [10]. В обозначениях, терминологии и изложении материала будем придерживаться в основном монографии [12] (гл. III).

1.1.1. Определение. Пусть A – векторное пространство над полем действительных чисел R. A называется йордановой алгеброй, если в ней введена операция умножения, которая, вообще говоря, неассоциативна и удовлетворяет условиям

1. $xy = yx$;
2. $(x+y)z = xz + yz$;
3. $\alpha(xy) = (\alpha x)y$;
4. $(x^2 y)x = x^2(yx)$,

где $x, y, z \in A$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

В следующем примере выделяется класс специальных йордановых алгебр.

1.1.2. Пример. Пусть $\mathfrak{A}$ – ассоциативная (необязательно коммутативная) алгебра над $\mathbb{R}$ с умножением $x\cdot y$, $x,y\in\mathfrak{A}$. Определив на $\mathfrak{A}$ симметризованное умножение $x\circ y = 1/2\,(x\cdot y + y\cdot x)$ получим новую алгебру $\mathfrak{A}^{(+)}$, которая, как легко проверить, является йордановой алгеброй.

Всякое векторное подпространство $\mathfrak{A}^{(+)}$, замкнутое относительно симметризованного умножения, также является йордановой алгеброй. Такие йордановы алгебры называются специальными. Не специальные йордановы алгебры называются исключительными.

Приведем пример специальной и исключительной алгебр, наиболее часто встречающихся в диссертации.

1.1.3. Пример. Пусть H – гильбертово пространство над $\mathbb{R}$ со скалярным произведением (ξ,η); $\xi,\eta\in H$. Рассмотрим множество A пар $\{\alpha,\xi\}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\xi\in H$ с покоординатными линейными операциями и с умножением:

$$\{\alpha,\xi\}\circ\{\beta,\eta\}=\{\alpha\beta+(\xi,\eta),\ \beta\xi+\alpha\eta\}.$$

Непосредственно проверяется, что A с этими операциями является йордановой алгеброй. Такие йордановы алгебры называются абстрактными спин факторами. Они являются частным случаем алгебры симметричной билинейной формы [9] и, в частности, специальны [9, с. 74, упр. 1].

1.1.4. Пример. Пусть $\mathcal{O}$ – алгебра чисел Кэли (октавы), $\mathcal{O}_n$ – алгебра $n\times n$ матриц с элементами из $\mathcal{O}$, $*$ – инволюция на $\mathcal{O}$, которая заключается в транспонировании матрицы и применении операции сопряжения к каждому ее элементу. Множество $H(\mathcal{O}_n)=\{x\in\mathcal{O}_n : x^*=x\}$ эрмитовых матриц замкнуто в $\mathcal{O}_n$ относительно операции $x\circ y=\frac{1}{2}(x\cdot y+y\cdot x)$. Оказывается, только при $n\leq 3$ множество $H(\mathcal{O}_n)$ с операцией $x\circ y$ является йордановой алгеброй, причем при $n\leq 2$ она специальна. Йорданова алгебра $H(\mathcal{O}_3)$ является исключительной [9, с. 68-74]. Эту алгебру будем также обозначать M_3^8.

Пусть A – йорданова алгебра. Подалгебра алгебры A называется сильно ассоциативной, если в ней для любых элементов a и b $(ac)b=a(cb)$ при каждом $c\in A$.

Семейство элементов $\{a_\alpha\}\subset A$ назовем совместным, если алгебра порожденная этими элементами, сильно ассоциативна. Совместность двух элементов a и b будем обозначать $a\leftrightarrow b$.

Для любых элементов a и b йордановой алгебры A определим отображение $U_{a,b}: A\to A$ следующим образом

$$U_{a,b}x=(ax)b+(bx)a-(ab)x,\ x\in A.$$

Положим $U_{a,a} = U_a$, т.е.

$$U_a x = 2a(ax) - a^2 x,\ x \in A .$$

1.1.5. Определение. Подалгебра J йордановой алгебры A называется идеалом (йордановым), если она является подпространством A и $xy \in J$ для $x \in J$, $y \in A$.

Йорданову алгебру с единицей будем называть JB - алгеброй, если на ней задана норма, относительно которой A является банаховым пространством и для которой выполнены следующие условия

$$(i)\ \|a^2\| = \|a\|^2 ; \quad (ii)\ \|a^2\| \le \|a^2 + b^2\|$$

для всех $a, b \in A$.

Важным для приложений в теории интегрирования классом JB - алгебр являются JBW - алгебры, введенные в работе Шульца [49] .

1.1.6. Определение. JB - алгебра A называется JBW - алгеброй, если она обладает предсопряженным пространством, т.е. существует банахово пространство A_* такое, что A изометрически изоморфна пространству $(A_*)^*$, топологически сопряженному к A_* .

Для того, чтобы сформулировать один из основных результатов работы [49] , дающий другое эквивалентное определение JBW - алгебры, нам понадобятся несколько понятий. Пусть A - JB - алгебра с единицей. Множество $A^+ = A^2$ всех квадратов элементов JB - алгебры A является конусом положительных элементов A. Положительный линейный функционал ρ на JB -алгебре A называется состоянием, если $\rho(\mathbb{1})=1$. Линейный функционал φ называется нормальным, если для любой сети $\{x_\alpha\} \subset A$, монотонно убывающей к нулю, $\varphi(x_\alpha) \to 0$. Говорят, что JB - алгебра A обладает разделяющим семейством нормальных состояний, если для любого $a \in A^+$, $a \neq 0$ существует нормальное состояние ρ на A такое, что $\rho(a) > 0$.

JB - алгебра A называется монотонно полной, если для любой возрастающей и ограниченной сверху сети $\{x_\alpha\}$ в A существует точная верхняя грань $x = \sup x_\alpha$.

I.I.7 Теорема [49]. JB - алгебра A обладает предсопряженным пространством (т.е. является JBW - алгеброй) тогда и только тогда, когда она монотонно полна и имеет разделяющее семейство нормальных состояний. Если эти условия выполнены, то предсопряженное пространство A_* единственно и может быть отождествленно с пространством N всех нормальных линейных функционалов на A.

I.I.8 Пример. Всякая JW - алгебра, т.е. йорданова алгебра ограниченных самосопряженных операторов в комплексном гильбертовом пространстве, замкнутая в слабой (операторной) топологии ([28], [52], [53], [56])

является примером специальной JBW - алгебры.
В частности, эрмитова часть алгебры фон Неймана является JBW - алгеброй.

I.I.9 П р и м е р. Всякая конечномерная JB - алгебра и, в частности, исключительная алгебра M_3^8 является JBW - алгеброй.

Для JW - алгебры A обозначим через $\mathcal{R}(A)$ - слабо замкнутую вещественную $*$ - алгебру, порожденную A, через $\mathcal{U}(A)$ - алгебру фон Неймана, порожденную A.

I.I.10 О п р е д е л е н и е. JW - алгебра A называется о б р а т и м о й, если $a_1 a_2 \ldots a_n + a_n a_{n-1} \ldots a_1 \in A$ для всех $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.

Обратимая JW - алгебра A совпадает с эрмитовой частью $\mathcal{R}(A)_{sA}$ $*$ - алгебры $\mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{U}(A) = \mathcal{R}(A) + i\mathcal{R}(A)$ (см. [53, теорема 2.4]).

Необратимыми могут быть только JW - алгебры типа I_2, которые в силу результата [50], являются прямыми суммами JW - алгебр вида $L^\infty(\Omega, \mu, V)$, где μ - мера Радона на локально-компактном пространстве Ω, V - спин фактор конечной или бесконечной размерности, большей двух.

Если A - обратимая JW - алгебра, то она раскладывается в прямую сумму JW - подалгебр $A_r \oplus A_c$, где A_r - обратимая JW - алгебра, такая, что $\mathcal{R}(A)$ является вещественной алгеброй фон Неймана [54], т.е. $\mathcal{R}(A_2)\cap i\mathcal{R}(A_2)=\{0\}$;

A_c - обратимая JW - алгебра, причем $\mathcal{R}(A_c)=$ $=\mathcal{U}(A_c)$ т.е. $A_c=\mathcal{U}(A_c)_{SA}$ (см. [52, лемма 6I]).

Комбинируя эти результаты с [49, теорема 3.9] и [52, теорема 6.4] можем сформулировать следующий результат.

I.I.II. Предложение. Произвольная JBW - алгебра A допускает центральное разложение в прямую сумму $A_1\oplus A_2\oplus A_3$, где

(i) A_1 изоморфна прямой сумме JBW - алгебр вида $L^\infty(\Omega,\mu,M)$, где M это либо M_3^8, либо спин фактор размерности большей двух;

(ii) A_2 - обратимая JW - алгебра, совпадающая с эрмитовой частью вещественной алгебры фон Неймана $\mathcal{R}(A_2)$;

(iii) A_3 - обратимая JW - алгебра, совпадающая с эрмитовой частью алгебры фон Неймана $\mathcal{U}(A_3)$.

Идемпотент e $(e^2=e)$ в JBW - алгебре A называется модулярным, если решетка $[0,e]=$ $=\{q\in\nabla:\ q\le e\}$ модулярна, т.е. $(f\vee q)\wedge p=f\vee(q\wedge p)$ для всех $f,q,p\in[0,e]$, $f\le p$, где ∇ - решетка идемпотентов в A.

I.I.I2. О п р е д е л е н и е. JBW - алгебра A называется конечной (соответственно полуконечной), если $\mathbb{1}$ - модулярный идемпотент (соответственно A содержит модулярный идемпотент с центральным носителем $\mathbb{1}$).

I.I.I3. О п р е д е л е н и е. Порядок $\geqslant$ на йордановой алгебре E назовем согласованным с алгебраическими операциями, если выполняются следующие условия:

I) если $x \geqslant y$, то $x+z \geqslant y+z$ для любого $z \in E$;

2) если $x \geqslant y$, то $\lambda x \geqslant \lambda y$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geqslant 0$;

3) если $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ $x \leftrightarrow y$, то $x\ y \geqslant 0$;

4) $x^2 \geqslant 0$ для любого $x \in E$.

I.I.I4. О п р е д е л е н и е. Йорданову алгебру E с единицей назовем OJ - а л г е б р о й, если на ней задан порядок, согласованный с алгебраическими операциями и выполнены следующие два условия:

(I). если $\{x_\alpha\}$ - возрастающая ограниченная сверху сеть положительных элементов из E , то существует $x = \sup x_\alpha$, причем $x \leftrightarrow y$, если $x_\alpha \leftrightarrow y$ для всех α ;

(II) всякая максимальная сильно ассоциативная подалгебра в E является решеткой относительно индуцированного порядка.

I.I.I5. П р и м е р. Всякое полуполе [II] и,в частности,алгебра измеримых функций на некотором измеримом пространстве, является примерами ассоциативных OJ - алгебр.

I.I.I6. П р и м е р. Всякая JBW - алгебра A и, в частности, JW - алгебра, являются OJ - алгебрами. В самом деле, свойства I), 2), 4) OJ - алгебры для A вытекают из теоремы 2.I [25] . Далее в силу непрерывности умножения относительно топологии нормы всякая максимальная сильно ассоциативная подалгебра A_0 в A замкнута и следовательно изоморфна алгебре $C(X)$ всех непрерывных действительных функций на компакте X [25] . Отсюда вытекает выполнение аксиом 3) и (П) OJ - алгебры. Наконец, аксиома (I) OJ - алгебры вытекает из монотонной полноты JBW - алгебры и из леммы 4.I [25] .

I.I.I7. З а м е ч а н и е. В примере I.I.I6 по существу доказано, что во всякой JB - алгебре выполнены все аксиомы OJ - алгебры за исключением, быть может аксиомы (I).

I.I.I8. Т е о р е м а [I0] . В OJ - алгебре E всякая максимальная сильно ассоциативная подалгебра E_0 является полуполем.

На OJ - алгебре E существует единственный порядок, превращающий E в OJ - алгебру, а именно, конус E^+ всех положительных элементов состоит в точности из всевозможных квадратов элементов из E, т.е. $E^+ = \{x^2, x \in E\}$. Это вытекает из того, что всякий элемент йордановой алгебры E принадлежит некоторой максимальной сильно ассоциативной подалгебре, являющейся полуполем, а в полуполе из всякого положительного элемента существует положительный квадратный корень [II] .

I.I.I9. О п р е д е л е н и е. Элемент a OJ - алгебры E называется о г р а н и ч е н н ы м, если $-\lambda\mathbb{1} \leq a \leq \lambda\mathbb{1}$ при некотором $\lambda\in\mathbb{R}, \lambda\geq 0$.

Если A - JBW - алгебра, то все её элементы ограничены. Пространство $L^0_{\mathbb{R}}[0,1]$ всех действительных измеримых функций на $[0,1]$ является примером ассоциативной OJ - алгебры с неограниченными элементами. Примеры неассоциативных OJ - алгебр с неограниченными элементами будут приведены ниже.

I.I.20. О п р е д е л е н и е. Семейство идемпотентов $\{e_\lambda, \lambda\in\mathbb{R}\}$ в OJ - алгебре назовем с п е к т р а л ь н ы м, если

I) $e_\lambda \leq e_\mu$ при $\lambda\leq\mu$;

2) $\inf e_\lambda = 0$, $\sup e_\lambda = \mathbb{1}$;

3) $e_\lambda = \sup\limits_{\mu<\lambda} e_\mu$ для всех $\lambda\in\mathbb{R}$.

I.I.2I. С п е к т р а л ь н а я т е о р е м а. Для каждого элемента x OJ - алгебры E существует в точности одно спектральное семейство $\{e_\lambda\}$ такое, что $x = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda\, d e_\lambda$, причем $\{e_\lambda\}$ содержится во всякой максимальной сильно ассоциативной подалгебре содержащей x , т.е. $x\longleftrightarrow y$ тогда и только тогда, когда $e_\lambda \leftrightarrow y$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Элемент x положителен тогда и только тогда, когда $e_\lambda = 0$ при $\lambda < 0$; элемент x ограничен тогда и только тогда, когда существует число $\lambda_0 > 0$ такое, что $e_\lambda = 0$ при $\lambda < -\lambda_0$, $e_\lambda = 1$ при $\lambda > \lambda_0$.

Пусть $C(X, M_3^8)$ множество непрерывных функций заданных на гиперстоуновском компакте X со значениями в M_3^8 . Так как M_3^8 - конечномерное нормированное пространство над $\mathbb{R}$ $(\dim M_3^8 = 27)$, то существует одноточечная компактификация $M = M_3^8 \cup (\infty)$.

Непрерывное отображение $f: X \to M$ назовем допустимым, если множество $f^{-1}(\infty)$ нигде не плотно в X .

Через $S(X, M_3^8)$ обозначим множество всех допустимых отображений. Введем в $S(X, M_3^8)$ алгебраические операции. Пусть $f, g \in S(X, M_3^8)$ и $Y = X \setminus (f^{-1}(\infty) \cup g^{-1}(\infty))$. Тогда, очевидно, Y всюду плотно в X и $f(x), g(x) \in M_3^8$ для $x \in Y$. На Y отображение $f+g$ определим как $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in Y$. Так как X экстремально несвязано, то оно является расширением Стоуна - Чеха всякого своего всюду плотного подмножества. Поэтому $f+g$ можно однозначно продолжить до отображения из X в M и, очевидно, $f+g \in S(X, M_3^8)$. Аналогично определяются остальные операции в $S(X, M_3^8)$. Так как M_3^8 является йордановой алгеброй, то $S(X, M_3^8)$

также является йордановой алгеброй. Введем на $S(X,M_3^8)$ порядок поточечно, т.е. $f\le g$ означает $f(x)\le g(x)$ для всех $x\in X\setminus(f^{-1}(\infty)\cup g^{-1}(\infty))$.

В работе [2, теорема 3.6] доказано, что йорданова алгебра $S(X,M_3^8)$ с введенными алгебраическими операциями и частичным порядком является универсальной OJ - - алгеброй, совокупность ограниченных элементов, которой есть JBW - алгебра $C(X,M_3^8)$.

Пусть теперь A - JW - алгебра в гильбертовом пространстве H . Самосопряженный оператор x в H (вообще говоря неограниченный) назовем п р и с о е д и н е н н ы м к A , если все его спектральные проекторы лежат в A (см. [3]).

Через $\mathcal{A}(A)$ обозначим совокупность всех самосопряженных операторов, присоединенных к A . Ясно, что множество ограниченных элементов из $\mathcal{A}(A)$ совпадает с A [3] .

