УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
АЗЕРБАЙДЖАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
им. С. М. КИРОВА

№ 2 1957

Дж. Э. АЛЛАХВЕРДИЕВ

О СКОРОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ КОНЕЧНОМЕРНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В дальнейшем будем рассматривать линейные[1] операторы в пространстве Гильберта H, через $D(A)$ будем обозначать область определения оператора A, а через $K(A)$ — область значений оператора A, т. е. $AD(A) = K(A)$.

1°. Оператор A, определенный в пространстве H, называется конечномерным, если $K(A)$ — конечномерное подпространство в H ($\bar{K}(A)$ — замыкание $K(A)$).

Мы будем рассматривать конечномерные операторы, определенные на всем H. Такие операторы являются ограниченными[2] (более того, вполне непрерывными).

Относительно конечномерных операторов справедлива следующая.

Теорема. Пусть A — конечномерный, именно, n-мерный оператор, определенный в H. Тогда существует такое n-мерное подпространство $E(A)$, что $AE(A) = A\gamma(A) = K(A)$. $A[H \ominus E(A)] = 0$, причем A^* — также n-мерный оператор и $E(A^*) = K(A)$ также $E(A) = K(A^*)$.

Доказательство. Пусть A — ограниченный конечномерный оператор, определенный в H, тогда A^* существует и определен также всюду в H. При любых $f \in H$ $g \perp K(A)$ ($g \perp K(A)$ означает, что g ортогонален всем элементам из $K(A)$) имеем: $(f, A^*g) = (Af, g) = 0$, следовательно, $A^*g = 0$ для $g \in H \ominus K(A)$. Следовательно, $A^*H \in A^*K(A) + A^*[H \ominus K(A)] = A^*K(A)$, т. к. $K(A) \in H$, то $AK(A) \in AH$. Так как $K(A)$ n-мерное подпространство, то $A^*H = A^*K(A)$ подпространство не более, чем n-мерное. Но если $f \in K(A)$ (т. е. $f = Ag$ при некотором g), тогда при $f \neq 0$ $(A^*f, g) = (f, Ag) = (f, f) \neq 0$. И так $A^*f \neq 0$. Это означает, что $A^*K(A)$ точно n-мерное подпространство, ибо элементы вида $A^*f_1, A^*f_2, \ldots A^*f_n$, где $f_1, f_2, \ldots f_n$ линейно-независимые элементы из $K(A)$, образуют линейно независимую систему.

Таким образом доказано, что оператор A^* — n-мерный оператор, причем существует n-мерное подпространство $E(A^*) = KA$ и $A^*E(A^*) = A^*H = K(A^*)$.

---

[1] Оператор будем называть линейным, если он однороден и аддитивен.

[2] Отметим, что не все конечномерные операторы ограничены. Например оператор $Af(x) = f(a)\varphi(x)$, определенный на множестве непрерывных функций пространства $L_2(a, b)$ не ограничен, даже не замкнут, но одномерен.

Остается доказать, что $AK(A^*) = AH = K(A)$. Пусть $f \perp K(A^*)$, тогда при любом $g \in H$ имеем $(Af, g) = (f, A^*g) = 0$. Следовательно $Af = 0$, что означает $AH = AK(A^*)$. Приняв $E(A) = K(A^*)$, получаем что $AE(A) = K(A)$, $A[H - E(A)] = 0$. Таким образом, теорема полностью доказана.

2°. О вполне непрерывных операторах

Пусть A — вполне непрерывный оператор, определенный в пространстве H, а L — некоторое подпространство пространства H.

Справедлива следующая:

Теорема. Существует такая пара элементов f_0, g_0, что $\sup\limits_{f \in L, \|f\| = \|g\| = 1} |(Af, g)| = |(Af_0, g_0)|$, причем $f_0 = \alpha P_L A^* g_0$, где P_L — проекционный оператор подпространства L, а α — любое число, для которого $|\alpha| = \dfrac{1}{\|P_L A g_0\|} = \dfrac{1}{\|A\|_L}$, $\|A\|_L = \sup\limits_{f \in L, \|f\| = 1} \|Af\|$.

Доказательство. Так как A — вполне непрерывный оператор, то $\sup |(Af, g)| \leqslant \|A\|_L \leqslant \|A\|$, если $\|A\|_L = 0$, то предложение доказано и $f_0 = g_0 = 0$. Допустим, что $\|A\|_L > 0$. Тогда существуют последовательности $\{f_i\}$, $\{g_i\}$, что $\lim\limits_{i \to \infty} |(Af_i, g_i)| = \sup\limits_{f \in L, \|f\| = \|g\| = 1} |(Af, g)|$,

но так как $|(Af_i, g_i)| \leqslant |(Af_i, g'_i)|$, то $\lim |(Af_i, g'_i)| = \sup\limits_{f \in L, \|f\| = \|g\| = 1} |(Af, g)|$,

где $g'_i = \dfrac{Af_i}{\|Af_i\|}$. Понятно, что $\|Af_i\| \to \|A\|_L$, следовательно, для достаточно больших i, т. е. $i > N(\delta)$ $\|Af_i\| > \|A\|_L - \delta$ при как угодно малых $\delta > 0$.

