Ўзбекистон ССР Фанлар академиясининг докладлари — Доклады Академии наук УзССР

1979, № 8

УДК 512.8+519.21

Ш. А. АЮПОВ

# К ТЕОРИИ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР

*(Представлено акад. АН УзССР Т. А. Сарымсаковым)*

В настоящей работе вводится понятие $OI$-алгебры — частично упорядоченной йордановой алгебры, порядок которой согласован с алгебраической структурой. Эти алгебры представляют собой неассоциативное обобщение понятия полуполя [1]. В работах [1, 2] строится теория вероятностей на основе понятия полуполя. Понятие $OI$-алгебры может быть использовано для алгебраической формулировки квантовой механики, при которой квантовомеханическим наблюдаемым ставятся в соответствие элементы $OI$-алгебры. Такой подход охватывает также и некоторые неограниченные наблюдаемые, на что указывает тот факт, что в $OI$-алгебре могут существовать и неограниченные элементы.

Пусть $A$ — йорданова алгебра над полем действительных чисел $R$. Элементы $a, b \in A$ называются операторно коммутирующими, если $(ac)b=a(cb)$ для любого $c \in A$. Подалгебра $A_1$ йордановой алгебры $A$ называется сильно ассоциативной, если любые два элемента из $A_1$ операторно коммутируют в $A$.

**Определение 1.** Элементы $a, b$ йордановой алгебры $A$ назовем совместными (и обозначим $a \leftrightarrow b$), если подалгебра $I(a, b) \subset A$, порожденная этими элементами, сильно ассоциативна в $A$.

Можно показать, что $a \leftrightarrow b$ тогда и только тогда, когда операторно коммутируют между собой элементы $a, b, ab, a^2, b^2$. В частности, любой элемент совместен с собой.

**Определение 2.** Частичный порядок „$\geqslant$“ на йордановой алгебре $A$ назовем согласованным с алгебраическими операциями, если

1) $a \geqslant b \Longrightarrow a+c \geqslant b+c$ для любого $c \in A$;

2) $a \geqslant b \Longrightarrow \lambda a \geqslant \lambda b$ для любого $\lambda \in R$, $\lambda \geqslant 0$;

3) $a \geqslant \theta$, $b \geqslant \theta$, $a \longleftrightarrow b \Longrightarrow ab \geqslant \theta$;

4) $a^2 \geqslant \theta$ для любого $a \in A$.

**Определение 3.** Йорданову алгебру $A$ с единицей назовем $OI$-алгеброй, если на $A$ задан частичный порядок, согласованный с алгебраическими операциями и удовлетворяющий следующим двум условиям:

I. Если $\{x_\alpha\}$ — возрастающая ограниченная сверху сеть элементов в $A$, то существует $x = \sup x_\alpha$; причем $x \longleftrightarrow y$, если $x_\alpha \longleftrightarrow y$ для всех $\alpha$.

II. Всякая максимальная сильно ассоциативная подалгебра $A_0$ алгебры $A$ является решеткой относительно индуцированного порядка.

Приведем примеры $OI$-алгебр, формулируя общие свойства $OI$-алгебр.

Пример 1. Всякое полуполе и, в частности, алгебра измеримых функций на измеримом пространстве является примером ассоциативной $OI$-алгебры.

Пример 2. Всякая $IW$-алгебра, т. е. слабо замкнутая йорданова алгебра самосопряженных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве [4], является $OI$-алгеброй, если частичный порядок на ней задан с помощью конуса самосопряженных положительных операторов.

Прежде чем переходить к следующему примеру, рассмотрим произвольную $O^*$-алгебру $E$ [5]. Пусть $E_h$ — вещественное векторное пространство эрмитовых элементов $E$. В $E_h$ введем симметризованное умножение $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$, где $ab$ — ассоциативное умножение в $E$.

В этих обозначениях имеет место

**Теорема 1.** Следующие условия на $a, b \in E_h$ эквивалентны:

а) $a \circ (c \circ b) = (a \circ c) \circ b$ для любого $c \in E_h$;

б) $a^2 \circ b = a \circ (a \circ b)$;

в) $ab = ba$.

Из этой теоремы можно вывести следующий важный результат.

**Теорема 2.** Не существует представления Гейзенберга канонических перестановочных соотношений эрмитовыми элементами $O^*$-алгебры, т. е. в $O^*$-алгебре не существует эрмитовых элементов $a, b$, удовлетворяющих условию $ab - ba = i\mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — единица $O^*$-алгебры.

Пример 3. Используя теорему 1, нетрудно показать, что эрмитова часть любой $O^*$-алгебры является $OI$-алгеброй. На глубокую связь между $OI$-алгебрами и $O^*$-алгебрами указывает следующая теорема.

**Теорема 3.** Пусть $OI$-алгебра $A$ является эрмитовой частью с симметризованным умножением некоторой комплексной $^*$-алгебры $E$ и для любого $x \in E$ существует $a \in A$ такой, что $x^* x = a^2$. Тогда $E$ необходимо является $O^*$-алгеброй.

Пример 4. Рассмотрим пример йордановой алгебры, принадлежащий Ловденслагеру [6]. Пусть $H$ — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $(h, g)$, $h, g \in H$. Рассмотрим множество $\mathbf{S}$ всех пар $\{\lambda, h\}$, где $\lambda \in R$, $h \in H$. В $S$ введем покоординатные линейные операции, а умножение определим следующим образом: $\{\lambda, h\} \cdot \{\mu, g\} = \{\lambda\mu + (h, g),\ \lambda g + \mu h\}$. Оказывается $\mathbf{S}$ с этими операциями является йордановой алгеброй с единицей. Можно показать, что если в $S$ ввести частичный порядок $\{\lambda, h\} \geqslant \{\mu, g\} \Longleftrightarrow \lambda - \mu \geqslant \| h - g \|$, то $S$ является $OI$-алгеброй, причем всякая максимальная сильно ассоциативная подалгебра $S$ алгебраически и порядково изоморфна $R^2$.

В заключение приведем результат, указывающий на связь между $OI$-алгебрами и полуполями.

**Теорема 4.** Пусть $A$ — $OI$-алгебра, $A_0$ — максимальная сильно ассоциативная подалгебра $A$. Тогда $A_0$ является полуполем в индуцированном частичном порядке.

Следствие. В $OI$-алгебре $A$ существует единственный частичный порядок, превращающий $A$ в $OI$-алгебру. Именно конус $A^+$ положительных элементов состоит из тех элементов $a$, которые имеют вид $a = b^2$ для некоторого $b \in A$.

Последняя теорема позволяет построить для $OI$-алгебр спектральную теорию со всеми вытекающими из нее следствиями.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Sarymsakov T. A. «Lect. Notes», 1976, *550*, p. 524.
2. Сарымсаков Т. А. Топологические полуполя и теория вероятностей, Ташкент, 1969.
3. Жевлаков К. А., Слинько А. М. [и др.]. Кольца, близкие к ассоциативным, М., 1978.
4. Topping D. Mem. of Amer. Math. Soc., 1965, *53*, 1.
5. Сарымсаков Т. А., Гольдштейн М. Ш. ДАН СССР, 1976, *228*, № 2, с. 306.
6. Lowdenslager D. B. Proc. Amer. Math. Soc., 1957, *8*, p. 88.

Поступило
2. III 1979 г.

Ташкентский
ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет
им. В. И. Ленина