I.I.22. О п р е д е л е н и е. Если A - произвольная JBW - алгебра, $A=A_{sp}\oplus A_{ex}$ ее разложение на JW - алгебру A_{sp} и исключительную часть $A_{ex}=C(X,M_3^8)$, то через $\mathcal{A}(A)$ обозначим формальную прямую сумму $\mathcal{A}(A_{sp})\oplus S(X,M_3^8)$ и назовем $\mathcal{A}(A)$ м н о ж е с т в о м э л е м е н т о в, п р и с о е д и н е н н ы х к JBW - а л г е б р е A .

Из спектральной теоремы для OJ - алгебр (см. [10]) и спектральной теоремы для самосопряженных операторов вытекает спектральная теорема для элементов, присоединенных к JBW - алгебре A, т.е. для любого элемента $x \in \mathcal{A}(A)$ существует спектральное семейство $\{e_\lambda\}$ в A такое, что $x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$ (здесь интеграл понимается в смысле OJ - алгебр для $S(X, M_3^8)$ и в смысле операторов для специальной части $\mathcal{A}(A_{sp})$).

I.I.23. О п р е д е л е н и е. Элемент $x \in \mathcal{A}(A)$ назовем и з м е р и м ы м о т н о с и т е л ь н о JBW - а л г е б р ы A, если в его спектральном разложении $x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$ идемпотенты $e_{\lambda_0}^{\perp}$ и $e_{-\lambda_0}$ модулярны при некотором $\lambda_0 > 0$. Элемент $x \in \mathcal{A}(A)$ назовем л о к а л ь н о и з м е р и м ы м о т н о с и т е л ь н о JBW - а л г е б р ы A, если существует возрастающая к $\mathbb{1}$ последовательность центральных идемпотентов $\{q_n\} \subset A$ такая, что элементы $q_n x$ измеримы для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Известно [3], что совокупность $\mathcal{L}(A_{sp})$ (соответственно $\mathcal{M}(A_{sp})$) всех локально измеримых (соответственно измеримых) операторов относительно JW - алгебры A_{sp} является OJ - алгеброй.

Так как JBW - алгебра A_{ex} модулярна, то все элементы $S(X, M_3^8)$ измеримы (и, следовательно, локально измеримы) относительно $A_{ex} = C(X, M_3^8)$. Поэтому совокупность $\mathcal{L}(A)$ всех локально измеримых элементов относительно JBW - алгебры A является OJ - алгеброй, а совокупность $\mathcal{M}(A)$ измеримых элементов является OJ - подалгеброй в $\mathcal{L}(A)$.

§ I.2 Веса и следы на JBW - алгебрах

В настоящем параграфе введены понятия веса и следа на JBW - алгебрах, рассмотрены некоторые их свойства.

I.2.I. Определение. Вес на JBW - алгебре A - это отображение $\varphi: A^+ \to [0, +\infty]$, такое, что

(i) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ для всех $a, b \in A^+$;

(ii) $\varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$ для всех $a \in A^+, \lambda \in \mathbb{R}^+$,

где подразумевается, что $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Вес φ называется следом, если

(iii) $\varphi(U_s a) = \varphi(a)$ для всех $a \in A^+$ и для любой симметрии $s \in A$ $(s^2 = 1)$.

В дальнейшем для определенности следы будем обозначать буквой τ.

Вес φ называется точным, если $\varphi(a)>0$ для всех $a\in A^+, a\neq 0$; нормальным, если $\varphi(a_\alpha)\uparrow\varphi(a)$ для любой сети $\{a_\alpha\}\subset A^+$, возрастающей к $a\in A^+$; полуконечным, если в A^+ существует возрастающая к $\mathbb{1}$ сеть $\{a_\alpha\}$ такая, что $\varphi(a_\alpha)<\infty$ для всех α; конечным, если $\varphi(a)<\infty$ для любого $a\in A^+$; локально конечным, если для любого $a\in A^+$ $(a\neq 0)$ существует элемент $b\in A^+$ такой, что $b\neq 0$ и $\varphi(b)<\infty$; регулярным (ср. [I7]), если для любого ненулевого функционала $\psi\in N^+$ существует ненулевой функционал $\psi'\in N^+$ такой, что $\psi'\leqslant\psi$ и $\psi'\leqslant\varphi$.

В силу [26, теорема 5] JBW - алгебра A полуконечна тогда и только тогда, когда на ней существует точный нормальный полуконечный след.

I.2.2. Определение. Носителем веса φ будем называть минимальный идемпотент $e\in A$ такой, что $\varphi(\mathbb{1}-e)=0$.

Следующее предложение доказывается аналогично доказательству соответствующего результата [I7, теорема 2] для алгебр фон Неймана.

I.2.3. Предложение. Каждый регулярный нормальный вес на JBW - алгебре A точен, а каждый точный нормальный след регулярен.

Доказательство. Пусть носитель e регулярного веса φ на A не равен 1 (т.е. φ не точен) и $\psi \in N^+$ ненулевой функционал с носителем $1-e$. Тогда для произвольного $\psi' \in N^+$ из $\psi' \leq \psi$ и $\psi' \leq \varphi$ следует, что $\psi' = 0$, что противоречит регулярности φ.

Для проверки второго утверждения ограничимся рассмотрением полуконечных следов. В доказательстве теоремы 2 [17] показано, как можно распространить этот результат на произвольные следы.

Итак, пусть τ - точный нормальный полуконечный след на A. Если $\psi \in N^+ (\psi \neq 0)$ то $\psi = \tau(h\cdot)$ для некоторого $h \in L_1(A,\tau)$ (см. [7], [33]). Пусть $h = \int\limits_0^\infty \lambda de_\lambda$ спектральное разложение элемента h. Выберем число $\mu > 1$ так, чтобы элемент $h_\mu = \int\limits_0^\mu \lambda de_\lambda$ не равнялся нулю. Теперь, если положить $\psi' = \frac{1}{\mu}\tau(h_\mu \cdot)$ получим $\psi' \leq \psi$, $\psi' \leq \tau$ и $\psi' \neq 0$. Предложение доказано.

Пусть теперь φ вес на JBW - алгебре. Положим

$$\mathfrak{M}_\varphi^+ = \{x \in A^+ \mid \varphi(x) < +\infty\}.$$

и $\mathfrak{M}_\varphi$ - линейная оболочка конуса $\mathfrak{M}_\varphi^+$.
Той же буквой φ мы обозначим продолжение по линейности на $\mathfrak{M}_\varphi$ функции $\varphi \mid \mathfrak{M}_\varphi^+$.

Если τ след на JBW - алгебре, тогда $\mathfrak{M}_\tau$ является йордановым идеалом [7] . Следовательно элемент $x \in A$ принадлежит $\mathfrak{M}_\tau$ тогда и только тогда, когда модуль $|x|$ элемента x принадлежит $\mathfrak{M}_\tau$. Поэтому в дальнейшем идеалом определения следа τ будем называть

$$\mathfrak{M}_\tau = \{ x \in A \mid \tau(|x|) < +\infty \} .$$

I.2.4. Т е о р е м а. Отображение $\tau(|x|) = \|x\|_1$ является нормой на $\mathfrak{M}_\tau$, пополнение $L_1(A,\tau)$ идеала $\mathfrak{M}_\tau$ относительно этой нормы инъективно вкладывается в $\mathfrak{O}\mathfrak{J}$ - алгебру измеримых элементов. При этом пространство N , предсопряженное к A, изометрически изоморфно пространству $L_1(A,\tau)$. Этот изоморфизм осуществляется соотношением $\varphi_h = \tau(h\cdot)$, где $\varphi_h \in N$ и $h \in L_1(A,\tau)$.

Доказательство см. [7] , [33] .

Приведем несколько эквивалентных условий полуконечности следа.

I.2.5. П р е д л о ж е н и е. Пусть τ - след на JBW - алгебре A . Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) τ - полуконечен;

(ii) $\mathfrak{M}_\tau$ плотно в A в слабой топологии;

(iii) существует сеть идемпотентов $e_\alpha \uparrow \mathbb{1}$, $e_\alpha \in \mathfrak{M}_\tau$;

(iv) τ - локально конечен.

Доказательство. Эквивалентность первых двух условий для весов доказана в работе [36, лемма 2.3]. Поэтому достаточно доказать импликации (i) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (iii).

(i) $\Rightarrow$ (iv). Пусть $x_\alpha \uparrow \mathbb{1}$, $x_\alpha \in \mathfrak{M}_\tau$ и x - произвольный ненулевой элемент из A^+.
Тогда в силу положительности оператора $U_{\sqrt{x}}$ верно неравенство $U_{\sqrt{x}} x_\alpha \leq x$ для всех α. Так как $U_{\sqrt{x}} x_\alpha \uparrow x$, то для некоторого α_0 элемент $y = U_{\sqrt{x}} x_{\alpha_0}$ не равен нулю. Так как $\mathfrak{M}_\tau$ - идеал, то $y \in \mathfrak{M}_\tau$. Итак, для любого $x \in A^+$ существует ненулевой элемент $y \in \mathfrak{M}_\tau$ такой, что $y \leq x$.

(iv) $\Rightarrow$ (iii). Пусть $\{q_i\}$ $(i \in I)$ максимальное семейство попарно ортогональных идемпотентов из $\mathfrak{M}_\tau$. Предположим, что $\sum\limits_{i \in I} q_i = q \neq \mathbb{1}$. Тогда идемпотент $\mathbb{1} - q$ мажорирует некоторый ненулевой идемпотент из $\mathfrak{M}_\tau$, что противоречит максимальности семейства $\{q_i\}$. Итак, если $\{I_\alpha\}$ - направленная вверх сеть конечных подмножеств множества I, то сеть идемпотентов $e_\alpha = \sum\limits_{i \in I_\alpha} q_i$ возрастает к $\mathbb{1}$ и $e_\alpha \in \mathfrak{M}_\tau$. Предложение доказано.

I.2.6. Замечание. Для весов, вообще говоря, из первых двух эквивалентных условий полуконечности [36] (i), (ii) не следуют два других условия предложения I.2.5.

Следующее предложение позволяет сводить в некоторых случаях рассмотрение полуконечных следов к конечным.

I.2.7. Предложение. Пусть JBW - алгебра A изоморфна алгебре $L^{\infty}(\Omega, \mu, M)$, где M - JBW - фактор типа $I_n \ (n<\infty)$, φ - полуконечный вес на A. Тогда существует ортогональное семейство центральных идемпотентов $\{e_i\} \subset A, \sum\limits_i e_i = \mathbb{1}$ таких, что $\varphi(e_i) < +\infty$ для всех i, т.е. сужение φ на $e_i A$ - конечный вес.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить, что для любого центрального идемпотента e в A существует центральный идемпотент e_0 такой, что $e_0 \neq 0$, $e_0 \leq e$ и $\varphi(e_0) < \infty$. Переходя при необходимости к JBW - алгебре eA, можно сразу предположить, что $e = \mathbb{1}$. Таким образом достаточно установить существование хотя бы одного ненулевого центрального идемпотента e_0 в A такого, что $\varphi(e_0) < +\infty$. По условию существует сеть $\{a_\alpha\}$ в A^+ такая, что $a_\alpha \uparrow \mathbb{1}$ и $\varphi(a_\alpha) < +\infty$ для всех α. Пусть $\|\cdot\|_M$ норма в M, $\mathbb{1}_M$ единица в M. Тогда $\mathbb{1}_M - a_\alpha(w) \downarrow 0$ μ - п.в. Так как в JBW-факторе типа I_n порядковая сходимость совпадает со сходимостью по норме, то функции $f_\alpha(\omega)=\|\mathbb{1}_M-a_\alpha(\omega)\|_M$ монотонно убывают к 0 μ - п.в. По теореме Лузина существует подмножество $\Omega_0\subset\Omega$ положительной меры $(\mu(\Omega_0)>0)$, на котором $f_\alpha\to 0$ равномерно, т.е. $f_\alpha(\omega)=\|\mathbb{1}_M-a_{\alpha_0}(\omega)\|_M\leq 1/2$ для всех $\omega\in\Omega_0$, при некотором α_0. В силу свойств нормы в JB - алгебрах [25] отсюда следует, что

$\mathbb{1}_M-a_{\alpha_0}(\omega)\leq\frac{1}{2}\mathbb{1}_M$, т.е. $a_{\alpha_0}(\omega)\geq\frac{1}{2}\mathbb{1}_M$

для всех $\omega\in\Omega_0$.

Пусть

$$e_0(\omega)=\begin{cases}\mathbb{1}_M & \text{при } \omega\in\Omega_0\\ 0 & \text{при } \omega\in\Omega\setminus\Omega_0\end{cases}$$

Тогда, очевидно, e_0 - центральный ненулевой идемпотент в $A=L^\infty(\Omega,\mu,M)$ и $e_0\leq 2a_{\alpha_0}$, т.е.

$$\varphi(e_0)\leq 2\varphi(a_{\alpha_0})<+\infty.$$

Предложение доказано.

I.2.8. З а м е ч а н и е. Одним из основных инструментов, используемых в диссертации, является переход к обертывающей алгебре фон Неймана для JW - алгебры и ссылка на соответствующие результаты из теории алгебр фон Неймана. Этот метод очень удобен во многих случаях и основывается на взаимосвязи между JW - алгеброй и ее обертывающей алгеброй фон Неймана. Исследование этой связи было начато Штёрмером в работах [52], [53] и продолжено Ш.А.Аюповым в [26]. В работе [26] доказано, что всякий нормальный след τ на JW - алгебре A продолжается до нормального следа τ' на алгебре фон Неймана $\mathfrak{U}(A)$ и если τ точен, конечен или полуконечен, тогда τ' также точен, конечен, полуконечен соответственно. С помощью этого было показано, что $\mathfrak{U}(A)$ конечная (соответственно полуконечная) алгебра фон Неймана, если JW - алгебра A конечна (соответственно полуконечна). В [26] этот результат доказывается полностью для обратимых JW - алгебр. В случае необратимых JW - алгебр в доказательстве есть не точность. В самом деле, если A является спин фактором (JW - фактором типа I_2), тогда, вообще говоря, алгебра фон Неймана $\mathfrak{U}(A)$ может иметь любой из типов $I, \bar{II}_1, \bar{II}_\infty, \bar{III}$ и может даже не быть фактором - всё зависит от представления A. В частности, канонический вероятностный точный нормальный след на A может не продолжаться до точного нормального конечного следа на $\mathfrak{U}(A)$. В [26] говорится, что алгебра фон Неймана $\mathfrak{U}(A)$ для спин фактора A является фактором типа I_n $(n<\infty)$, если размерность A конечна и фактором типа $\bar{II}_1$, если размерность A бесконечна и кроме того след на A продолжается единственным образом до следа на $\mathfrak{U}(A)$. При этом делается ссылка на работу Топпинга [57]. Но Топпинг в [57] доказал, что A имеет представление $\pi(A)$ такое, что $\mathfrak{U}(\pi(A))$ обладает этим свойством.

Поэтому некоторые из основных результатов работы [26] (теоремы 2–4, 6, 8 и следствие 3.2) верны (в случае необратимых JW - алгебр) с точностью до изоморфизма JW - алгебр, т.е. для любой JW - алгебры A существует JW - алгебра $\pi(A)$, изоморфная к A, такая, что перечисленные в [26] результаты верны для $\pi(A)$.

§ I.3 Топология сходимости по мере в OJ - алгебре тотально измеримых элементов

Пусть A - JBW - алгебра, τ - точный нормальный полуконечный след на A.

I.3.I. О п р е д е л е н и е. Измеримый элемент a, присоединенный к A называется т о т а л ь н о и з м е р и м ы м, если существует идемпотент $e \in \mathfrak{M}_\tau$ такой, что $U_{1-e}a \in A$.

Множество тотально измеримых элементов JBW - алгебры A обозначим $K(A,\tau)$.

I.3.2. О п р е д е л е н и е. Т о п о л о г и е й с х о д и м о с т и по м е р е на $K(A,\tau)$ назовем топологию, в которой базис окрестностей нуля образуют множества вида $N(\varepsilon,\delta)$, $\varepsilon,\delta > 0$, где

$$N(\varepsilon,\delta)=\{a\in \mathcal{R}(A,\tau)\mid \exists e\in\nabla, \tau(e^{\perp})\le\delta, \|U_e a\|\le\varepsilon\}$$

В работе [4] подробно изучены свойства множеств $N(\varepsilon,\delta)$, в частности, доказана следующая теорема.