Имеем:

$$g'_i - g'_k = \left\| \frac{Af_i}{\|Af_i\|} - \frac{Af_k}{\|Af_k\|} \right\| = \left\| \frac{\|Af_k\| \cdot Af_i - \|Af_i\| Af_k}{\|Af_k\| \cdot \|Af_i\|} \right\| =$$

$$= \frac{1}{\|Af_k\| \, \|Af_i\|} \cdot \left\| \|Af_k\| \cdot Af_i - \|Af_i\| Af_k \right\| =$$

$$= \frac{1}{\|Af_k\| \cdot \|Af_i\|} \left\| \|Af_k\| \cdot Af_i - \|Af_k\| Af_k + \|Af_k\| Af_k - \|Af_i\| Af_k \right\| =$$

$$= \frac{1}{\|Af_k\| \cdot \|Af_i\|} \cdot \left\| \|Af_k\| \cdot (Af_i - Af_k) + (\|Af_k\| - \|Af_i\|) Af_k \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\|Af_k\| \cdot \|Af_i\|} \cdot \left[\|Af_k\| \cdot \|Af_i - Af_k\| + \|Af_k\| \cdot \|Af_i - Af_k\| \right] \leqslant$$

$\leqslant \dfrac{2}{\|A\|_L - \delta} \|Af_i - Af_k\|$. Так как $\|f_i\| = 1$, а A — вполне непрерывный оператор, то получаем, что g'_i содержит сходящуюся подпоследовательность.

Пусть g'_{i_k} — та самая подпоследовательность и g_0 — ее предел: $\lim\limits_{k \to \infty} g'_{i_k} = g_0$, $g_0 = \lim \dfrac{Af_{i_k}}{\|Af_{i_k}\|}$.

Ввиду оценки:

$$\left|\left(Af_{i_k}, g_0\right) - \left(Af_{i_k}, g'_{i_k}\right)\right| = \left|\left(Af_{i_k}, g_0 - g'_{i_k}\right)\right| \leqslant \| Af_{i_k} \| \cdot \| g_0 - g_{i_k} \|$$

имеем:

$$\lim |(Af_{i_k}, g_0)| = \lim |(Af_{i_k}, g'_{i_k})| = \sup_{f \in L\, \|f\| = \|g\| = 1} |(Af, g)|,$$

поэтому

$$\sup_{f \in L,\, \|f\| = \|g\| = 1} |(Af, g)| = \sup_{f \in L\, \|f\| = 1} |(Af, g_0)|$$

Учитывая, что для любой пары элементов $f, g \in H$, $(Af, g) = (f, A^*g)$, получим:

$$\sup_{f \in L\, \|f\| = \|g\| = 1} |(Af, g)| = \sup_{f \in L\, \|f\| = 1} |(Af, g_0)| = \sup_{f \in L\, \|f\| = 1} |(f, A^*g_0)| = \sup_{\|f\| = 1} |(P_L f, A^*g_0)| =$$

$$= \sup_{\|f\| = 1} |(f, P_L A^*g_0)|$$

Так как $\sup\limits_{\|f\| = 1} |(f, g)|$ при фиксированном g достигается для элементов $f = \alpha g$, $|\alpha| = \frac{1}{\|g\|}$ и только для них, то

$$\sup_{f \in L\, \|f\| = \|g\| = 1} |(Af, g)| = \sup_{f \in L\, \|f\| = 1} |(Af, g_0)| = \sup_{f \in L\, \|f\| = 1} |(f, A^*g_0)| = \sup_{f \in H\, \|f\| = 1} |(f, P_L A^*g_0)| =$$

$= |(f_0, P_L A^*g_0)|$, где $f_0 = \alpha P_L A^*g_0$, причем из того, что $\|f\| = 1$, получаем α — любое число, удовлетворяющее условию $|\alpha| =$

$$= \frac{1}{\| P_L A^*g_0 \|} = \frac{1}{\| A \|_L}, \quad \text{ибо} \quad \| Af_0, g_0 \| =$$

$$= \sup_{f \in L\, \|f\| = \|g\| = 1} |(Af, g)| = \sup_{f \in L\, \|f\| = 1} \| Af \| = \| A \|_L$$

Но, с другой стороны,

$$|(Af_0, g_0)| = |(\alpha P_L A^*g_0, P_L A^*g_0)| = |\alpha| \, \| P_L A^*g_0 \|^2 = \| P_L A^*g_0 \|,$$

следовательно, $|\beta| = \left|\frac{1}{\alpha}\right| = \| P_L A^*g_0 \| = \| A \|_L = \| Af_0 \|$. Таким образом, предложение полностью доказано.

Существует пара элементов f_0 и g_0 — такие, что

$$\sup |(Af, g)| = |(Af_0, g_0)|, \qquad \text{причем } f_0 = \alpha P_L A^*g_0, \; |\alpha| = \frac{1}{\| A \|_L}$$

3°. Построим теперь последовательности $\{f_i\}$, $\{g_i\}$ и подпространства L_i, F_i, R_i, G_i следующим образом: $L_1 = R_1 = H$, $L_i = H \ominus F_i$, $R_i = H \ominus G_i$, F_i — замкнутая линейная оболочка элементов $f_1 \ldots f_{i-1}$, G_i — замкнутая линейная оболочка элементов $g_1 \ldots g_{i-1}$. Если известно F_i, то элементы f_i, g_i определяются из условия:

$$\sup_{f \in L_i\, \|f\| = \|g\| = 1} |(Af, g)| = |(Af_i, g_i)|$$

Из 2° известно, что f_i и g_i, определяемые этим условием, существуют и связаны соотношением $f = \alpha_i P_{L_i} A^*g_i$, где $\frac{1}{|\alpha_i|} = \| A \|_{L_i}$. Покажем, что $(g_i g_k) = \delta_{ik}$ и $f_i = \alpha_i A^* g_i$, т. е. $A^* g_i \in L_i$. При $i = 1$ это вытекает из $L_1 = H$; $P_{L_1} = E$ (E — единичный оператор). Предположим, что это справедливо для $i = n$, т. е. $f_i = \alpha_i A^* g_i$ ($i = 1, 2 \ldots n$). Покажем, что, во-первых $(g_i, g_{n+1}) = 0$ $i = 1, 2 \ldots n$, во-вторых $f_{n+1} = \alpha_{n+1} A^* g_{n+1}$.

Предположим обратное: пусть $(g_i, g_{n+1}) = c \neq 0$ $i < n+1$, тогда $|c| < 1$ ($|c| = 1$ не может быть, так как это означало бы

$g_{n+1} = \alpha g_i$, $|\alpha| = 1$ и $(f_{n+1}, A^* g_{n+1}) = \bar{\alpha}(f_{n+1}, A^* g_i) = \bar{\alpha}(f_{n+1}, f_i) = 0$.

Следовательно, $Af = 0$, $f \in L_{n+1}$ и A — оператор n-мерный, что нас не интересует).

Для элемента $\frac{1}{\sqrt{1-|c|^2}}(g_{n+1} - cg_i) = g'_{n+1}$ имеем: $\| g'_{n+1} \|^2 =$

$$= \frac{1}{1-|c|^2} \cdot (g_{n+1} - cg_i, g_{n+1} - cg_i) = \frac{1}{1-|c|^2}\Big[\| g_{n+1} \|^2 - \bar{c}(g_{n+1}, g_i) -$$

$$- c(g_i, g_{n+1}) + |c|^2 \cdot \| g_i \|^2\Big] = \frac{1}{1-|c|^2} \cdot \Big[1 - |c|^2\Big] = 1.$$

$$\Big|\Big(Af_{n+1}, g'_{n+1}\Big)\Big| = \Big|\Big(f_{n+1}, Ag'_{n+1}\Big)\Big| = \frac{1}{\sqrt{1-|c|^2}}\Big|\Big(f_{n+1}, A^* g_{n+1} -$$

$$- cA^* g_i\Big)\Big| = \frac{1}{\sqrt{1-|c|^2}}\Big|(f_{n+1}, A^* g_{n+1}) - c(f_{n+1}, A^* g_i)\Big| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-|c|^2}}\Big|f_{n+1}, A^* g_{n+1})\Big| > \Big|(f_{n+1}, A^* g_{n+1})\Big|,$$ что противоречит определению f_{n+1}, g_{n+1}. Следовательно, $(g_{n+1}, g_i) = 0$ $i < n+1$.

Теперь докажем равенство: $f_{n+1} = \alpha_{n+1} A^* g_{n+1}$. В силу $f_{n+1} = \alpha_{n+1} P_{L_{n+1}} A^* g_{n+1}$ достаточно доказать, что $A^* g_{n+1} \in L_{n+1}$, т. е. $(f_k, A^* g_{n+1}) = 0$ при $k = 1, 2 \ldots n$.

Пусть это не так, тогда при некотором $k < n+1$, $\frac{1}{\| A^* g_{n+1} \|}$ $(A^* g_{n+1}, f_k) = c \neq 0$ (ясно, что $|c| < 1$, т. к. $|c| = 1$ влечет $A^* g_{n+1} = \alpha f_k$, $|\alpha| = \| A^* g_{n+1} \|$ и $|(f_{n+1}, A^* g_{n+1})| = |\alpha| \cdot |(f_{n+1}, f_k)| = 0$, откуда $\| A \|_{L_{n+1}} = 0$ и A — n-мерный оператор, что нас не интересует). Для элемента $g'_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1-|c|^2}}(g_{n+1} - c\bar{g}_k)$ где $\bar{g}_k = \frac{Af_k}{\| Af_k \|}$

$$\text{имеем: } \Big\| g'_{n+1} \Big\|^2 = \frac{1}{1-|c|^2}(g_{n+1} - c\bar{g}_k, g_{n+1} - c\bar{g}_k) =$$

$$= \frac{1}{1-|c|^2}\Big[\| g_{n+1} \|^2 - |c|^2 \| \bar{g}_k \|^2\Big] = \frac{1}{1-|c|^2}[1 - |c|^2] = 1.$$

$$\Big|(Af_{n+1}, g'_{n+1})\Big| = \frac{1}{\sqrt{1-|c|^2}}\Big|(Af_{n+1}, g_{n+1} - c\bar{g}_k)\Big| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-|c|^2}}\Big|(f_{n+1}, A^* g_{n+1}) - c(f_{n+1}, A^* \bar{g}_k)\Big| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-|c|^2}} \left| (f_{n+1}, A^*g_{n+1}) \right| > |(f_{n+1}, A^*g_{n+1})| = |(Af_{n+1}, g_{n+1})|,$$