I.3.3. Т е о р е м а. Множества $N(\varepsilon,\delta)$ обладают следующими свойствами:

(i) $N(\varepsilon_1,\delta_1)+N(\varepsilon_2,\delta_2)\subset N(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\delta_1+\delta_2)$;

(ii) $\lambda N(\varepsilon,\delta)\subset N(|\lambda|\varepsilon,\delta)$, $\lambda\in\mathbb{R}$;

(iii) $(-\lambda,\lambda)x\subset N(\lambda\|x\|,\delta)$, где $\lambda\in\mathbb{R}^+, \forall\delta>0$;

(iv) $N^2(\varepsilon,\delta)\subset N(\varepsilon^2,2\delta)$, где

$$N^2(\varepsilon,\delta)=\{a^2, a\in N(\varepsilon,\delta)\};$$

(v) $xN(\varepsilon,\delta)\subset N(\|x\|\varepsilon,3\delta)$;

(vi) если $\varepsilon<1$, то $N(\varepsilon,\delta)\cap\nabla=\{e\in\nabla; \tau(e)\le\delta\}$;

(vii) $\bigcap\limits_{\varepsilon,\delta>0}N(\varepsilon,\delta)=\{0\}$;

(viii) если $0\le y\le x\in N(\varepsilon,\delta)$, то $y\in N(\varepsilon,\delta)$,

т.е. все множества $N(\varepsilon,\delta)$ заполнены.

Последовательность тотально измеримых элементов $\{a_n\}$ сходится в топологии сходимости по мере к тотально измеримому элементу a тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность идемпотентов $\{e_n\}$ из A, что $\|U_{e_n}(a_n - a)\| < \varepsilon$ для достаточно больших n и $\tau(\mathbb{1} - e_n) \to 0$.

Сходимость в этой топологии будем называть сходимостью по мере.

I.3.4. Теорема. $K(A,\tau)$ – полно в топологии сходимости по мере.

Доказательство. Пусть $a_n \subset K(A,\tau)$ фундаментальная последовательность в топологии сходимости по мере. Тогда можно выбрать подпоследовательность a_z последовательности a_n так, что $(a_{z+1} - a_z) \in \in N(2^{-z}, 2^{-z})$. Существует последовательность $\{p_z\} \subset \nabla$ такая, что $U_{p_z} a_z \in A$ и $\tau(\mathbb{1} - p_z) < 2^{-z}$ и последовательность $\{e_z\} \subset \nabla$ такая, что

$$\|U_{e_z}(a_{z+1} - a_z)\| < 2^{-z} \quad \text{и} \quad \tau(\mathbb{1} - e_z) < 2^{-z}.$$

Пусть $q_k = \inf\limits_{z \geq k} (e_z \wedge p_z)$. Тогда $q_k \uparrow \mathbb{1}$ и

$$\tau(\mathbb{1} - q_k) = \tau((\mathbb{1} - e_k) \vee (\mathbb{1} - p_k) \vee (\mathbb{1} - e_{k+1}) \vee (\mathbb{1} - p_{k+1}) \vee \ldots) \leq$$

$$\leq \sum_{z=k}^{\infty} \tau(\mathbb{1} - e_z) + \sum_{z=k}^{\infty} \tau(\mathbb{1} - p_z) < 2 \sum_{z=k}^{\infty} 2^{-z} = 2^{-k+2}.$$

Для любого k $U_{q_k} a_k \in A$ и $\| U_{q_k}(a_{r+1} - a_r)\| < 2^{-r}$ при $r \geq k$. Отсюда, для каждого k $U_{q_k} a_r$ сходится в A к некоторому $b_k \in A$. Если $m \geq k$, имеем

$$b_k = \lim_r U_{q_k} a_r = \lim_r U_{q_k} U_{q_m} a_r = U_{q_k} b_m .$$

Покажем, что существует элемент $a \in K(A,\tau)$ удовлетворяющий условию $U_{q_k} a = b_k$. В силу [49, теорема 3.9] и предложения I.2.7 существует семейство попарно ортогональных центральных идемпотентов e_i $(i \in I)$ такое, что Ae_i - исключительные JBW - алгебры $C(X_i, M_3^8)$, на которых сужение следа τ - конечно и $A(\mathbb{1} - \sum_{i \in I} e_i)$ - изоморфна JW - алгебре. Поэтому достаточно показать существование такого элемента на каждой из этих алгебр в отдельности.

Пусть JBW - алгебра A_i изоморфна алгебре $C(X_i, M_3^8)$ и τ - точный нормальный конечный след на A_i. Тогда в силу полноты $S(X_i, M_3^8)$ в топологии сходимости по мере [2] существует элемент $a_i \in Ae_i$, который удовлетворяет условиям $U_{q_k} a_i = b_k e_i$. Очевидно, что элемент $b' = \sum_{i \in I} a_i$

будет измеримым и $U_{q_k}\sum a_i = \sum b_k e_i$.

Пусть теперь $\mathcal{B} = A(1-\sum_{i\in I} e_i) - JW$ - алгебра операторов на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Определим на $\mathcal{D}_b = \bigcup_k q_k(\mathcal{H})$ оператор b как $U_{q_k} b = b_k(1-\sum_{i\in I} e_i)$ для всех k. Из предложения 2.7 [58] следует, что симметрический оператор b самосопряжен. Обозначим буквой a сумму элементов b' и b. Это и есть элемент, удовлетворяющий условию $U_{q_k} a = b_k$ для любого k.

Отсюда в силу ограниченности b_k следует, что элемент a тотально измерим.

Покажем, что это и есть предел фундаментальной последовательности $\{a_n\}$. Имеем

$$\| U_{q_k}(a-a_k)\| = \| b_k - U_{q_k} a_k\| =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \|U_{q_k}(a_{k+p} - a_k)\| \leq$$

$$\leq \sum_{p=0}^{\infty} \|U_{q_k}(a_{k+p+1} - a_{k+p})\| < \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-(k+p)} = 2^{-k+1}.$$

Отсюда следует, что $a_n \to a$ в топологии сходимости по мере, т.е. $K(A,\tau)$ - полно в этой топологии. Теорема доказана.

В работе [4] было показано, что пополнение JBW - алгебры A в топологии сходимости по мере есть OJ - алгебра. Поэтому из доказанной теоремы вытекает

I.3.5. С л е д с т в и е. Множество тотально измеримых элементов $K(A,\tau)$ является OJ - алгеброй.

Приведем несколько эквивалентных определений тотальной измеримости элементов.

Пусть $A - JBW$ - алгебра, τ - точный нормальный полуконечный след.

I.3.6. П р е д л о ж е н и е. Если $a \in M(A)$ и $|a| = \int_0^{+\infty} \lambda d e_\lambda$ — спектральное разложение модуля $|a|$ элемента a, то следующие условия эквивалентны:

(i) $a \in K(A,\tau)$;

(ii) $\tau(1 - e_{\lambda_0}) < \infty$ для некоторого λ_0;

(iii) $\tau(1 - e_\lambda) < \infty$ для некоторого λ_0 и всех $\lambda \geqslant \lambda_0$;

(iv) $\tau(1 - e_\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$;

(v) $\exists e \in \nabla \cap \mathfrak{M}_\tau$ такой, что $U_{1-e} a^2 \in A$.

Доказательству этого предложения предпошлем лемму.

I.3.7. Л е м м а. Пусть $a \in M(A)$, $|a| = \int_0^{+\infty} \lambda d e_\lambda$ и $e \in \nabla$. Если $\sqrt{\|U_{1-e} a^2\|} < \lambda$, тогда

$$\tau(1-e_\lambda) < \tau(e).$$

Доказательство. Так как в формулировке леммы участвуют только два элемента a и e, то в силу теоремы Ширшова [9] и [31, лемма 2.3] можно считать, что A - JW - алгебра. Теперь, если учесть, что

$$\sqrt{\|U_{1-e}a^2\|} = \sqrt{\|(1-e)\cdot a^2\cdot(1-e)\|} =$$

$$= \sqrt{\|(a\cdot(1-e))^*\cdot(a\cdot(1-e))\|} = \|a\cdot(1-e)\|,$$

получим лемму I.3.7, как следствие леммы I.I [58].

Лемма доказана.

Доказательство предложения I.3.6. Импликация $(i)\Rightarrow(v)$ - очевидна, так как $K(A,\tau)$ - алгебра. Импликация $(v)\Rightarrow(i)$ следует из неравенства $\|U_{1-e}a\| \leq \sqrt{\|U_{1-e}a^2\|}$. Импликации $(ii)\Rightarrow(v)$, $(iii)\Rightarrow(v)$, $(iv)\Rightarrow(v)$ очевидны и обратные им $(v)\Rightarrow(ii)$, $(v)\Rightarrow(iii)$, $(v)\Rightarrow(iv)$ следуют из леммы I.3.7.

В заключение параграфа покажем, что сходимость по мере инвариантна относительно возведения в p - ую степень $p \in (0,\infty)$.

I.3.8. Т е о р е м а. Пусть последовательность $\{a_n\} \subset K(A,\tau)$ сходится по мере к элементу $a \in K(A,\tau)$. Тогда последовательность $\{a_n^p\}$ сходится по мере к a^p, где $p \in (0,\infty)$.

Докажем предварительно лемму

I.3.9. Л е м м а. Пусть $\{a_n'\}, \{a_n\}, \{a_n''\} \subset K(A,\tau)$, $a_n' \leq a_n \leq a_n''$ и последовательности $\{a_n'\}$ и $\{a_n''\}$ сходятся по мере к элементу $a \in K(A,\tau)$. Тогда последовательность $\{a_n\}$ также сходится к a по мере.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы I.3.9. Вычитая от каждой части неравенств $a_n' \leq a_n \leq a_n''$ элемент a_n' получим $0 \leq a_n - a_n' \leq a_n'' - a_n'$. Отсюда, так как последовательность $\{a_n'' - a_n'\}$ сходится по мере к нулю, то в силу заполненности множества $N(\varepsilon,\delta)$ (теорема I.3.3 (viii)) последовательность $\{a_n - a_n'\}$ также будет сходится к нулю по мере, т.е. a_n сходится по мере к a.
Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы

С л у ч а й I. $p = \frac{1}{2}$. Предположим, что $a_n^{1/2}$ не сходится к $a^{1/2}$ по мере. Тогда существует подпоследовательность (для краткости будем ее обозначать $a_k^{1/2}$) последовательности $a_n^{1/2}$, никакая подпоследовательность которой не сходится к $a^{1/2}$.

В силу соотношений

$$(a_k+\frac{1}{m}\mathbb{1})^{1/2}-(a+\frac{1}{m}\mathbb{1})^{1/2}=$$

$$=(a_k-a)((a_k+\frac{1}{m}\mathbb{1})^{1/2}+(a+\frac{1}{m}\mathbb{1})^{1/2})^{-1},$$

$$((a_k+\frac{1}{m}\mathbb{1})^{1/2}+(a+\frac{1}{m}\mathbb{1})^{1/2})^{-1}\leq\frac{m^{1/2}}{2}\mathbb{1}$$

и теоремы I.3.3 (V), из $(a_k-a)\in N(\varepsilon,\delta)$ следует, что

$$(a_k+\frac{1}{m}\mathbb{1})^{1/2}-(a+\frac{1}{m}\mathbb{1})^{1/2}\in N(\frac{m^{1/2}}{2}\varepsilon,\ 3\delta).$$

Так как a_k сходится по мере к a, то $(a_k+\frac{1}{m}\mathbb{1})^{1/2}$ сходится по мере к $(a+\frac{1}{m}\mathbb{1})^{1/2}$.

Далее из

$$(a+\frac{1}{m}\mathbb{1})^{1/2}-a^{1/2}=\frac{1}{m}((a+\frac{1}{m}\mathbb{1})^{1/2}+a^{1/2})\leq\frac{1}{m^{1/2}}\mathbb{1}.$$

следует, что $(a+\frac{1}{m}\mathbb{1})^{1/2}$ сходится к $a^{1/2}$ при $m\to\infty$.

Итак, получаем

$$(a_k + \frac{1}{m}\mathbb{1})^{1/2} \xrightarrow[k\to\infty]{} (a + \frac{1}{m}\mathbb{1})^{1/2} \xrightarrow[m\to\infty]{} a^{1/2} .$$

Отсюда следует, что существует подпоследовательность a_{k_m} последовательности a_k такая, что

$$(a_{k_m} + \frac{1}{m}\mathbb{1})^{1/2} \xrightarrow[m\to\infty]{} a^{1/2} .$$

Теперь из

$$((a_{k_r} + \frac{1}{r}\mathbb{1})^{1/2} - a^{1/2}) - ((a_{k_m} - \frac{1}{r}\mathbb{1})^{1/2} - a_{k_m}^{1/2}) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

и

$$(a_{k_r} + \frac{1}{r}\mathbb{1})^{1/2} - (a_{k_m} + \frac{1}{r}\mathbb{1})^{1/2} =$$

$$= (a_{k_r} - a_{k_m})((a_{k_r} + \frac{1}{r}\mathbb{1})^{1/2} + (a_{k_m} + \frac{1}{r}\mathbb{1})^{1/2})^{-1} \leq$$

$$\leq (a_{k_r} - a_{k_m}) \frac{r^{1/2}}{2}$$

следует, что $a_{k_m}^{1/2}$ сходится по мере к $a^{1/2}$.
Но это противоречит предположению о том, что никакая подпоследовательность последовательности $a_k^{1/2}$ не сходится к $a^{1/2}$.

Случай 2. $\|a_n\| \leq 1$ и $p \in (0,\infty)$.

Так как для целых p утверждение теоремы I.3.8 следует из теоремы I.3.3 (iv), то достаточно рассмотреть случай $p \in (0,1)$. Предположим, что a_n^p не сходится по мере к a^p. Тогда существует подпоследовательность (для краткости будем ее обозначать a_k^p) последовательности a_n^p, никакая подпоследовательность которой не сходится к a^p.

Для любого $p \in (0,1)$ существуют две последовательности $\{q'_m\}$ и $\{q''_m\}$, являющиеся линейными комбинациями дробей вида $\frac{1}{2^z}$ $(z = 1, 2, 3, \ldots)$ одна из которых убывает к p $(q'_m \downarrow p)$, а другая возрастает к p $(q''_m \uparrow p)$. В силу результата, полученного для первого случая $a_k^{q'_m}$ сходится по мере к $a^{q'_m}$ и $a_k^{q''_m}$ сходится по мере к $a^{q''_m}$ при $k \to \infty$.

Используя соответствующее свойство функциональных пространств получаем, что последовательности $\{a^{q'_m}\}$ и $\{a^{q''_m}\}$ сходятся по мере к a^p при $m \to \infty$

Итак, имеем

$$a_k^{q'_m} \xrightarrow[k\to\infty]{} a^{q'_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} a^p$$

Следовательно существует подпоследовательность a_{k_z}

последовательности a_k такая, что $a_{k_r}^{q'_r} \xrightarrow[r\to\infty]{} a$.

Из $a_{k_r}^{q''_m} \xrightarrow[r\to\infty]{} a^{q''_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} a^p$ следует, что существует подпоследовательность $a_{k_{r_m}}$ последовательности a_{k_r} такая, что $a_{k_{r_m}}^{q''_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} a$ и $a_{k_{r_m}}^{q'_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} a$.

В силу неравенств $q''_m \le p \le q'_m$ и $\|a_n\| \le 1$ получаем $a_{k_{r_m}}^{q'_m} \le a_{k_{r_m}}^{p} \le a_{k_{r_m}}^{q''_m}$, т.е. выполнены все условия леммы I.3.9.

Итак, мы выбрали подпоследовательность $\{a_{k_{r_m}}\}$ последовательности $\{a_k\}$ так, что $a_{k_{r_m}}^{p} \xrightarrow[m\to\infty]{} a^p$ что противоречит предположению.

С л у ч а й 3. $\|a_n\| \ge 1$ и $0 < p < \infty$ доказывается аналогично случаю 2.

С л у ч а й 4. Пусть $\{a_n\}$ сходится по мере к a $(a_n, a \in K^+(A,\tau))$ и $p \in (0,\infty)$. Используя случаи 2 и 3 покажем, что a_n^p сходится по мере к a^p.