что противоречит определению f_{n+1}, g_{n+1}. Таким образом, $A^*g_{n+1} \in L_{n+1}$ и $f_{n+1} = \alpha_{n+1} A^*g_{n+1}$. Докажем, что $|\beta_i| = \left|\frac{1}{\alpha_i}\right| \to 0$ при $i \to \infty$. Так как A^* вполне непрерывен, а $\|g_i\| = 1$, то всякая подпоследовательность $\{A^*g_{i_k}\}$ должна содержать сходящуюся подпоследовательность. По доказанному $A^*g_{i_k} = \beta_{i_k} f_{i_k}$, следовательно, последовательность $\{\beta_k f_k\}$ и всякая ее подпоследовательность должны содержать сходящуюся подпоследовательность. Если существовала бы предельная точка β последовательности $\{\beta_i\}$, отличной от нуля $\beta \neq 0$, $\lim \beta_{i_k} = \beta$, тогда подпоследовательность $\{\beta_{i_k} f_{i_k}\}$ не могла бы содержать сходящуюся подпоследовательность, ибо

$$\|\beta_{i_k} f_{i_k} - \beta_{i_j} f_{i_j}\|^2 = (\beta_{i_k} f_{i_k} - \beta_{i_j} f_{i_j}, \beta_{i_k} f_{i_k} - \beta_{i_j} f_{i_j}) =$$

$|\beta_{i_k}|^2 \|f_{i_k}\|^2 + |\beta_{i_j}|^2 \|f_{i_j}\|^2 = |\beta_{i_k}|^2 + |\beta_{i_j}|^2 > 2|\beta - \varepsilon| > |\beta|$ при достаточно больших $i_k\, i_j$, $|\varepsilon| < \frac{|\beta|}{2}$, следовательно, $\lim \beta_i = 0$.

Таким образом, доказано следующее:

1. $\sup\limits_{f \in L_i,\ \|f\| = \|g\|} |(Af, g)| = |(Af_i, g_i)| = |\beta_i|$.

где $L_i = H - F_i$. F_i — замкнутая линейная оболочка элементов $f_i \ldots f_{i-1}$, $F_1 = 0$.

2. $A^*g_i = \beta_i f_i$ $\quad |\beta_i| \geq |\beta_{i+1}|$ $\quad$ и $\lim \beta_i = 0$,

$(f_i, f_k) = (g_i, g_k) = \delta_{ik}$. Пусть G_i — замкнутая линейная оболочка элементов $g_i, \ldots g_{i-1}$, тогда получим:

$A^*G_i = F_i \qquad \|A^*\|_{R_i} = |\beta_i|, \qquad$ где $\qquad R_i = H \ominus G_i$.

4. Введем подпространства L, F, G, R следующим образом: F — минимальное подпространство, содержащее все подпространства F_i $(i = 1, 2 \ldots)$, L — максимальное подпространство, содержащееся во всех подпространствах L_i $(i = 1, 2 \ldots)$. Так же вводятся подпространства R и G.

Понятно, что $f_1 \ldots f_n \ldots$ будет базисом на F, $g_i \ldots g_n \ldots$ будет базисом на G. Покажем, что $A^*g = 0$, если $g \in R$. Так как $g \in R$, то $g \in R_i$ при любом i, следовательно, $\|A^*g\| \leq \|A^*\|_{G_i} \|g\| = |\beta_i| \cdot \|g\|$, т. к. $|\beta_i| \to 0$, то получаем, что $\|A^*g\| = 0$, следовательно, $A^*g = 0$.

Покажем, что оператор A^* можно представить в виде $A^*f = \Sigma (f, g_i) \cdot \beta_i f_i$, где $f_i\ g_i$ и β_i — определены выше. Во-первых, такой оператор имеет смысл (определен) для любого $f \in H$, т. к.

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}(f, g_i)\beta_i f_i, \sum_{i=1}^{\infty}(f, g_i)\beta_i f_i\right) = \sum \left|(f, g_i)\right|^2 (f_i, f_i)|\beta_i|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\left|(f, g_i)\right|^2 |\beta_i|^2 \leqslant \operatorname{Sup}_i |\beta_i| \sum_k \left|(f, g_k)\right|^2 \leqslant \operatorname{Sup}_i |\beta_i| \, \| f \| .$$

Теперь покажем, что такой оператор совпадает с оператором A^* на всем H. Так как $H = R + G$, а A^* — линейный вполне непрерывный оператор и $A^*f = 0$ при $f \in R$, то для любого элемента f имеем $f = \varphi_1 + \varphi_2$ $\varphi_1 \perp \varphi_2$ $\varphi_1 \in G$ $\varphi_2 \in R$, $A^*f = A^*\varphi_1 + A^*\varphi_1 = A^*\varphi_1$, но так как $\varphi_i \in G$, то $\varphi_1 = \sum_{i=1}^{\infty}(\varphi_1, g_i) g_i$. Откуда $A^*\varphi_1 = \Sigma(\varphi_1, g_i) A^*g_i = \Sigma(\varphi_1, g_i) \cdot \beta_i f_i$, так как $(\varphi_i g_i) = 0$ (ввиду $G \perp R$) при $f \in R$, то элемент $\Sigma (f, g_i)\beta_i t_i = 0$ для $f \in R$. Следовательно, оператор A^* и оператор $\sum_{i=1}^{\infty}(f, g_i) \cdot \beta_i f_i$ совпадают на всем пространстве H.

Покажем, что оператор A можно представить в виде:

$$Af = \Sigma (f, f_i)\overline{\beta}_i g_i$$

При любых $f, g \in H$ имеем:

$$(Af, g) = (f, A^*g) = (f, \Sigma (g, g_i)\beta_i f_i) = \Sigma (f, \beta_i f_i)\overline{(g, g_i)} =$$

$$= \Sigma (f, f_i)\overline{\beta}_i (g_i, g) = (\Sigma (f, f_i)\overline{\beta}_i g_i, g),$$

откуда следует, что $Af = \Sigma (f, f_i)\overline{\beta}_i g_i$. Отметим, что из $A^*g_i = \beta_i f_i$, $(f_i, f_k) = \delta_{ik}$, $(g_i g_k) = \delta_{ik}$ следует $Af_i = \overline{\beta}_i g_i$, если $\left\{g_i\right\}$ полна на H. В самом деле, $A^*g_i = \beta_i f_i$ $(t_i, f_k) = \delta_{ik}$ $(g_i g_k) = \delta_{ik}$ дает: $A^*f = A^* \sum_{i=1}^{\infty}(f, g_i) g_i = \Sigma (f, g_i)\beta_i f_i$, а последнее эквивалентно $Af = \Sigma (f, f_i)\overline{\beta}_i g_i$. Ввиду $(f_i, f_k) = \delta_{ik}$ получаем $Af_i = \overline{\beta}_i g_i$. Напомним, что из определения f_i видно, что $\left\{c_i f_i\right\}$, где $|c_i| = 1$ обладает всеми теми же свойствами 1 и 2, какими обладает $\left\{f_i\right\}$, поэтому в представлении $Af = \Sigma (f, f_i)\beta_i g_i$ последовательности $\left\{f_i\right\}$ и $\left\{g_i\right\}$ можно подобрать так, что бы числа β_i были бы действительными или даже положительными, тогда получим:

$$Af = \Sigma (f, f_i)\beta_i g_i \qquad A^*f = \Sigma (f, g_i)\beta_i f_i$$

Введем операторы: H_1, H_2, U_1, U_2 таким образом:

$$H_1 f = \Sigma (f, f_i)\beta_i f_i \qquad H_2 f = \Sigma (f, g_i)\beta_i g_i$$

$$U_1 f = \Sigma (f, f_i) g_i \qquad U_2 f = \Sigma (f, g_i) f_i$$

Из доказанного выше следует, операторы H_1 и H_2 — самосопряженные операторы (в случае $\beta_i \neq \overline{\beta}_i$ они были бы нормальными операторами) с собственными значениями β_i и собственными элементами соответственно f_i и g_i.

В силу ортонормированности последовательностей $\{f_i\}$ и $\{g_i\}$ операторы U_1 и U_2 на F и G изометрические, а на L и R равны нулю. Но если L и R имеют одинаковую размерность, то можно подобрать ортонормированные системы $\{\varphi_i\}$ и $\{\Psi_i\}$ соответственно на L, R и U_1', определить на L, а U_2' на R, таким образом $U_1' f = \Sigma (f, \varphi_i) \Psi_i$, а U_2' на R $U_2' f = \Sigma (f, \Psi_i \varphi_i)$.