Элементы $b_n = a_n + 1$, $b = a + 1$ обратимы, причем $\|b_n^{-1}\| \le 1$ и $\|b^{-1}\| \le 1$. Легко показать, что b_n^{-1} сходится по мере к b^{-1}. Действительно, так как $b_n \to b$, то для любых $\varepsilon, \delta > 0$ существует

номер n_0 такой, что при $n \geq n_0$ $(b_n - b) \in N(\varepsilon, \delta)$.
Тогда из теоремы I.3.3, (i) и (v) и тождества

$$b_n^{-1} - b^{-1} = b_n^{-1}(b^{-1}(b - b_n)) + b^{-1}(b_n^{-1}(b - b_n)) -$$

$$-(b^{-1} b_n^{-1})(b - b_n)$$

вытекает, что

$$b_n^{-1} - b^{-1} \in N(\varepsilon, 9\delta) + N(\varepsilon, 9\delta) + N(\varepsilon, 3\delta) \subset$$

$$\subset N(3\varepsilon, 21\delta),$$

так как

$$\| b_n^{-1} \| \leq 1, \quad \| b^{-1} \| \leq 1, \| b^{-1} b_n^{-1} \| \leq 1.$$

Итак $(a_n + 1)^{-1} \longrightarrow (a + 1)^{-1}$, поэтому из теоремы I.3.3 следует, что $a_n(a_n + 1)^{-1} \to a(a + 1)^{-1}$.
Воспользовавшись результатами второго и третьего случая и соотношениями

$$\|a_n(a_n + 1)^{-1}\| < 1, \ \|a_n + 1\| \geq 1 \quad , \text{ получаем}$$

$$a_n^p((a_n + 1)^{-1})^p \longrightarrow a^p((a + 1)^{-1})^p \qquad \text{и}$$

$$(a_n + 1)^p \longrightarrow (a + 1)^p.$$

Перемножая элементы двух последних последовательностей и их пределы в силу теоремы I.3.3 получаем, что последовательность $\{a^p_n\}$ сходится по мере к элементу a^p для $p\in(0,\infty)$.

I.3.I0. С л е д с т в и е. Если последовательность $\{a_n\}\subset K(A,\tau)$ сходится по мере к элементу $a\in K(A,\tau)$, то $\{|a_n|\}$ сходится по мере к $|a|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно (теор.I.3.3 (iv)), что $a^2_n\to a^2$. Из теоремы I.3.8 (случай I) следует, что $\sqrt{a^2_n}\to\sqrt{a^2}$, т.е. $|a_n|\to|a|$ по мере.

Г Л А В А II

ПРОСТРАНСТВА L_p ДЛЯ ПОЛУКОНЕЧНЫХ СЛЕДОВ НА JBW - АЛГЕБРЕ

§ 2.1. Пространства L_p для $p\in[1,\infty)$.

В настоящем параграфе строятся пространства L_p, как пополнение идеала интегрируемых элементов JBW - алгебры по L_p - норме $(1\leq p<\infty)$ относительно точного нормального полуконечного следа и изучаются их свойства. На основе этих результатов в § 3.2 будут построены пространства L_p для полуконечных JBW - алгебр, ассоциированных с состоянием и весом.

Пусть A - JBW - алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ и $\mathfrak{M}_\tau$ - идеал интегрируемых элементов алгебры A.

2.1.1. Л е м м а. Пусть $1\leq p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Для любых $a,b\in\mathfrak{M}_\tau$ имеют место соотношения:

а) $\tau(|a\,b|)\leq(\tau(|a|^p))^{1/p}(\tau(|b|^q))^{1/q}$;

б) $(\tau(|a\,b|^p))^{1/p}\leq\|a\|(\tau(|b|^p))^{1/p}$;

в) $(\tau(|a|^p))^{1/p}=\sup\{|\tau(a\,b)|: b\in\mathfrak{M}_\tau, (\tau(|b|^q))^{1/q}\leq 1\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как в неравенствах а) и б) участвуют только два элемента, то в силу [31, лемма 2.3] можно считать, что A - JW - алгебра. Более того, можно показать, что JW - алгебра, порожденная двумя элементами и $\mathbb{1}$, обратима. В самом деле, пусть A - JW - алгебра и $a, b \in A$. Покажем, что слабое замыкание алгебры A_0, порожденной элементами a, b и $\mathbb{1}$ в является обратимой JW - алгеброй. Так как алгебра A_0 порождена элементами a, b и $\mathbb{1}$, то в силу теоремы 6 [34] она является алгеброй симметрических элементов ассоциативной алгебры $S(A_0)$ со стандартной инволюцией π, где $S(A_0)$- универсальная алгебраическая ассоциативная обертывающая алгебра A и σ является ассоциативной специализацией алгебры A в алгебру $S(A_0)$. Поскольку алгебра A_0 является подалгеброй B_{AS}, где B_{AS} - эрмитова часть алгебры всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве с инволюцией $*$, то существует гомоморфизм φ алгебры $S(A_0)$ в B такой, что для любого $x \in S(A_0)$ имеет место равенство

$$\varphi(\pi(x)) = (\varphi(x))^* ;$$

и для $x \in A_0$ $\quad \varphi(\sigma(x)) = x$.

Покажем, что $A_0 = [\varphi(S(A_0))]_{SA}$.

Ясно, что $A_0 \subset [\varphi(S(A_0))]_{SA}$, так как $\varphi \circ \sigma$ действует на A_0 тождественно.

Пусть $x \in [\varphi(S(A_0))]_{SA}$, тогда существует элемент $y \in S(A_0)$ такой, что $x = \varphi(y)$. Тогда

$$\varphi(\pi(y)) = (\varphi(y))^* = x^* = x = \varphi(y).$$

Поэтому $\varphi\left(\frac{y+\pi(y)}{2}\right) = x$. Так как $\frac{y+\pi(y)}{2} \in \sigma(A_0)$, то этот элемент является йордановым многочленом от $\sigma(a)$ и $\sigma(b)$. Следовательно, элемент x является йордановым многочленом от элементов $\varphi(\sigma(a))=a$ и $\varphi(\sigma(b))=b$. Поэтому $x\in A_0$.

Докажем теперь, что $\bar{A}_0 = (\overline{[\varphi(S(A_0))]})_{SA}$, где $^{-}$ означает замыкание по норме. Пусть $x\in(\overline{[\varphi(S(A_0))]})_{SA}$ тогда существует последовательность $\{x_n\}$ элементов алгебры $\varphi(S(A_0))$ сходящихся к x по норме. Так как инволюция $*$ непрерывна по норме, то $x_n^*\to x^*=x$. Рассмотрим последовательность $y_n=\frac{x_n+x_n^*}{2}$. Очевидно, что $y_n\to x$ по норме. Поскольку $y_n\in A_0$, то $x\in\bar{A}_0$.

Аналогично можно показать, что $\tilde{\bar{A}}_0=(\widetilde{[\varphi(S(A_0))]})_{SA}$, где $\sim$ означает слабое замыкание. Следовательно, $\bar{A}_0$ - обратимая JW - алгебра.

Итак, в доказательстве неравенств а) и б) не ограничивая общности можно считать, что A - обратимая - алгебра. Теперь в силу теоремы I [26] неравенства а) и б) будут следствием соответствующих неравенств, доказанных для алгебр фон Неймана (см. [59 теоремы 3.4, предложение 2.5 (iii)]).

в) Из неравенства а) следует, что

$$|\tau(ab)|\leq(\tau(|a|^p))^{1/p} \quad \text{при} \quad (\tau(|b|^q))^{1/q}\leq 1 .$$

Пусть

$$b_0 = \frac{|a|^{p-1}s}{(\tau(|a|^p))^{1/q}} \quad ,$$ где $a = s|a|$ - полярное разложение элемента a . Тогда

$$\tau(b_0 a) = \frac{\tau((|a|^{p-1}s)(s|a|))}{(\tau(|a|^p))^{1/q}} = \frac{\tau(((|a|^{p-1}s)|a|)s)}{(\tau(|a|^p))^{1/q}} =$$

$$= \frac{\tau((|a|^p s)s)}{(\tau(|a|^p))^{1/q}} = \frac{\tau(|a|^p)}{(\tau(|a|^p))^{1/q}} = (\tau(|a|^p))^{1/q} .$$

Следовательно

$$(\tau(|a|^p))^{1/p} = \sup\{|\tau(ab)| : b \in \mathfrak{M}_\tau, (\tau(|b|^q))^{1/q} \leq 1\}.$$

Лемма доказана.

2.I.2. С л е д с т в и е. Отображение $x \to (\tau(|x|^p))^{1/p}$ является нормой на $\mathfrak{M}_\tau$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для элементов $a, b \in \mathfrak{M}_\tau$ неравенство треугольника легко получить, используя лемму 2.I.I (i), (iii). Отметим предварительно, что

$$c = \frac{|a+b|^{p-1} s^*}{(\tau(|a+b|^p))^{1/q}}, \quad \text{где } a+b = s|a+b| \text{ - по-}$$

лярное разложение элемента $a+b$.

$$\|a+b\|_p = \tau(c(a+b)) = \tau(ca) + \tau(cb) \le \|a\|_p + \|b\|_p .$$

Далее, заметим, что в силу точности τ, из $(\tau(|a|^p))^{1/p} = 0 \quad (a \in A^+)$ следует $a = 0$.

И наконец, из определения I.2.I (ii) следует

$$(\tau(|\lambda a|^p))^{1/p} = \lambda(\tau(|a|^p))^{1/p} \quad \text{для любого } \lambda \in \mathbb{R}^+ .$$

Следствие доказано.

Введем обозначение $\|a\|_p = (\tau(|a|^p))^{1/p}$ и назовем $\|a\|_p$ L_p - нормой элемента a. Пополнение $\mathfrak{M}_\tau$ по L_p - норме обозначим $L_p(A,\tau)$.

2.I.3. С л е д с т в и е. Пусть $1 \le p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда имеют место соотношения:

а) $\|ab\|_1 \le \|a\|_p \|b\|_q \quad (a \in L_p(A,\tau),\ b \in L_q(A,\tau))$;

б) $\|ab\|_p \le \|a\|_p \|b\| \quad (a \in L_p(A,\tau),\ b \in A)$;

в) $\|a\|_p = \sup\{|\tau(a\ b)| : b \in L_p(A,\tau),\ \|b\|_q \leq 1\}$
$(a \in L_p(A,\tau))$.

Наша ближайшая цель: доказать, что пространства $L_p(A,\tau)$ иньективно вкладываются в $\mathfrak{O}\mathfrak{J}$ - алгебру $K(A,\tau)$, т.е. могут быть рассмотрены, как подпространства $\mathfrak{O}\mathfrak{J}$ - алгебры всех тотально измеримых элементов относительно JBW - алгебры A.

2.I.4. Л е м м а. Если $\{a_n\}$ - последовательность элементов из $L_p(A,\tau)$ и $\|a_n\|_p \to 0$, то $a_n \to 0$ по мере $(0 < p < \infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $|a_n| = \int_0^\infty \lambda de_\lambda^{(n)}$ - спектральное разложение элемента $|a_n|$. Тогда

$$\varepsilon^p \tau(1 - e_\varepsilon^{(n)}) \leq \int_0^\infty \lambda^p d\tau(e_\lambda^{(n)}) = \|a_n\|_p^p \longrightarrow 0$$

Следовательно для произвольного $\varepsilon > 0$,

$$\tau(1 - e_\varepsilon^{(n)}) \longrightarrow 0\ ,\ \|U_{e_\varepsilon^{(n)}} a_n\| = \|U_{e_\varepsilon^{(n)}} |a_n|\| \leq \varepsilon$$

Лемма доказана.

Из этой леммы и из полноты $K(A,\tau)$ в топологии сходимости по мере следует, что существует естественное линейное отображение пространства $L_p(A,\tau)$ в $K(A,\tau)$.

2.I.5. Т е о р е м а. Пусть $1 \leq p < \infty$. Тогда естественное отображение пространства $L_p(A,\tau)$ в $K(A,\tau)$ иньективно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{a_n\}$ – фундаментальная последовательность в $\mathfrak{M}_\tau$ по L_p – норме, $a_n \to 0$ по мере и $a_n \to a$ в L_p. Если $a \neq 0$, то существует $b \in \mathfrak{M}_\tau$ такой, что $\tau(b a_n)$ отделено от нуля для достаточно больших n в силу леммы 2.I.I (в). Из сходимости последовательности $\{a_n\}$ к нулю по мере следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует идемпотент e такой, что $\|U_e a_n\| < \varepsilon$, $\tau(1-e) < \varepsilon$ для достаточно больших n.

Разложим элемент a_n на пирсовские компоненты по идемпотенту e (см. [I2, стр. I24]). Тогда

$$|\tau(ba_n)| \leq |\tau(bU_e a_n)| + 2|\tau(bU_{e,1-e} a_n)| + |\tau(bU_{1-e} a_n)|$$

Используя соотношения 2.I.3 (б) и [7, теорема I] , оценим каждое слагаемое, стоящее в правой части неравенства

$$|\tau(bU_e a_n)| \leq \|b\|_1 \|U_e a_n\| \leq \|b\|_1 \varepsilon ;$$

$$2|\tau(bU_{e,1-e} a_n)| \leq 2\|b\| \, |\tau((1-e)(e a_n))| =$$

$$r\|b\|\|(1-e)(ea_n)\|_1 \le r\|b\|\|ea_n\|_p\|1-e\|_q \le$$

$$r\|b\|\|e\|\|a_n\|_p \cdot \varepsilon^{1/q};$$

$$|\tau(bU_{1-e}a_n)| \le \|b\|\|r(1-e)(1-e)a_n) - (1-e)a_n\|_1 \le$$

$$\|b\|\|r(1-e)a_n - a_n\|_p\|1-e\|_q \le \|b\|\|r(1-e)a_n -$$

$$-a_n\|_p\, \varepsilon^{1/q} \le \|b\|(r\|1-e\|+1)\|a_n\|_p\, \varepsilon^{1/q}.$$

Отсюда, в силу L_p - фундаментальности последовательности $\{a_n\}$ получаем, $|\tau(ba_n)| \to 0$, что противоречит предположению $\tau(ba_n)$ отделено от нуля.

Случай $p = 1$ доказывается аналогично доказательству теоремы 4.I [2] и теоремы 5 [40].

Теорема доказана.

Подалгебру $E(A,\tau)$ алгебры $K(A,\tau)$ определим следующим образом: $x \in E(A,\tau)$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует идемпотент $e \in \mathfrak{M}_\tau$ такой, что $\|U_{1-e}a\| < \varepsilon$.

Следующее предложение, как и предложение I.3.6., следует из леммы I.3.7.

2.I.6. П р е д л о ж е н и е. Если $a \in K(A,\tau)$ и

$|a| = \int_0^{+\infty} \lambda \, de_\lambda$ – спектральное разложение модуля $|a|$ элемента a, то следующие условия эквивалентны:

(i) $a \in E(A, \tau)$;

(ii) $\tau(\mathbb{1} - e_\lambda) < \infty$ для любого λ;

(iii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists e \in \nabla \cap \mathfrak{M}_\tau$ такой, что $\| U_{\mathbb{1}-e} a^2 \| < \varepsilon$.

2.I.7. Теорема. $L_p(A, \tau) \subset E(A, \tau)$ для любого $p \in [1, \infty)$.

Доказательство. Предположим обратное, т.е. для элемента $a \in L_p(A, \tau)$ положим $\tau(\mathbb{1} - e_\lambda) = \infty$ при некотором $\lambda > 0$. Тогда в силу предложения I.2.5 существует идемпотент $e \in \mathfrak{M}_\tau$ такой, что $e \le \mathbb{1} - e_\lambda$ и $\tau(e) > \lambda^p \|a\|_p^p$. Легко видеть, что $U_e a \geqslant \lambda e$. Теперь, используя неравенство 2.I.3 (a), придем к противоречию:

$$\|a\|_p \geqslant \frac{\tau(ae)}{\|e\|_q} = \frac{\tau(U_e a)}{(\tau(e))^{1/q}} \geqslant \frac{\tau(\lambda e)}{(\tau(e))^{1/q}} =$$

$$= \lambda (\tau(e))^{1/p} > \|a\|_p .$$

Теорема доказана.

2.I.8. Теорема. Пусть $1 \le p < \infty$. Тогда

$$L_p(A,\tau) = \{a \in E(A,\tau) : \tau(|a|^p) < \infty\}.$$

Доказательство. Если элемент $a \in L_p(A,\tau)$ является L_p- пределом последовательности $a_n \in \mathfrak{M}_\tau$, то из неравенства $\|a_n\|_p - \|a\|_p \le \|a_n - a\|_p$ следует, что $\tau(|a|^p) < \infty$, т.е. в силу теоремы 2.I.7

$$a \in \{a \in E(A,\tau) : \tau(|a|^p) < \infty\}.$$

Теперь достаточно доказать, что $\mathfrak{M}_\tau$ L_p - плотно в $\{a \in E(A,\tau) : \tau(|a|^p) < \infty\}$.

Пусть $a \in E(A,\tau)$ и $\tau(|a|^p) < \infty$. Если $a = s|a|$ — полярное разложение элемента a и $|a| = \int_0^\infty \lambda de_\lambda$ - спектральное разложение элемента $|a|$, то элементы $a_n = s|a|(e_n - e_{1/n})$ будут ограничены. Из определения 2.I.5 и предложения 2.I.6 (i) и (ii) следует, что идемпотенты $(e_n - e_{1/n})$ принадлежат идеалу $\mathfrak{M}_\tau$. Отсюда

$$a_n = (s|a|)(e_n - e_{1/n}) = ((s|a|)(e_n - e_{1/n}))(e_n - e_{1/n}) \in \mathfrak{M}_\tau.$$

В силу нормальности следа последовательность a_n из $\mathfrak{M}_\tau$ сходится к a по L_p - норме. Действительно

$$\|a-a_n\|_p=(\tau(|a|^p(1-e_n+e_{1/n})))^{1/p}\to 0.$$

Теорема доказана.

2.I.9. З а м е ч а н и я (а) В случае конечного следа имеют место следующие включения:

$$A\subset L_p(A,\tau)\subset L_q(A,\tau)\subset L_1(A,\tau)\quad(1\leq q<p<\infty).$$

Действительно, пусть $a\in L_p(A,\tau)$.

Без ограничения общности можно считать, что $|a|\geqslant 1$. Тогда из неравенства $|a|^q\leq|a|^p$ следует $a\in L_q$. Два остальных включения очевидны.

(б) Пусть τ - точный нормальный полуконечный след на A и $\mathfrak{M}_\tau^{1/p}=\{a\in A:\tau(|a|^p)<\infty\}$.

Тогда имеют место следующие включения

$$\mathfrak{M}_\tau\subset\mathfrak{M}_\tau^{1/q}\subset\mathfrak{M}_\tau^{1/p}\subset A\quad(1\leq q<p<\infty).$$

Покажем верность включения $\mathfrak{M}_\tau^{1/q}\subset\mathfrak{M}_\tau^{1/p}$.

Пусть $a\in\mathfrak{M}_\tau^{1/q}$ и $|a|=\int\limits_0^{\|a\|}\lambda de_\lambda$. Рассмотрим отдельно элементы с ортогональными носителями $a_1=\int\limits_0^1\lambda de_\lambda$ и $a_2=\int\limits_1^{\|a\|}\lambda de_\lambda$. Из неравен-

ства $a_1^p < a_1^q$ следует, что $a_1 \in \mathfrak{M}_\tau^{1/p}$.
Элемент a_2 ограничен и его носитель $\mathbb{1} - e_1 \in \mathfrak{M}_\tau$. Поэтому любая его степень $(p \in [1, \infty))$ интегрируема, а следовательно $a_2 \in \mathfrak{M}_\tau^{1/p}$. Отсюда $a \in \mathfrak{M}_\tau^{1/p}$.

В заключение этого параграфа докажем теорему, являющуюся аналогом классического утверждения двойственности пространств L_p.

2.I.I0. Т е о р е м а. Пусть A - JBW - алгебра, τ - точный нормальный полуконечный след на A. Тогда пространство $L_p^*(A,\tau)$ изометрически изоморфно пространству $L_q(A,\tau)$ $(1<p<\infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a \in L_q(A,\tau)$, тогда из неравенства 2.I.3. (а) следует, что
$ab \in L_1(A,\tau)$ для любого $b \in L_p(A,\tau)$.
Легко показать, что линейный функционал $f(b) = \tau(ab)$ непрерывен на $L_p(A,\tau)$. В самом деле, используя неравенство 2.I.3. (а) получаем

$$|f(b)| = |\tau(ab)| \leq \|a\|_q \|b\|_p .$$

Из соотношения 2.I.3. (в) следует, что норма функционала f совпадает с L_q - нормой элемента a.

В оставшейся части параграфа доказывается, что для любого непрерывного линейного функционала на $L_p(A,\tau)$

существует элемент $a \in L_q(A,\tau)$ такой, что $f=\tau(a\cdot)$. Для этого рассмотрим отдельно два случая (см. предложение I.I.II.)

I. $A = L^\infty(\Omega,\mu,M)$, где M - это либо M_3^8, либо спин фактор размерности ≥ 2.

II. A - обратимая JW - алгебра.

I. 2.I.II. Т е о р е м а. Пусть τ - точный нормальный полуконечный след на JBW - алгебре $A = L^\infty(\Omega,\mu,M)$ и f - непрерывный линейный функционал на $L_p(A,\tau)$ $(1<p<\infty)$. Тогда существует $a \in L_q(A,\tau)$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$ такой, что $f(b)=\tau(ab)$, $b \in L_p(A,\tau)$.

Доказательству этой теоремы предпошлем две леммы.

2.I.I2. Л е м м а. Пусть $1<p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $a \in K(A,\tau)$. Если $ab \in L_1(A,\tau)$ для любого $b \in \mathcal{M}_\tau$ и $\sup\{|\tau(ab)|: b \in \mathcal{M}_\tau, \|b\|_q \leq 1\} = N < \infty$, тогда $a \in L_p(A,\tau)$, $\|a\|_p \leq N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a = s|a|$ - полярное разложение элемента a и $b_n = s|a|^{p-1}$, тогда $a\,b_n = |a|^p$. Отсюда

$$N \geq \frac{\tau(ab)}{\|b_n\|^q} = (\tau(|a|^p))^{1/p}.$$

Лемма доказана.

2.I.I3. Лемма. Пусть $1<p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ и $a\in K(A,\tau)$. Если $ab\in L_1(A,\tau)$ для любого $b\in L_p(A,\tau)$, тогда $a\in L_q(A,\tau)$.

Доказательство. Легко видеть, что отображение $b\to ab$ $(L_p(A,\tau)\to L_1(A,\tau))$ имеет замкнутый график. Действительно, предположим, что $b_n\to b$ в $L_p(A,\tau)$ и $ab_n\to c$ в $L_1(A,\tau)$, тогда $b_n\to b$ по мере. Отсюда $a\,b_n\to ab$ по мере (см. теорему I.3.3). Но с другой стороны $ab_n\to c$ по мере. В силу единственности предела получаем $ab=c$.

Итак, линейное отображение $b\to ab$ $(L_p(A,\tau)\to L_1(A,\tau))$ имеет замкнутый график, следовательно оно непрерывно. Но тогда существует число N, для которого верно неравенство

$$\|a\,b\|_1\le N\|b\|_p \quad (b\in L_p(A,\tau)).$$

Из леммы 2.I.I2 следует, что $a\in L_q(A,\tau)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.I.II. В силу предложения I.2.7. можно считать, что след τ - конечен. Покажем, что сужение функционала f на A нормально. Пусть $x_\alpha\searrow 0$ в A, отсюда $\tau(x_\alpha)=\|x_\alpha\|_1\to 0$ в силу нормальности τ. Без ограничения общности можно считать, что $\|x_\alpha\|\le 1$. Тогда $x_\alpha^p\le x_\alpha$ $(p\ge 1)$

и получаем $\|x_\alpha\|_p^p = \tau(x_\alpha^p) \le \tau(x_\alpha) \to 0$. Отсюда следует, что $f(x_\alpha) \to 0$, т.е. f - нормален на A. Из теоремы I.2.4 следует, что существует $a \in L_1(A,\tau)$ такой, что $f(b) = \tau(ab)$ $(b \in A)$. Пусть $b \in L_p(A,\tau)$ и $b_n \in A$, $b_n \to b$ по L_p - норме. Тогда $b_n \to b$ по мере и $ab_n \to ab$ по мере (см. теорему I.3.3). Проверим L_1 - фундаментальность последовательности $\{ab_n\}$. Учитывая соотношение 2.I.3 (б) получаем:

$$\|ab_n - ab_m\|_1 = \sup\{|\tau(a(b_n - b_m)x)| : x \in A,$$

$$\|x\| \le 1\} = \sup\{|f((b_n - b_m)x)| : x \in A, \|x\| \le 1\} \le$$

$$\|f\| \|b_n - b_m\|_p .$$

Отсюда в силу полноты $L_1(A,\tau)$ $ab_n \to ab$ по L_1 - норме и

$$f(b) = \lim f(b_n) = \lim \tau(ab_n) = \tau(ab).$$

Из леммы 2.I.I3. следует, что $a \in L_q(A,\tau)$.

Теорема доказана.

П. Для завершения доказательства теоремы 2.I.I0 осталось рассмотреть второй случай.

2.I.I4. Т е о р е м а. Пусть A обратимая $-JW$ - алгебра, τ - точный нормальный полуконечный след. Тогда пространство $L_p^*(A,\tau)$ $(1<p<\infty)$ изометрически изоморфно пространству $L_q(A,\tau)$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{A}(A)$ – обертывающая алгебра фон Неймана для JW - алгебры A. Из теоремы I [26] следует, что точный нормальный полуконечный след τ, заданный на JW - алгебре A, можно продолжить до точного нормального полуконечного следа τ_1 на $\mathfrak{A}(A)$. Отсюда следует, что L_p - норма, заданная на пространстве $L_p(A,\tau)$, индуцируется L_p - нормой, заданной на пространстве $L_p(\mathfrak{A}(A),\tau_1)$ Поэтому, в силу полноты, $L_p(A,\tau)$ является замкнутым подпространством пространства $L_p(\mathfrak{A}(A),\tau_1)$.

Из теоремы 4.4 [59] видно, что

$L_p^*(\mathfrak{A}(A),\tau_1)=L_q(\mathfrak{A}(A),\tau_1)$ (для простоты договоримся отождествлять изометрически изоморфные пространства). В частности, из этого следует, что пространство $L_p(\mathfrak{A}(A),\tau_1)$ рефлексивно. Известно, что любое замкнутое подпространство рефлексивного пространства рефлексивно.

Отсюда получаем, что пространство $L_p(A,\tau)$ рефлексивно. Выше было доказано включение $L_q(A,\tau)\subset L_p^*(A,\tau)$. Предположим, что $L_q(A,\tau)\neq L_p^*(A,\tau)$, тогда в силу теоремы Хана-Банаха существует ненулевой непрерывный линейный функционал

$$f \in L_p^{**}(A,\tau) = L_p(A,\tau) \quad \text{такой, что}$$

$f(x) = 0$ для любого $x \in L_q(A,\tau)$, т.е. $\tau(f x) = 0$ для любого $x \in L_q(A,\tau)$. Отсюда, используя соотношение 2.I.3 (в) получаем

$$\|f\|_p = \sup\{|\tau(f\, x)| : x \in L_q(A,\tau),\ \|x\|_q \leq 1\} = 0,$$

т.е. $f = 0$, что противоречит предположению.
Отсюда $L_p^*(A,\tau) = L_q(A,\tau)$.

Теорема доказана.

Из теорем 2.I.II и 2.I.I4 как уже отмечалось, следует теорема 2.I.I0.

§ 2.2. Пространства L_p для $p \in (0,1)$.

В настоящем параграфе вводятся пространства L_p на JBW - алгебрах относительно точного нормального полуконечного следа для $p \in (0,1)$. В частности, показано, что оно является пространством Фреше и при определенных условиях имеет тривиальное сопряженное.

Пусть A - JBW - алгебра, τ - точный нормальный полуконечный след на A и $p \in (0,1)$. Положим

$$L_p(A,\tau) = \{a \in K(A,\tau) : |a|^p \in L_1(A,\tau)\},$$

где $L_1(A,\tau)$ – пространство интегрируемых элементов, присоединенных к A .

Как и в лемме 2.I.I., используя лемму 2.4 [35] можно показать, что

$$\mu(a,b) = (\tau(|a-b|^p))^{2/p} \quad \left(\frac{1}{2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\right)$$

является метрикой в пространстве $L_p(A,\tau)$ $(0<p<1)$.

2.2.I. Т е о р е м а. $L_p(A,\tau)$ - является пространством Фреше относительно метрики μ .

Доказательство этой теоремы опирается на следующий результат.

2.2.2. Т е о р е м а (Лемма Фату). Пусть

$\{a_n\} \subset L_1(A,\tau)$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} \|a_n\|_1 < \infty$ и a_n сходится по мере к $a \in K(A,\tau)$. Тогда $a \in L_1(A,\tau)$ и $\|a\|_1 \le \varliminf\limits_{n\to\infty} \|a_n\|_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.2.2. В силу следствия I.3.IO., не ограничивая общности будем считать, что элементы a_n, a - положительны.

Переходя к подпоследовательности, как и в доказательстве теоремы I.3.4., можно получить, что $U_{q_k} a_n \in A$ при $n \geqslant k$, $U_{q_k} a \in A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \| U_{q_k}(a_n - a) \| = 0$ для любого k, где $\{q_k\}$ некоторая последовательность идемпотентов, возрастающих к $\mathbb{1}$.

Из предложения I.2.5. следует, что существует семейство идемпотентов $\{p_{k,\alpha}\} \subset \mathfrak{M}_\tau$ возрастающее к q_k. Для таких $p_{k,\alpha}$ имеем:

$$\left| \| U_{p_{k,\alpha}} a_n \|_1 - \| U_{p_{k,\alpha}} a \|_1 \right| \leq \| U_{p_{k,\alpha}} (a_n - a) \|_1 =$$

$$\| U_{p_{k,\alpha}} U_{q_k} (a_n - a) \|_1 \leq \tau(p_{k,\alpha}) \| U_{q_k} (a_n - a) \| .$$

Отсюда

$$\tau(U_{p_{k,\alpha}} a) = \lim_n \| U_{p_{k,\alpha}} a_n \|_1 \leq \varliminf_n \| a_n \|_1 .$$

Теперь в силу нормальности следа τ и оператора $U_{a^{1/2}}$ получаем

$$\tau(U_{q_k} a) = \tau(U_{a^{1/2}} q_k) = \sup_\alpha \tau(U_{a^{1/2}} p_{k,\alpha}) =$$

$$= \sup_\alpha \tau(U_{p_{k,\alpha}} a) \quad \text{и}$$

$$\tau(a) = \sup_k \tau(U_{a^{1/2}} q_k) = \sup_k \tau(U_{q_k} a).$$

Отсюда следует, что

$$a \in L_1(A,\tau) \quad \text{и} \quad \|a\|_1 = \tau(a) \le \varliminf_n \|a_n\|_1 .$$

Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о   т е о р е м ы 2.2.I. Для доказательства теоремы достаточно показать полноту пространства $L_p(A,\tau)$ $(p \in (0,1))$ относительно метрики μ. Пусть последовательность $\{a_n\} \subset L_p(A,\tau)$ μ - фундаментальна. Тогда она фундаментальна в топологии сходимости по мере (лемма 2.I.4). В силу полноты $K(A,\tau)$ в топологии сходимости по мере (теорема I.3.4) существует элемент $a \in K(A,\tau)$ такой, что последовательность a_n сходится к a по мере. Из теорем I.3.3. и I.3.8. следует, что $|a_n - a_m|^p \to |a_n - a|^p$ по мере, при этом $|a_n - a_m|^p \in L_1(A,\tau)$. В силу μ - фундаментальности $\{a_n\}$ можно выбрать номер n_0 так, чтобы $\varliminf_{m\to\infty} \tau(|a_{n_0} - a_m|^p) < \infty$. Итак, выполнены все условия леммы Фату (теорема 2.2.2) для последовательности $\{|a_{n_0} - a_m|^p\}$. Следовательно

$|a_{n_0}-a_m|^p \in L_1(A,\tau)$ и $\tau(|a_{n_0}-a|^p) \le \lim\limits_{m\to\infty} \tau(|a_n-a_m|^p)$. Отсюда $a \in L_p(A,\tau)$ и последовательность $\{a_n\}$ сходится к a относительно метрики μ.

Теорема 2.2.I. доказана.

Рассмотрим пространство, сопряженное к пространству $L_p(A,\tau)$ $(p\in(0,1))$.

2.2.3. О п р е д е л е н и е. Идемпотент $e \in A$ называется м и н и м а л ь н ы м, если ни какой другой идемпотент принадлежащий A не меньше идемпотента e.

2.2.4. Л е м м а. Если JBW - алгебра A не содержит минимальных идемпотентов, то любая её максимальная сильно ассоциативная подалгебра A_0 также не содержит минимальных идемпотентов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что A_0 содержит минимальный идемпотент e. Тогда для любого идемпотента $f \in A_0$ либо $f \ge e$, либо $f\,e = 0$. Из условия леммы следует, что существует идемпотент $q \in A$ такой, что $q < e$, а значит для любого $f \in A_0$ верно либо $f > q$, либо $f\,q = 0$. Отсюда получаем, что q совместен с каждым идемпотентом из A_0, т.е. $q \in A_0$ [I2]. Но это противоречит предположению о том, что e минимальный идемпотент. Лемма доказана.