В дальнейшем будем считать, что L и R имеют одинаковую размерность, тогда операторы

$$U_1 f = \Sigma (f, f_i) g_i + \Sigma (f, \varphi_i) \Psi_i$$

$$U_2 f = \Sigma (f, g_i) f_i + \Sigma (f, \Psi_i) \varphi_i$$

будут унитарными, более того, $U_1^* U_2$. В самом деле:

$$(U_1 f, U_1 f) = (\Sigma (f, f_i) g_i + \Sigma (f, \varphi_i) \Psi_i, \Sigma (f, f_i) g_i + \Sigma (f, \varphi_i) \Psi_i) =$$

$$= \Sigma |(f, f_i)|^2 + \Sigma |(f, \varphi_i)|^2 = \| f \|.$$

Покажем, что операторы A и A* представимы в виде:

$$A = U_1 H_1 \qquad A^* = U_2 H_2.$$

$$U_1 H_1 = U_1 (\Sigma (f, f_i) \beta_i t_i) = \Sigma (t, t_i) \beta_i U_1 f_i = \Sigma (f, f_i) \beta_i \cdot$$

$$\cdot \left[\sum_k (f_i, f_k) g_k + \Sigma (f_i, \varphi_k) \Psi_k \right] = \Sigma (f, f_i) \beta_i g_i = Af.$$

Так же получим, что $A^* f = U_2 H_2 f$.

Из $A = U_1 H_1$ следует: $A^* = H_1 U_1^* = H_1 U_2$, а из $A^* = U_2 H_2$ получаем, что $A = H_2 U_1$.

5.° О наилучшем приближении вполне непрерывных операторов конечномерными операторами

Пусть A_n^0 — один из операторов, которые обеспечивают наилучшее приближение оператора A среди n-мерных операторов (существование такого оператора мы пока не показываем, далее мы докажем, что такой оператор существует). Это означает, что $\| A - A_n^0 \| = \inf\limits_{A_n} \| A - A_n \| = \xi_n (A)$, где A_n пробегает множество всевозможных n-мерных операторов в H. По результатам 1°, существует n-мерное подпространство $E(A_n^0)$, такое, что $A_n^0 E(A_n^0) = K(A_n^0)$, $A_n^0 (H \ominus E(A_n^0)) = 0$. Пусть $E_n^0 = H \ominus E(A_n^0)$, тогда имеем: $\| A - A_n^0 \| \geq \| A - A_n \|_{E_n^0} = \| A \|_{E_n^0}$, следовательно $\| A \|_{E_n^0} \leqslant \xi_n (A)$.

Но так как оператор $A P_{E(A_n^0)} = A_n$, где $P_{E(A_n^0)}$ — проекционный оператор подпространства $E(A_n^0)$, удовлетворяет условию:

$\| A-A_n' \| = \| A \|_{E^0} \leqslant \xi_n(A)$, то выходит, что $\| A \|_{E^0_n} = \xi_n(A)$ (в силу того, что $\xi_n(\overset{n}{A})$ есть наилучшее приближение). Это означает, что $\xi_n(A) = \inf\limits_{E_n} \| A \|_{E_n}$, где E_n пробегает всевозможные подпространства, ортогональные дополнения которых являются n-мерными подпространствами, т. е. $H \ominus E_n$ n-мерно. Поэтому достаточно найти подпространство E'_n, для которого $\| A \|_{E'_n} = \inf \| A \|_{E_n}$.

Докажем, что L_{n+1} обладает этим свойством и $\xi_n(A) = | \beta_{n+1} |$ (L_{n+1} и β_n определены в 3°).

Во-первых $\xi_n(A) \leqslant | \beta_{n+1} |$, так как оператор $A_n' = A P_{F_{n+1}}$ удовлетворяет условию $\| A - A_n' \| = | \beta_{n+1} |$, где $P_{F_{n+1}}$—проекционный оператор подпространства F_{n+1} ($F_{n+1} = H \ominus L_{n+1}$). Покажем, что $\inf \| A \|_{E_n} \geqslant \| A \|_{L_{n+1}}$, откуда будет следовать $\xi_n(A) = | \beta_{n+1} |$. Так как $\| A \|_{F_{n+2}} \geqslant | \beta_{n+1} |$, то достаточно показать, что на любом подпространстве E_n, для которого $H \ominus E_n = Q_n$ n-мерное подпространство, будет хотя бы один элемент из подпространства F_{n+2}.

Пусть $Q_n = H \ominus E_n$ — n-мерное подпространство, тогда $P_{F_{n+2}} Q_n$— — подпространство не более чем n-мерное и $P_{F_{n+2}} Q_n \in F_{n+2}$. Ортогональное дополнение подпространства $P_{F_{n+2}} Q_n$ на подпространстве F_{n+2} будет подпространство не менее чем одномерное, значит, в подпространстве F_{n+2} существует хотя бы один элемент φ, ортогональный к подпространству $P_{F_{n+2}} Q_n$. Этот элемент будет ортогонален ко всему Q_n, так как F_{n+2} ортогонален к $Q_n \ominus P_{F_{n+2}} Q_n$. Таким образом φ ортогонален Q_n. Тогда $\varphi \in E_n = H \ominus Q_n$, следовательно, $\| A \|_{F_{n+1}} \geqslant \dfrac{\| A\varphi \|}{\| \varphi \|}$, но так как $\varphi \in F_{n+2}$, то $\| A\varphi \| \geqslant | \beta_{n+1} | \cdot \| \varphi \|$, следовательно, $\| A \|_{F_{n+1}} \geqslant | \beta_{n+1} |$ и т. $\inf\limits_{E_n} \| A \|_{E_n} \geqslant | \beta_{n+1} |$. Принимая во внимание $\| A \|_{L_{n+1}} = | \beta_{n+1} |$ получим $\inf \| A \|_{E_n} = | \beta_{n+1} |$.

Таким образом, оператор $A_n = AP_{F_{n+1}}$, где $P_{F_{n+1}}$ оператор проектирования на F_{n+1}, дает наилучшее приближение оператора A среди n-мерных операторов.

Отметим, что оператор $A_n = AP_{F_{n+1}}$ — не единственный оператор, дающий наилучшее приближение $\xi_n(A)$. Таков, например, оператор $A_n + B_n$, где B_n — оператор, который удовлетворяет условиям $B_n L_{n+1} = 0$, $B_n F_{n+1} \in G_n$ $\| B_n \| \leqslant \xi_n(A)$. В самом деле, $[A - (A_n + B_n)] f = (A - A_n - B_n)(f_1 + f_2) = B_n f_1 + Af_2$. Причем $B_n f_1 \perp Af_2$, так как $f_1 \in F_{n+1}$ $f_2 \in L_{n+1}$ означает $\| f_1 \| + \| f_2 \| = \| f \|$.

$$\| (A - A_n - B_n) f \|^2 = \| (A - A_n) f + B_n f \|^2 = \| B_n f_1 \|^2 + \| A_n f_2 \|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \xi^2_n(A) \| f_1 \|^2 + \xi^2_n(A) \| f_2 \|^2 = \xi^2_n(A) \| f \|^2.$$

6°. В этом параграфе, пользуясь результатами предыдущих параграфов, получим несколько теорем относительно оператора A, его собственных значений и его результаты.

Теорема 1. *Для того, чтобы оператор A можно было представить в виде* $A = U \cdot S$, *где* U — *ограниченный оператор, изометрически отображающий* F *на* G, S — *самосопряженный* *оператор порядка α, необходимо и достаточно, чтобы наилучшие приближения оператора A n-мерными операторами удовлетворяли условию $\Sigma \xi_n^\alpha (A) < \infty$, причем для того, чтобы оператор U можно было подобрать унитарным, необходимо и достаточно, чтобы подпространства L и R имели одинаковую размерность.*

Необходимость: пусть $A = US$, где U — ограниченный оператор, изометрически отображающий L на R, S — самосопряженный оператор порядка α. Тогда оператор $A_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U \varphi_i$, где λ_i — собственные значения, а φ_i — собственные функции оператора S, удовлетворяет условию. $\| A - A_n \| = | \lambda_{n+1} |$ следовательно, $\xi_n (A) \leqslant | \lambda_{n+1} |$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^\alpha \leqslant (A) \sum_{n=1}^{\infty} | \lambda_{n+1} |^\alpha < \infty$. Достаточность вытекает из разложения $Sf = \Sigma (f, \varphi_i) \beta_i \varphi_i$ и $| \beta_i | = \xi_{i-1} (A)$.

Теперь покажем, что U — будет унитарным, если L и R имеют одинаковую размерность. Достаточность понятна из разложения.

$$Af = U [\Sigma (f, f_i) \beta_i f_i],$$

где

$$Uf = \sum_{i=1}^{\infty} (f, f_i) g_i + \sum_{i}^{\infty} (f, \varphi_i) \Psi_i,$$

φ_i и Ψ_i — некоторые ортонормированные последовательности соответственно из $L = H \ominus F$ и $R = H \ominus G$. Необходимость вытекает из того, что равенство $(Af, g) = 0$, ввиду:

$$(Af, g) = (USf, g) = (Sf, \overset{-1}{U} g)$$

дает $(Sf, \overset{-1}{U} g) = 0$, т. е. $Sf = 0$, если $Af = 0$. Следовательно, из $A^* S \cdot \overset{-1}{U}$ вытекает, что подпространство $R = H \ominus G$ имеет размерность не меньшую, чем подпространство $L = H \ominus F$. Меняя местами A^* и A, получим, что подпространства R и L имеют одинаковую размерность.

Теорема 2. *Оператор A имеет конечную абсолютную норму в том и только в том случае, если $\Sigma \xi_n^2 (A) < \infty$ и если это удовлетворяется, то $\Sigma \xi_n^2 (A) = N^2 (A) - \| A \|^2$, где $N (A)$ (конечная) абсолютная норма оператора A.*

Доказательство. Необходимость. Пусть A имеет конечную абсолютную норму. Значит, на любом базисе $\sum_{i\,k=1}^{\infty} | a_{ik} |^2 < \infty$. Возьмем базис $\{ f_i \} + \{ \varphi_i \}$, где f_i — вышеопределенная ортонормированная система на F, а $\{ \varphi_i \}$ — какая-нибудь ортонормированная система на G. Тогда получим: $a'_{ik} = (Af_i, f_k)$; $(A\varphi_i f_k) = 0$,

$$a_{i_k}^{k} = (Af_i\,\varphi_k),\ (A\varphi_i\,f_k) = 0,\quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_{i_k}|^2 = \Sigma\,|(Af_i, f_k)|^2 +$$

$+ \Sigma\,|(Af_i, \varphi_k)|^2 = \|Af_i\|^2 = |\beta_i|^2$ при любом i, откуда $\sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i|^2 =$

$= \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{i-1}^2 (A) < \infty$ ввиду $\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{i_k}|^2 < \infty$. Достаточность вытекает из того, что если за базис взять систему $\{f_i\} + \{\varphi_i\}$, то из доказанного выше $\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{i_k}|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i|^2 = \|A\|^2 + \Sigma\,\xi_n^2 (A)$.