2.2.5. Л е м м а. Пусть $b \in L_p(A,\tau)$ $(p \in (0,1))$, $b = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$ – спектральное разложение элемента b и $b = s|b|$ – полярное разложение элемента b. Тогда последовательность $b_{(n)} = s|b|(e_n - e_{-n})$ сходится к b относительно метрики μ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу совместности элементов $s, |b|$ и e_n имеем

$$\mu(b, b_{(n)}) = (\tau(|b - b_{(n)}|^p))^{2/p} =$$

$$= \tau(|s|b| - s|b|(e_n - e_{-n})|^p)^{2/p} = \tau(|b|^p(1-(e_n - e_{-n})))^{2/p} \to 0.$$

Отсюда следует утверждение леммы 2.2.5.

Последний результат показывает, что если элемент $a \in K(A,\tau)$ принадлежит $L_p(A,\tau)$ $(p \in (0,1))$, то определяющую её μ – фундаментальную последовательность можно выбрать из максимальной сильно ассоциативной подалгебры в $K(A,\tau)$.

2.2.6. З а м е ч а н и я а). Если $\mathfrak{A}$ – алгебра $K(A,\tau)$ ассоциативна, то она изоморфна алгебре $L^0_{\mathbb{R}}(X, m)$ всех действительных измеримых функций на некотором пространстве X с полуконечной мерой m. При этом

$$A \cong L^{\infty}_{\mathbb{R}}(X, m), \; L_p(A,\tau) \cong L^{p}_{\mathbb{R}}(X,m).$$

б) Пусть A° - максимальная сильно ассоциативная подалгебра JBW - алгебры A. Тогда в силу леммы 2.2.5. имеем $L_p(A^{\circ},\tau^{\circ}) = L_p(A,\tau) \cap K(A^{\circ},\tau^{\circ})$, где τ° - сужение следа τ на A°.

2.2.7. Т е о р е м а. Пространство $L_p(A,\tau)$ $(p \in (0,1))$ не содержит минимальных идемпотентов тогда и только тогда, когда на нем нет ненулевых непрерывных линейных функционалов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть JBW - алгебра A не содержит минимальных идемпотентов, и A° ее максимальная сильно ассоциативная подалгебра. В силу леммы 2.3.4 A° также не содержит минимальных идемпотентов. Известно, что на $L_p(A^{\circ},\tau^{\circ})$ нет ненулевых непрерывных линейных функционалов, следовательно и на $L_p(A,\tau)$ также нет ненулевых непрерывных линейных функционалов.

Теорема доказана.

ГЛАВА Ш

ТЕОРЕМА РАДОНА - НИКОДИМА И ПРОСТРАНСТВА L_p ДЛЯ ВЕСОВ НА ПОЛУКОНЕЧНОЙ JBW - АЛГЕБРЕ

§ 3.I. Теорема Радона - Никодима

Основным результатом настоящего параграфа является теорема Радона-Никодима для произвольных нормальных полуконечных весов относительно точного нормального полуконечного следа на JBW - алгебре.

Пусть A - JBW - алгебра и $\mathcal{A}(A)$ множество элементов присоединенных к A. Тогда для произвольного $h \in \mathcal{A}(A)$ элемент $h_\varepsilon = h(\mathbb{1}+\varepsilon h)^{-1}$ ограничен, т.е. принадлежит JBW - алгебре A для любого $\varepsilon > 0$. Для элементов h, k из $\mathcal{A}(A)$ будем писать $h \leq k$, если $h_\varepsilon \leq k_\varepsilon$ для некоторого (а следовательно, для любого) $\varepsilon > 0$. Нетрудно видеть, что если $h, k \in \mathcal{L}(A) = S(X, M_3^8) \oplus \mathcal{L}(A_{sp})$, то этот порядок согласован с естественным порядком в OJ - алгебре $\mathcal{L}(A)$. Сеть положительных элементов $\{h_i\} \subset \mathcal{A}(A)$ будем называть возрастающей к элементу $h \in \mathcal{A}(A)$ $(h_i \uparrow h)$, по аналогии с [44], если $h_{i\varepsilon} \uparrow h_\varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Отметим, что $h_\varepsilon \uparrow h$ при $\varepsilon \searrow 0$, для любого $h \in \mathcal{A}(A)$.

Пусть A - JBW - алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ. Для любого положительного элемента $h \in A$ определим $\tau(h\cdot)$ как $\tau(hx) = \tau(U_{h^{1/2}}x)$, $x \in A^+$.

3.I.I. П р е д л о ж е н и е. Отображение $h \to \tau(h\cdot)$ является афинным и сохраняющим порядок отображением из A^+ в множество нормальных полуконечных весов на A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предложения I.I.II. достаточно рассмотреть отдельно три случая:

(i) $A = L^\infty(\Omega, \mu, M)$, где M - это либо M_3^8, либо спин фактор размерности $\geqslant 2$.

(ii) A - обратимая JW - алгебра, являющаяся эрмитовой частью вещественной алгебры фон Неймана $\mathcal{R}(A)$;

(iii) A - обратимая JW - алгебра, являющаяся эрмитовой частью алгебры фон Неймана $\mathcal{U}(A)$.

В случае (i) в силу предложение I.2.7. можно предполагать, что след τ конечен. Поэтому утверждение следует из [2, теорема 4.3., следствие].

В случае (iii) наше утверждение вытекает из предложения 4.I. [44].

Рассмотрим случай (ii) $A = \mathcal{R}(A)_{sa}$,

$$\mathcal{R}(A) \cap i\,\mathcal{R}(A) = \{0\}, \quad \mathcal{U}(A) = \mathcal{R}(A) + i\,\mathcal{R}(A).$$

В силу [26, теорема I] след τ можно продолжить до точного нормального полуконечного следа τ' на $\mathfrak{A}(A)$. В силу [44, предложение 4.I] отображение $h \to \tau'(h\cdot)$ является аффинным сохраняющим порядок отображением из $\mathfrak{A}(A)^+$ в множество нормальных полуконечных весов на $\mathfrak{A}(A)$. Следовательно, утверждение будет доказано, если мы покажем, что при $h \in A^+$ сужение $\tau'(h\cdot)$ на A, т.е. $\tau(h\cdot)$ является полуконечным весом на A. Напомним, что для $x \in \mathfrak{A}(A)^+ = (\mathcal{R}(A) + i\mathcal{R}(A))^+$, след τ' определяется как $\tau'(x) = \tau'(a+ib) = \tau(a)$, где $x = a+ib$, $a \in \mathcal{R}(A)^+ = A^+$, $b \in \mathcal{R}(A)$, $b^* = -b$. В силу полуконечности веса $\tau'(h\cdot)$ в $\mathfrak{A}(A)^+$ существует сеть $x_\alpha \uparrow \mathbb{1}$ такая, что $\tau'(hx_\alpha) < +\infty$ для всех α. Имеем

$$\tau'(h\cdot x_\alpha) = \tau'(h^{1/2}\cdot(a_\alpha + ib_\alpha)h^{1/2}) = \tau'(h^{1/2}\cdot a_\alpha h^{1/2} + ih^{1/2}\cdot b_\alpha h^{1/2}),$$

где $x_\alpha = a_\alpha + ib_\alpha$, $a_\alpha \in A^+$, $b_\alpha \in \mathcal{R}(A)$, $b_\alpha^* = -b_\alpha$.

Так как $h \in A^+$, то $h^{1/2}\cdot a_\alpha h^{1/2} \in A^+$, $h^{1/2}\cdot b\cdot h^{1/2} \in \mathcal{R}(A)$, $(h^{1/2}\cdot b_\alpha h^{1/2})^* = -h^{1/2}\cdot b_\alpha h^{1/2}$.

Следовательно

$$\tau'(h\cdot x_\alpha)=\tau(h^{1/2}\cdot a_\alpha h^{1/2})=\tau(h\cdot a_\alpha)<\infty.$$

В силу [53, лемма 3.3] из $x_\alpha\uparrow\mathbb{1}$ вытекает, что $a_\alpha\uparrow\mathbb{1}$. Следовательно $\tau(h\cdot)$ – полуконечный вес на A.

Предложение доказано.

Пусть теперь $h\in\mathcal{A}(A)^+$, $h_\varepsilon=h(\mathbb{1}+\varepsilon h)^{-1}$, $\varepsilon>0$

Так как $h_\varepsilon\uparrow h$, то $\{\tau(h_\varepsilon\cdot)\}$ является возрастающим семейством нормальных полуконечных весов на A при $\varepsilon\searrow 0$. Как и в [44] положим $\tau(h\cdot)=\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\tau(h_\varepsilon\cdot)$.

Используя предложение 4.2 из [44], как и в предложении 3.I.I доказывается следующее утверждение.

3.I.2. П р е д л о ж е н и е. Отображение $h\to\tau(h\cdot)$ является нормальным отображением из множества $\mathcal{A}(A)^+$ в множество нормальных полуконечных весов на A.

Теперь сформулируем и докажем основной результат этого параграфа.

3.I.3. Т е о р е м а (Радона-Никодима). Пусть A - JBW - алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ. Для любого нормального полуконечного веса φ на A существует единственный положительный элемент $h\in\mathcal{A}(A)$ такой, что $\varphi(x)=\tau(hx)$ для всех $x\in A^+$. Обратно, для любого $h\in\mathcal{A}(A)^+$ функция $\varphi=\tau(h\cdot)$ является нормальным полуконечным весом на A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вторая часть утверждения вытекает из предложения 3.I.2. Для доказательства первой части утверждения как и в предложении 3.I.I., можно отдельно рассмотреть три случая:

(i) $A = L^{\infty}(\Omega, \mu, M)$, где M это M_3^8 либо спин фактор

(ii) $A = \mathcal{R}(A)_{SA}$, $\mathcal{R}(A) \cap i\mathcal{R}(A) = \{0\}$;

(iii) $A = \mathcal{U}(A)_{SA}$

В первом случае в силу предложения I.2.7, можно предположить, что вес φ и след τ конечны. Поэтому утверждение теоремы вытекает из теоремы Радона-Никодима для нормальных линейных функционалов и конечных следов на JBW - алгебрах (2, теорема 4.3. следствие).

В случае (iii) утверждение вытекает из теоремы 5.I2 в [44] , так как в этом случае условие $h \in \mathcal{A}(A)$ в точности означает, что h присоединен к $\mathcal{U}(A)$.

Осталось рассмотреть случай (ii):

$$A = \mathcal{R}(A)_{SA}, \quad \mathcal{U}(A) = \mathcal{R}(A) + i\mathcal{R}(A),$$

$$\mathcal{R}(A) \cap i\mathcal{R}(A) = \{0\}.$$

Пусть $x \in \mathcal{U}(A)^+$, т.е. $x = a + ib$, где $a \in A$, $b \in \mathcal{R}(A)$, $b^* = -b$. Продолжим след τ и вес φ на $\mathcal{U}(A)$, положив $\tau'(x) = \tau(a)$, $\varphi'(x) = \varphi(a)$. В силу [26, теорема I]

τ' является точным нормальным полуконечным следом.

Из свойства $\mathcal{R}(A) \cap i\mathcal{R}(A) = \{0\}$ и полуконечности веса φ легко видеть, что φ' является полуконечным весом на $\mathcal{U}(A)$ (см. [36, лемма 2.3]). Нормальность φ' вытекает из того, что при $x_\alpha = a_\alpha + i b_\alpha$ из $x_\alpha \uparrow x$ следует $a_\alpha \uparrow a$ [53, лемма 3.3.]. Применяя к следу τ' и весу φ' теорему 5.12 из [44], найдем положительный самосопряженный оператор h, присоединенный к $\mathcal{U}(A)$ такой, что $\varphi' = \tau'(h\cdot)$. Нам нужно доказать, что в этом случае $h \in \mathcal{A}(A)$, т.е. все спектральные проекторы лежат в A.

Сначала предположим, что вес φ (а значит и вес φ') конечен. Тогда в силу теоремы Радона-Никодима для нормальных линейных функционалов относительно точных нормальных полуконечных следов существует

$h \in L_1(A, \tau) \subset \mathcal{M}(A) \subset \mathcal{A}(A)$ такой, что

$\varphi = \tau(h\cdot)$ (см. [7], [33, гл. V]).

Как в предложении 3.1.3. легко видеть, что $\varphi' = \tau'(h\cdot)$.

Теперь пусть φ - полуконечен. Известно [29], что нормальный вес φ' на $\mathcal{U}(A)$ есть предел возрастающей сети (ψ_α) нормальных положительных линейных функционалов. Положим $\varphi_\alpha = \psi_\alpha|_A$, тогда φ есть предел возрастающей сети нормальных линейных положительных функционалов $\{\varphi_\alpha\}$ на A.

В силу предыдущего абзаца существует возрастающая сеть положительных элементов $\{h_\alpha\} \subset L_1(A,\tau) \subset \mathcal{M}(A) \subset \mathcal{A}(A)$ таких, что $\varphi_\alpha = \tau(h_\alpha \cdot)$. Положим $\varphi'_\alpha = \tau'(h_\alpha \cdot)$ и покажем, что $\varphi'_\alpha(x) \uparrow \varphi'(x)$ для всех $x \in \mathcal{U}(A)^+$. Имеем для $x = a + ib$,

$$a \in A^+,\ b \in \mathcal{R}(A),\ b^* = -b.$$

$$\varphi'_\alpha(x) = \tau'(h_\alpha \cdot x) = \sup_{\varepsilon>0} \tau'(h_{\alpha\varepsilon}^{1/2} \cdot x \cdot h_{\alpha\varepsilon}^{1/2}) =$$

$$= \sup_{\varepsilon>0} \tau'(h_{\alpha\varepsilon}^{1/2} \cdot a \cdot h_{\alpha\varepsilon}^{1/2} + i h_{\alpha\varepsilon}^{1/2} \cdot b \cdot h_{\alpha\varepsilon}^{1/2}) =$$

$$= \sup_{\varepsilon>0} \tau(h_{\alpha\varepsilon}^{1/2} \cdot a \cdot h_{\alpha\varepsilon}^{1/2}) = \tau(h_\alpha \cdot a) =$$

$$= \varphi_\alpha(a) \uparrow \varphi(a) = \varphi'(a+ib) = \varphi'(x).$$

Таким образом $\tau'(h_\alpha x) \uparrow \tau'(hx)$ для всех $x \in \mathcal{U}(A)^+$. Из [44, предложение 4.2] следует, что $h_\alpha \uparrow h$ (см. также доказательство предложения 7.6 в [44]). Это означает по определению, что $h_{\alpha\varepsilon} \uparrow h_\varepsilon$ для всех $\varepsilon > 0$. В силу слабой замкнутости A в $\mathcal{U}(A)$, из $h_{\alpha\varepsilon} \in A$ для всех α следует, что $h_\varepsilon \in A$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ мы получаем, что $h \in \mathcal{A}(A)$, т.е. все спектральные проекторы положительного самосопряженного оператора h принадлежат A.

Теорема доказана.

Пусть $h \in \mathcal{A}(A)$, $h = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d e_\lambda$ - спектральное разложение h. Если $s \in A$ симметрия, то оператор U_s является инволютивным (т.е. периода 2) автоморфизмом A. Поэтому $\{U_s e_\lambda\}$ является спектральным семейством в A. Положим $U_s h = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d U_s e_\lambda$. Известно, что $h \in A$ является центральным, если $U_s h = h$ для всех симметрий $s \in A$. Элемент $h \in \mathcal{A}(A)$ назовем центральным, если $U_s h = h$ для любой симметрии $s \in A$, т.е. все спектральные проекторы h лежат в центре A. Это в свою очередь эквивалентно тому, что $U_s h_\varepsilon = h_\varepsilon$ для всех $\varepsilon > 0$ и любой симметрии $s \in A$, т.е. все h_ε лежат в центре A (см. [25, лемма 5.3]). Отметим так же, что для любого $h \in \mathcal{A}(A)$ и любой симметрии имеют место равенства

$$U_s h_\varepsilon = U_s(h(\mathbb{1}+\varepsilon h)^{-1}) = U_s h(\mathbb{1}+\varepsilon U_s h)^{-1} = (U_s h)_\varepsilon .$$

Для элемента a в OJ - алгебре $S(A)$ через $s(a)$ обозначим носитель a, т.е. наименьший

идемпотент, удовлетворяющий условию $s(a)a = a$.
Носителем элемента $a \in \mathcal{A}(A)$ назовем носитель элемента $a_\varepsilon = a(\mathbb{1} + \varepsilon a)^{-1}$. Теперь мы можем сформулировать следующее дополнение к теореме Радона-Никодима, уточняющее свойства производной Радона-Никодима h в представлении веса φ в виде $\tau(h\,\cdot)$.