Теорема 3. *Если наилучшие приближения оператора* A. *конечномерными операторами удовлетворяет условию* $\Sigma\,\xi_n^{\alpha}(A) < \infty$, *то при* $m > \frac{\alpha}{2}$ (*m — целое число*) A^m *имеет конечную абсолютную норму.*

Для доказательства теоремы 3 воспользуемся следующей леммой, принадлежащей М. В. Келдышу.

Лемма. Пусть S — самосопряженный оператор, для которого S^m имеет конечную абсолютную норму, $k_1, k_2 \ldots k_n$ — ограниченные операторы. Тогда оператор $k = \prod_{i=1}^{n} k_i\, S^m$ для $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m$ имеет конечную абсолютную норму, причем $N(k) = \|k_1\| \ldots \|k_n\|$. $N(S^m)$, $N(k)$ — абсолютная норма оператора $\bar{k}$.

Применяя эту лемму к оператору $(US)^m = \underbrace{US \cdot US \ldots US}_{m}$, получим:

$$N(A^m) = N[(US)^m] \leqslant \|U\|^m \cdot N(S^m),$$

но так как $\|U\| = 1$ и при $2m > \alpha$ $\Sigma \frac{1}{|h_i|^{2m}} \leqslant \Sigma \frac{1}{|h_i|^{\alpha}}$, то

$$N(A^m) \leqslant N(S^m) \leqslant N(S^{\alpha}) < \infty$$

Таким образом, теорема доказана.

Отметим, что из теоремы 1 вытекает такое следствие: если наилучшие приближения оператора A удовлетворяют условию $\Sigma\,\xi_n^{\rho}(A) < \infty$, то оператор A удовлетворяет условиям следующей теоремы, принадлежащей М. В. Келдышу.

Пусть S — вполне непрерывный самосопряженный оператор, такой, что

$\Sigma \frac{1}{|h_i|^{\rho}} < \infty$. k — ограниченный оператор. Собственные значения оператора $\lambda k S$ удовлетворяет условию: $\Sigma \frac{1}{|\lambda_i|^{\rho}} \leqslant \|k\|^{\rho} \cdot \Sigma \frac{1}{|h_i|^{\rho}}$,

а резольвента оператора $\lambda k S$ выражается в виде $E + k(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$,

где $D(\lambda)$ — целая операторная функция порядка не выше ρ,

$$\Delta(\lambda) = \Pi\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right) e^{\sum_{1}^{m} \frac{1}{i}\left(\frac{\lambda}{\lambda_j}\right)^i}$$

где m — наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $m < \rho$.

Полученные выше результаты применяются для исследования полноты системы собственных и присоединенных функций несамосопряженных операторов, чему будет посвящена отдельная статья.

В заключение приношу благодарность академику М. В. Келдышу за постановку задачи и за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер, Глазман. Теория линейных операторов.
2. Келдыш М. В. „ДАН" СССР, IXXVII, № 1.

Ч. Ә. Аллаһвердиев

ТАМАМ КӘСИЛМӘЗ ОПЕРАТОРЛАРЫН СОНЛУ ӨЛЧҮЛҮ ОПЕРАТОРЛАР ВАСИТӘСИЛӘ ЯХЫНЛАШМАСЫ СҮР'ӘТИ ВӘ ОНУН ТӘТБИГИ ҺАГГЫНДА

ХҮЛАСӘ

Иш сонлу өлчүлү операторларла тамам кәсилмәз операторлара яхынлашма сүр'әтинә аид олуб Һилберт фәзасында тамам кәсилмәз операторлар нәзәриййәсинин бә'зи мәсәләләринә тохунур. 5-чи §-да сонлу өлчүлү операторларын тамам кәсилмәз операторлара ән яхшы яхынлашмасы мәсәләсинә бахылыр. Мүәллиф бир нечә теорем исбат эдир ки, onларын да нәтичәсиндә 6-чы §-да исбат эдилән теорема (1) ашағыдакына кәтириб чыхарыр: әкәр A операторунун ән яхшы яхынлашмасы үчүн

$$\sum \varepsilon_n^{\mu}(A) < \infty$$

шәрти варса, онда A^m операторунун $2m > \rho$-да сонлу, мүтләг нормасы вар. $\rho = 2$, $m = 1$ оларкән бу шәрт зәрури вә кафидир.

Сонра $\Sigma\, \varepsilon^{\rho}(A) < \infty$ шәртини өдәйән операторлар үчүн М. В. Келдышын бир нечә теоремләри нәтичәләринин доғру олдуғу кәстәрилир.