3.I.4. С л е д с т в и е. Пусть A - JBW - алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ и $\varphi = \tau(h\,\cdot)$ - нормальный полуконечный вес на A.
Тогда

(i) вес φ конечен тогда и только тогда, когда $h \in L_1(A,\tau)$.

(ii) вес φ локально конечен тогда и только тогда, когда $h \in \mathcal{L}(A)$.

(iii) вес φ точен тогда и только тогда, когда носитель элемента h равен $\mathbb{1}$.

(iv) вес φ регулярен тогда и только тогда, когда носитель элемента h равен $\mathbb{1}$ и $h^{-1} \in \mathcal{L}(A)$.

(v) вес φ является следом тогда и только тогда, когда h центральный элемент в $\mathcal{L}(A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i). Первое утверждение очевидно, так как

$$\varphi(\mathbb{1}) = \tau(h\mathbb{1}) = \tau(h) = \sup_{\varepsilon>0} \tau(h_\varepsilon).$$

(ii) В силу предложения I.I.II. достаточно рассмотреть отдельно обратимые JW - алгебры и конечные JBW - алгебры, на которых любой полуконечный вес раскладывается по центру в сумму конечных.

В первом случае утверждение (ii) является следствием теоремы I (i) [18], так как при продолжении веса φ и следа τ до нормального полуконечного веса φ' и точного нормального полуконечного следа τ' на обертывающую алгебру фон Неймана $\mathcal{U}(A)$ производная Радона-Никодима для веса φ' относительно τ' будет присоединено к A (см. доказательство теоремы 3.I.5).

Во втором случае необходимость очевидна, так как каждый присоединенный элемент к конечной алгебре измерим. Достаточность следует из того, что каждый полуконечный вес, раскладываемый по центру в сумму конечных является локально конечным.

(iii). Пусть вес φ - точен. Тогда из

$$\varphi(\mathbb{1}-s(h_\varepsilon))=\tau(h(\mathbb{1}-s(h_\varepsilon))=\sup_{\varepsilon>0}\tau(h_\varepsilon(\mathbb{1}-s(h_\varepsilon)))=0$$

следует $\mathbb{1}-s(h_\varepsilon)=0$, т.е. носитель h равен единице. Обратно, пусть $s(h_\varepsilon)=\mathbb{1}$. Чтобы показать точность веса φ (в силу спектральной теоремы) достаточно доказать, что если p - идемпотент и $\varphi(p)=0$, то $p=0$. Итак, пусть $\varphi(p)=\sup\limits_{\varepsilon>0}\tau(U_{h_\varepsilon^{1/2}}p)=$

$\sup\limits_{\varepsilon>0} \tau(U_p h_\varepsilon) = 0$. Тогда в силу точности следа τ и положительности оператора U_p имеем $U_p h_\varepsilon = 0$, т.е. $p \cdot h = 0$ (см. [9, гл. Ш, § 3 предложение I]). Следовательно $(\mathbb{1}-p)h_\varepsilon = h_\varepsilon$, т.е. $\mathbb{1}-p \geqslant s(h_\varepsilon) = \mathbb{1}$, т.е. $p = 0$.

(iv) Пусть вес φ - регулярен. Тогда в силу предложения I.2.2 из (iii) следует, что $s(h_\varepsilon) = \mathbb{1}$.

Оставшаяся часть доказательства утверждения (iv) аналогична доказательству утверждения (ii).

(v) Пусть h - центральный элемент в $\mathcal{A}(A)$, т.е. $U_s h = h$ для любой симметрии $s \in A$. Учитывая это и свойство I.2.I (iii) следа τ имеем для любого $x \in A^+$:

$$\varphi(U_s x) = \tau(h U_s x) = \sup_{\varepsilon>0} \tau(U_{h_\varepsilon^{1/2}} U_s x) =$$

$$= \sup_{\varepsilon>0} \tau(U_s U_{h_\varepsilon^{1/2}} x) = \sup_{\varepsilon>0} \tau(U_{h_\varepsilon^{1/2}} x) =$$

$$= \tau(hx) = \varphi(x),$$

т.е. φ - след (здесь мы воспользовались тем, что h_ε лежит в центре A и поэтому $U_a U_{h_\varepsilon^{1/2}} = U_{h_\varepsilon^{1/2}} U_a$ для любого элемента $a \in A$).

Обратно, пусть φ - след, т.е. $\varphi(U_s x) = \varphi(x)$

для всех $x \in A^+$ и любой симметрии $s \in A$.

Учитывая свойство следа имеем:

$$\tau([U_s h]x) = \sup_{\varepsilon>0} \tau([U_s h]_\varepsilon x) =$$

$$= \sup_{\varepsilon>0} \tau([U_s h_\varepsilon] x) = \sup_{\varepsilon>0} \tau(U_s\{[U_s h_\varepsilon] x\}) =$$

$$= \sup_{\varepsilon>0} \tau([U_s U_s h_\varepsilon] U_s x) = \sup_{\varepsilon>0} \tau(h_\varepsilon U_s x) =$$

$$= \tau(h U_s x) = \varphi(U_s x) = \varphi(x) = \tau(hx).$$

Отсюда в силу единственности производной Радона-Никодима имеем $U_s h = h$, т.е. h - центральный элемент в $\mathcal{A}(A)$. Утверждение доказано.

Как следствие получаем следующий результат, принадлежащий Кингу [36].

3.I.5. Следствие. Пусть A - JBW - алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ. Для любого нормального полуконечного веса φ на A доминируемого следом τ (т.е. $\varphi \leq \lambda\tau$ при некотором $\lambda > 0$) существует положительный элемент $h \in A$ такой, что $\varphi(x) = \tau(U_{h^{1/2}} x)$ для всех $x \in A^+$. При этом φ конечный вес тогда и только тогда, когда $\tau(h) < +\infty$, φ является следом тогда и только тогда, когда h центральный элемент в A.

Доказательство следует из 3.I.4. (V) и того, что если $\varphi \leq \lambda\tau$, т.е. $\tau(h\cdot) \leq \tau(\lambda 1)$, то $0 \leq h \leq \lambda 1$, т.е. $h \in A$.

Утверждение доказано.

Основной результат этого параграфа можно переформулировать в терминах спектрального семейства.

3.I.6. С л е д с т в и е. Пусть A - JBW - алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ. Если φ - нормальный полуконечный вес на A, тогда существует единственное спектральное семейство $\{e_\lambda\}$ в A такое, что

$$\varphi(a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \tau(a \int_0^\infty \lambda(1+\varepsilon\lambda)^{-1} de_\lambda)$$

для любого $a \in A^+$. Обратно, каждое спектральное семейство $\{e_\lambda\} \subset A$ определяет нормальный полуконечный вес φ по той же формуле. При этом вес φ ограничен тогда и только тогда, когда $\int_0^{+\infty} \lambda d\tau(e_\lambda) < +\infty$; φ - локально конечен тогда и только тогда, когда существует последовательность центральных идемпотентов $q_n \uparrow 1$ такая, что идемпотенты $q_n(1-e_n)$ - модулярны при каждом $n = 1, 2, 3, \ldots$, φ - точен тогда и только тогда, когда $e_\varepsilon = 0$ для некоторого $\varepsilon > 0$; φ - след тогда и только тогда, когда все идемпотенты e_λ - центральны; φ доминирует τ тогда и только тогда, когда $e_{\lambda_0} = 1$ для некоторого $\lambda_0 \geq 0$.

§ 3.2. Пространства L_p, ассоциированные с локально конечным весом на полуконечных JBW-алгебрах $(p\in[1,\infty))$.

В этом параграфе введены пространства L_p относительно точного нормального локально конечного веса на полуконечной JBW - алгебре. Теорема Радона-Никодима, доказанная в предыдущем параграфе, здесь служит аппаратом, позволяющим обобщить результаты, полученные для полуконечных следов в § 2.I, на случай локально конечных весов. В частности, когда вес регулярен, дается описание введенных пространств L_p локально измеримыми элементами, присоединенными к JBW - алгебре, и для конечных весов (состояний) на JW - алгебрах дана реализация пространств L_p билинейными формами. Аналогичные пространства L_p для алгебр фон Неймана были рассмотрены в работах [I5], [I6].

Пусть φ - точный нормальный локально конечный вес на JBW - алгебре A с точным нормальным полуконечным следом τ и $L_p(A,\tau)$ - пространство измеримых элементов для A интегрируемых в p -ой степени (см. § 2.I). Тогда в силу следствия 3.I.4 (ii) существует локально измеримый элемент h такой, что $\varphi=\tau(h\cdot)$. Введем следующие обозначения:

$$\mathfrak{M}^{1/p}_{\varphi}=\{x\in A:\ U_{h^{1/2p}}x\in L_p(A,\tau)\},$$

$$\|x\|_p = (\tau(|U_{h^{1/2p}} x|^p))^{1/p}, \quad x \in \mathfrak{M}_\varphi^{1/p} \text{ и } p \in [1, \infty).$$

3.2.I. Т е о р е м а. Отображение $x \to \|x\|_p$ является нормой на $\mathfrak{M}_\tau^{1/p}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая, что $(\tau(|\cdot|^p))^{1/p}$ является нормой на $L_p(A, \tau)$ (следствие 2.I.2) и линейность оператора $U_{h^{1/2p}}$ получаем соотношения

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p, \quad \|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p$$

для любых $x, y \in \mathfrak{M}_\varphi^{1/p}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, т.е. $\|\cdot\|_p$ является преднормой на $\mathfrak{M}_\varphi^{1/p}$.

Пусть $\|x\|_p = 0$ для некоторого $x \in \mathfrak{M}_\varphi^{1/p}$, т.е. $U_{h^{1/2}} x = 0$. Покажем, что $x = 0$. Для этого рассмотрим отдельно два случая: I) A - JW - алгебра; 2) $A = C(X, M_3^8)$ (см. теорему I.2.II).

В первом случае из $U_{h^{1/2p}} x = h^{1/2p} \cdot x \cdot h^{1/2p} = 0$ и несингулярности оператора h следует, что $x = 0$. Если $A = C(X, M_3^8)$, то из универсальности OJ - алгебры $S(X, M_3^8)$ и из $s(h) = \mathbb{1}$ (следствие 3.I.4 (iii)) следует, что элемент h обратим в $S(X, M_3^8)$, т.е. оператор $U_{h^{1/2p}}$ обратим. Следовательно из $U_{h^{1/2p}} x = 0$ следует, что

$$U_{h^{-1/2p}} U_{h^{1/2p}} x = x = 0 .$$

Теорема доказана.

Пополнение линеала $\mathfrak{M}_\varphi^{1/2}$ по норме $\|\cdot\|_p$ обозначим $L_p(A, \varphi)$.

3.2.2. Л е м м а. Линеал $U_{h^{1/2p}} \mathfrak{M}_\varphi^{1/p}$ плотен в $L_p(A, \tau)$ $(p \in (0, \infty))$.

Доказательство этой леммы проходит аналогично доказательству теоремы 9 [16] . Пусть $h = \int\limits_0^\infty \lambda de_\lambda$ и $e_n = \int\limits_{1/n}^{n} de_\lambda$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$. Легко видеть, что множество $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_{e_n} \mathfrak{M}_\tau$ содержится в $U_{h^{1/2p}} \mathfrak{M}_\varphi^{1/p}$ $(\mathfrak{M}_\tau = \{x \in A : \tau(|x|) < \infty\})$.

Действительно, так как $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_\tau \subset L_p(A, \tau)$ и $h^{-1/2p} e_n \in A$ имеем, что для любого $z = U_{e_n} x \in \mathfrak{M}$ существует элемент $y = U_{h^{-1/2p}} z$ такой, что

$$z = U_{e_n} x = U_{h^{1/2p}} y \in U_{h^{1/2p}} \mathfrak{M}_\varphi^{1/p} .$$

Теперь осталось показать, что множество $\mathfrak{M}$ плотно в $L_p(A,\tau)$. В силу утверждения двойственности пространств $L_p(A,\tau)$ (см. § 2.I) для этого, в свою очередь, достаточно убедиться в равенстве нулю элемента $a \in L_q(A,\tau)$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$, если

$\tau((U_{e_n}x)z) = \tau(xU_{e_n}a) = 0$ для любого $x \in \mathfrak{M}_\tau$ и $n=1,2,3,\ldots$. Поскольку $U_{e_n}a \in L_q(A,\tau)$ и $\mathfrak{M}_\tau$ плотно в $L_p(A,\tau)$ (теорема 2.I.8), то элемент $U_{e_n}a$ равен нулю для любого $n=1,2,3,\ldots$. Учитывая, что $e_n \uparrow \mathbb{1}$ при $n\to\infty$ получаем $a=0$.

3.2.3. Т е о р е м а. Пространство сопряженное к $L_p(A,\varphi)$ изометрически изоморфно пространству $L_q(A,\varphi)$ ($p\in(1,\infty)$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 3.2.2 следует, что отображение $x \to U_{h^{1/2p}}x$ задает изометрический изоморфизм пространства $L_p(A,\varphi)$ в пространство $L_p(A,\tau)$. Теперь в силу теоремы 2.I.I0 получаем, что пространства $L_p^*(A,\varphi)$ и $L_q(A,\varphi)$ изометрически изоморфны.

Кононическая двойственность пространств $L_p(A,\varphi)$ и $L_q(A,\varphi)$ определяется формулой

$$f(b)=|\tau((U_{h^{1/2}}b)a)|=|\tau(U_{h^{1/2}p}b\,U_{h^{1/2}q}a)|\ (b\in L_p(A,\varphi)),$$

где $f\in L_p^*(A,\varphi)$, $a\in L_q(A,\varphi)$, $U_{h^{1/2}p}b\in L_p(A,\tau)$

и $U_{h^{1/2}q}a\in L_q(A,\tau)$.

Теорема доказана.

Пусть $p\in[1,\infty)$ и

$$\mathcal{L}_p(A,\varphi)=\{x\in\mathcal{L}(A)\,|\,U_{h^{1/2}p}x\in L_p(A,\tau)\}.$$

3.2.4. Т е о р е м а. Если вес φ - регулярен, то $L_p(A,\varphi)$ в точности совпадает с $\mathcal{L}_p(A,\varphi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отображение $x\to U_{h^{1/2}p}x$ является, очевидно, линейной изометрией из $\mathcal{L}_p(A,\varphi)$ в $L_p(A,\tau)$. Поскольку элемент h - обратим (следствие 3.I.4), то отображение $U_{h^{-1/2}p}=U_{h^{1/2}p}^{-1}$ является линейной изометрией из $L_p(A,\tau)$ на $\mathcal{L}_p(A,\varphi)$. Следовательно $\mathcal{L}_p(A,\varphi)$ полно относительно нормы $\|\cdot\|_p$. Образом плотного в $L_p(A,\tau)$ линеала $U_{h^{1/2}p}\mathfrak{M}_\varphi^{1/p}$ является линеал $\mathfrak{M}_\varphi^{1/p}$ (см. теорему 3.2.2), т.е. линеал $\mathfrak{M}_\varphi^{1/p}$

плотен в банаховом пространстве $\mathcal{L}_p(A,\varphi)$. Следовательно $\mathcal{L}_p(A,\varphi)$ совпадает с $L_p(A,\varphi)$ – пополнением $\mathfrak{M}_\varphi^{1/p}$ по норме $\|\cdot\|_p$.

Теорема доказана.

3.2.5. З а м е ч а н и я. а) Для конечных JBW - алгебр множество присоединенных элементов совпадает с OJ - алгеброй $\mathcal{M}(A)$ измеримых элементов. Поэтому пространство $L_p(A,\varphi)$, построенное по точному нормальному полуконечному весу φ на конечной JBW - алгебре A, вкладывается в OJ - алгебру $\mathcal{M}(A)$ измеримых элементов.

б) В случае, когда вес является следом, введенная конструкция пространства L_p совпадает с пространством L_p, построенным в параграфе 2.I.

В заключение дадим описание пространств L_p, ассоциированных с точным нормальным конечным, но не обязательно регулярным весом (ср. [I5]). В силу замечаний 3.2.5 (а) и предложения I.I.II представляют интерес только обратимые JW - алгебры.

Пусть A - полуконечная обратимая JW - алгебра над гильбертовым пространством H и φ - точное нормальное состояние на A. Зафиксируем на A точный нормальный полуконечный след τ. В силу следствия 3.I.4 (i) имеет место представление

$$\varphi(x) = \tau(hx) \quad (x \in A),$$

где $h \in L_1(A,\tau)$. Легко видеть, что для любого $x \in A$ элемент $U_{h^{1/2p}} x \in L_p(A,\tau)$.

Действительно

$$U_{h^{1/2p}} x \leq U_{h^{1/2p}} \|x\| \mathbb{1} = \|x\| h^{1/p} \in L_p(A,\tau).$$

Поэтому корректно определена функция

$$x \to \|x\|_p = (\tau(|U_{h^{1/2p}} x|^p)^{1/p} \qquad (x \in A),$$

являющаяся нормой на A (см. теорему 3.2.I).

3.2.6. Определение. Линеалом состояния φ назовем плотное в H линейное многообразие

$$D_\varphi = \{ \xi \in H \mid \exists \lambda > 0 : (a\xi, \xi) \leq \lambda \varphi(a) \quad (a \in A^+) \}.$$

Продолжим след τ, заданный на A, до точного нормального полуконечного следа τ' на обертывающую алгебру фон Неймана $\mathfrak{A}(A)$, как в доказательстве предложения 3.I.I. Тогда функция $\varphi'(\cdot) = \tau'(h\cdot)$ является точным нормальным состоянием на $\mathfrak{A}(A)$ продолжающим φ (см. доказательство теоремы 3.I.3). Каждый элемент $x \in \mathfrak{A}^+(A)$ имеет представление $x = a + ib$, где A - чисто вещественная JW - алгебра, $a \in A^+$, b принадлежит вещественной обертывающей алгебре фон Неймана $\mathcal{R}(A)$ и

$b^* = -b$. Как и в доказательстве теоремы 3.I.5 имеем $\tau'(x) = \tau(a)$ и $\varphi'(x) = \varphi(a)$.

3.2.7. Лемма. Пусть A чисто вещественная JW - алгебра и $x \in \mathfrak{A}^+(A)$, т.е. $x = a + ib$, где $a \in A^+$, $b \in \mathcal{R}(A)$ и $b^* = -b$. Тогда элемент $\bar{x} = a - ib$ также положителен.

Доказательство. Так как оператор $a + ib$ положителен, то имеет место представление

$$a + ib = (p + iq)(p + iq)^*, \quad \text{где } p, q \in R(A).$$

Выразим a и b через p и q

$$a + ib = (p + iq)(p + iq)^* = pp^* + qq^* + i(qp^* - pq^*),$$

т.е. $a = pp^* + qq^*$ и $b = qp^* - pq^*$. Теперь из $a - ib = pp^* + qq^* - i(qp^* - pq^*) = (p - iq)(p - iq)^*$ получаем, что $\bar{x} = a - ib \geq 0$.

Лемма доказана.

Напомним [22], [I4], [I5], что линеалом состояния φ' называется плотное в H линейное многообразие

$$\mathcal{D}_{\varphi'} = \{ f \in H \mid \exists \lambda > 0 : (xf, f) \leq \lambda \varphi'(x) \, (x \in \mathfrak{A}^+(A)) \}.$$

3.2.8. П р е д л о ж е н и е. Для обратимых JW - алгебр $\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{D}_{\varphi'}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае, когда A является эрмитовой частью алгебры фон Неймана, имеем
$A^+ = \mathfrak{A}^+(A)$, следовательно $\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{D}_{\varphi'}$.

Пусть теперь A - чисто вещественная JW- алгебра (см. предложение 3.I.2.). Тогда из включения
$A^+ \subset \mathfrak{A}^+(A)$ следует включение $\mathcal{D}_{\varphi'} \subset \mathcal{D}_\varphi$. Для завершения доказательства остается показать, что $\mathcal{D}_\varphi \subset \mathcal{D}_{\varphi'}$.

Пусть $f \in \mathcal{D}_\varphi$, т.е. существует $\lambda > 0$ такое, что $(af, f) \leq \lambda \varphi(a)$ для любого $a \in A^+$. Покажем, что существует такое число $\mu > 0$, для которого $(xf, f) \leq \mu \varphi'(x)$ при любом $x = a + ib \in \mathfrak{A}^+(A)$. Из леммы 3.2.7 и соотношений

$$((a+ib)f, f) = (af, f) + (ibf, f),$$

$$((a-ib)f, f) = (af, f) - (ibf, f).$$

имеем $(af, f) \geq |(ibf, f)|$. Отсюда получаем

$$(xf, f) = (af, f) + (ibf, f) \leq 2(af, f) \leq$$

$$\leq 2\lambda\varphi(a) = 2\lambda\varphi'(x), \quad \text{т.е.} \quad \mu = 2\lambda$$

Предложение доказано.

Под билинейной формой на $\mathcal{D}_\varphi$ будем понимать функцию a, сопоставляющую каждой паре $f,g\in\mathcal{D}_\varphi$ комплексное число $a(f,g)$, причем эта функция линейна по первому и антилинейна по второму аргументу. Билинейная форма называется эрмитовой, если $a(f,g)=\overline{a(g,f)}$ $(f,g\in\mathcal{D}_\varphi)$.

3.2.9. Определение. Эрмитову билинейную форму a, заданную на линеале состояний, назовем P_A - интегрируемой, если существует последовательность $\{a_n\}\subset A$ (назовем ее P_A - определяющей для a) такая, что

$$(i)\quad a(f,g)=\lim_{n\to\infty}(a_n f,g)\quad (f,g\in\mathcal{D}_\varphi);$$

$$(ii)\quad \|a_n-a_m\|\to 0\quad (m,n\to\infty).$$

3.2.10. Замечание. Пространство P_A - интегрируемых билинейных форм является подпространством пространства P - интегрируемых билинейных форм, введенных в работе [15].

В силу предложения 3.2.8 и замечания 3.2.10 следующее утверждение является следствием теоремы 3 [15].

3.2.11. Теорема. Пусть A - полуконечная обратимая JW - алгебра с точным нормальным состоянием φ. Тогда для каждой P_A - интегрируемой билинейной формы a на $\mathcal{D}_\varphi$ величина $\|a\|_p=\lim_{n\to\infty}\|a_n\|_p$ не зависит от выбора ее P_A - определяющей последовательности $\{a_n\}$. Линейное пространство $L_p(A,\varphi)$ всех p_A - интегрируемых билинейных форм на $\mathcal{D}_\varphi$ является банаховым относительно нормы $a \to \|a\|_p$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А ю п о в Ш.А. О конструкции йордановых алгебр самосопряженных операторов. Доклады АН СССР, 1982, т.367, № 3, с. 521-524.
2. А ю п о в Ш.А. Интегрирование на йордановых алгебрах. Известия АН СССР, серия математическая, 1983, т.47, № 1, с. 3-25.
3. А ю п о в Ш.А. Локально измеримые операторы для JW-алгебр. Известия АН СССР, серия математическая, 1984, т.48, № 2, с. 211-236.
4. А ю п о в Ш.А., Б е р д и к у л о в М.А. Теоремы о сходимости мартингалов на йордановых алгебрах. Деп. ВИНИТИ, 1983, № 5044-83. Деп., 44 с.
5. А ю п о в Ш.А. JW - факторы и антиавтоморфизмы алгебр фон Неймана. Известия АН СССР, серия математическая, 1984, т.48, № 6, с.
6. А ю п о в Ш.А. О существовании йордановых алгебр самосопряженных операторов заданного типа. Сиб.мат. журнал, 1984, т.25, № 5, с. 3-8.
7. Б е р д и к у л о в М.А. Пространства L_1 и L_2 для полуконечных JBW - алгебр. Доклады АН УзССР, 1982, № 6, с.3-4.
8. З о л о т а р е в А.А. Пространства L_p относительно состояния на алгебре Неймана и интерполяция. Изв. ВУЗов. Матем., 1982, № 8, с.36-43.

9. Ж е в л а к о в К.А., С л и н ь к о А.М., Ш е с т а-к о в И.П., Ш и р ш о в А.И. Кольца, близкие к ассоциативным. - М.: Наука, 1978, 432 с.

10. С а р ы м с а к о в Т.А., А ю п о в Ш.А. Частично упорядоченные йордановы алгебры. Доклады АН СССР, 1979, т. 249, № 4, с. 789-792.

11. С а р ы м с а к о в Т.А. Полуполя и теория вероятностей. Ташкент, Фан, 1981, 96 с.

12. С а р ы м с а к о в Т.А., А ю п о в Ш.А., Х а д ж и-е в Дж., Чилин В.И. Упорядоченные алгебры. Ташкент, Фан, 1983, 304 с.

13. Т и х о н о в О.Е. Пространства типа L_p относительно веса на алгебре Неймана. Изв. ВУЗов. Матем., 1982, № 8, с. 76-78.

14. Т р у н о в Н.В., Ш е р с т н е в А.Н. К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса. I. - Изв. ВУЗов. Матем., 1978, № 7, с.79-- 88.

15. Т р у н о в Н.В. О некоммутативном аналоге пространства L_p. - Изв. ВУЗов. Матем., 1979, № 11, с.69-77.

16. Т р у н о в Н.В. Пространства L_p, ассоциированные с весом на полуконечной алгебре Неймана. - В сб.: Конструктивн. теория функций и функц. анализ. Казань, 1981, вып. 3, с. 88-92.

17. Т р у н о в Н.В. Интегрирование в алгебрах Неймана и регулярные веса. - В сб.: Конструктивн. теория функций и функц. анализ. Казань, 1981, вып.3, с.73-87.

18. Т р у н о в Н.В. К теории нормальных весов на алгебрах Неймана. Изв. ВУЗов. Матем., 1982, № 8, с.61-- 70.

19. Х о л е в о А.С. Исследование по общей теории статистических решений. - Труды МИ АН СССР, т.124. -М.: Наука, 1976, 140 с.

20. Х о л е в о А.С. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. - М.: Наука, 1980, 320 с.

21. Ш е р с т н е в А.Н. К общей теории состояний на алгебрах фон Неймана. Функциональный анализ и его прилож., 1974, т.8, № 3, с. 89-90.

22. Ш е р с т н е в А.Н. Каждый гладкий вес является ℓ - весом. - Изв. ВУЗов, Матем., 1977, № 8, с. 88-91.

23. Ш е р с т н е в А.Н. К общей теории меры и интеграла в алгебрах Неймана. Изв. ВУЗов. Матем. 1982, № 8. с. 20-35.

24. Э м х Ж. Алгебраические методы статистической механики и квантовой теории поля. М.: "Мир", 1976, 424 с.

25. A l f s e n E.M., S h u l t z F.W., S t o r m e r F., A Gelfand - Neumark theorem for Jordan algebras. Advances in Math., 1978, vol. 28, No 1, p.11-56.

26. A j u p o v Sh.A. Extension of traces and type criterions for Jordan algebras of self - adjoint operators. Math. Z., 1982, vol. 181, p. 253-268.

27. D i x m i e r J. Formes lineaires sur un anneu d'operateurs. - Bull. Soc. math. France, 1953, t.81, p. 9-39.

28. E f f r o s E.G., S t o r m e r E. Jordan algebras of self-adjoint operators. Trans. Amer. Math.Soc., 1967, vol. 127, p. 313-316.

29. H a a g e r u p U. Normal weights on W^*-algebras. - J. Funct. Anal., 1975, v. 19, No 3, p. 302-317.

30. H a a g e r u p U. L_p - spaces associated with an arbitrary von Heumann algebras. Coll. int CNRS, 1979, No 274, p. 175-184.

31. H a a g e r u p U., H a n c h e - O l s e n H. Tomita-Takesaki theory for Jordan algebras. Preprint Odense Universitet, 1982, No 4,p.1-35.

32. H i l s u m M. Les espaces L_p d'une algebre de von Neumann definies par la dervie spatiale. J.Funct. Anal., 1981, v. 40, No 2, p. 151-169.

33. J o c h u m B. Cones autopolaires et Algebras de Jordan. Lect. Notes 1049, 1984.

34. J a c o b s o n N. Structure and representations of Jordan algebras. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 39, Providence R.I., 1968, X + 453 p.

35. K i c h i - S u k e S a i t o. Non commutative L_p - spaces with $0 < p < 1$. Proc. Camb. Phil. Soc., v.89, 1981, c. 405-411.

36. K i n g W.P.C. Semifinite Traces on JBW-algebras. Math. Proc. Comb. Phil. Soc. 1983, 93,No 3, 503-509.

37. K u n z e R.A. L_p Fourier transforms on locally compact unimodular groups. Trans. Amer.Math.Soc., 1958, v.89, No 2, p. 519-540.

38. M u r r a y F., v o n N e u m a n n J., On rings of operators. I., Ann. of Math. 1936, vol. 37, p. 116 - 229.

39. M u r r a y F., v o n H e u m a n n J., On rings of operators, II, Trans. Amer. Math., Soc.,1937, vol. 41, p. 208-248.

40. N e l s o n E., Nores on non commutative integration theory. J. Functional Analysis. 1974, vol. 15 p. 103 - 116.

41. v o n N e u m a n n J., On rings of operators. III. Ann of Math., 1940, vol. 41, p. 94-161.

42. O g a s a w a r a T., Y o s h i n a g a K., A non commutative theory of integration for operators. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser, A. 1955, vol. 18, No 3, p. 311-347.

43. P a d m a n a b h a n A.K., Convergence in measure and related results in finite rings of operators. Trans. Amer. Math. Soc. 1967, v. 128, p. 359 - 388.

44. P e d e r s e n G.K., Takesaki M. The Radon-Nikodym theorem for von Neumann algebras. Acta.Math.1973, v.130, No 1-2, p. 53-87.

45. S a k a i S., C^*- algebras and W^*- algebras. Ergebnisse der Math. 60, Berlin: Springer, 1971, XII + 256 p.

46. S a n k a r a n S., The $*$- algebras of unbounded operators. J. London Math. Soc. 1959, vol. 34, p. 337-344.

47. S a n k a r a n S. Stochastic convergence for operators. Quart. J. Math. Oxford, 1964, Ser. 2, No 15, p. 97-102.

48. S e g a l I., A non commutative extension of abstract integration. Ann. of Math. 1953, vol. 57, p.401-457.

49. S h u l t z F.W., On normed Jordan algebras which are Banach dual spaces. J. Functional Analysis, 1979, vol. 31, No 3, 360-376.

50. S t a c e y P.J. Type I_2 JBW - algebras. Quort. J. Math., 1982, v. 33, No 129, p.115-127.

51. S t i n e s p r i n g W.F., Integration theorems for gages and duality for unimodular groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1959, vol.90, p. 15-56.

52. S t o r m e r E., Jordan algebras of type.I. Acta Math., 1966, vol. 115, No 3-4, p. 165-184.

53. S t o r m e r E., Irreducible Jordan algebras of self-adjoint operators. Trans. Amer. Math. Soc. 1968, vol. 130, p. 153-166.

54. S t o r m e r E., Real structure in the hyperfinite factor. Duke Math. J. 1980, vol.47, No 1, p.145-153.

55. T a k e s a k i M., Theory of operator algebras.I. New-York Heidelberg Berlin: Springer, 1979, XII + 415 p.

56. T o p p i n g D. Jordan algebras of self-adjoint operators. Mem. Amer. Math. Soc., 1965, No 53, p. 1-48.

57. T o p p i n g D., An isomorphism invariant for spin factors. J. Math. and Mech. 1966, vol. 15, p. 1055-1064.

58. Y e a d o n F.J., Convergence of measurable operators. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1973, vol.74, p. 257-268.

59. Y e a d o n F.J. Non-commutative L_p spaces. Math. Proc. Cambrisge Phil. Soc., 1975, v. 77, No 1, p. 91-102.

60. А б д у л л а е в Р.З. Пространства L_p для йордановых алгебр с полуконечным следом. Деп. ВИНИТИ, № I875-83, Деп. I9 с.

6I. А б д у л л а е в Р.З. L_p - пространства для йордановых алгебр $(0 < p \leq 1)$. Докл. АН УзССР, I983, № 9, с. 4-6.

62. А б д у л л а е в Р.З. Неассоциативные пространства L_p. Известия АН УзССР, серия физ.-мат. наук. I983, № 6, с. 3-5.

63. А ю п о в Ш.А., А б д у л л а е в Р.З. Теорема Радона-Никодима и пространства L_p для весов на полуконечных JBW - алгебрах. Деп.ВИНИТИ, I984, № 2469-84, Деп.26 с.