Ўзбекистон ССР Фанлар академиясининг докладлари — Доклады Академии наук УзССР

1979, № 9

УДК 512.8+519.21

Ш. А. АЮПОВ

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ OJ-АЛГЕБР

(Представлено акад. АН УзССР Т. А. Сарымсаковым)

В работе [1] было введено понятие OJ-алгебры — частично упорядоченной йордановой алгебры с единицей над полем действительных чисел, порядок в которой был определенным образом согласован с алгебраической структурой. В настоящей работе будут приведены спектральная теорема для OJ-алгебр и некоторые ее следствия. Будем придерживаться терминологии работы [1].

Пусть A — OJ-алгебра. Элемент $a \in A$ называется ограниченным, если

$$-\lambda \mathbf{1} \leqslant a \leqslant \lambda \mathbf{1}$$

для некоторого положительного числа λ. Элемент e (соотв. s) называется идемпотентом (симметрией), если

$$e^2 = e \text{ (соотв. } s^2 = \mathbf{1}).$$

Определение 1. Семейство $\{e_\lambda\}_{\lambda \in R}$ идемпотентов OJ-алгебры A назовем спектральным семейством, если

(i) $e_\lambda \leqslant e_\mu$, при $\lambda \leqslant \mu$;

(ii) $\inf e_\lambda = \theta$, $\sup e_\lambda = \mathbf{1}$;

(iii) $e_\mu = \sup\limits_{\lambda < \mu} e_\lambda$ для любого $\mu \in R$.

Так как $\{e_\lambda\}$ — совместное семейство, то существует максимальная сильно ассоциативная йорданова подалгебра A_0 алгебры A, содержащая это семейство. В силу теоремы 4 из [1] A_0 является полуполем. Значит, $\{e_\lambda\}$ — спектральное семейство в полуполе A_0. Если в A_0 существует элемент a, для которого $\{e_\lambda\}$ является спектральным семейством, то будем говорить, что a является интегралом от семейства $\{e_\lambda\}$ и записывать как $a = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$. Используя аксиому (1) OJ-алгебры (см. работу [1]), можно показать, что пересечение любых двух максимальных сильно ассоциативных подалгебр A_1 и A_2 OJ-алгебры является правильным подполуполем [2] как в A_1, так и в A_2. Из этого вытекает, что элемент a не зависит от выбора максимальной сильно ассоциативной подалгебры, содержащей семейство $\{e_\lambda\}$, т. е. корректность определения интеграла от спектрального семейства. Аналогично по произвольному элементу a OJ-алгебры можно найти единственное спектральное семейство $\{e_\lambda\}$ такое, что $a = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$.

Учитывая свойства спектрального разложения в полуполе и изложенное выше, получаем следующий результат.

Теорема 1. (спектральная теорема). Для каждого элемента a OJ-алгебры A существует в точности одно спектральное семейство $\{e_\lambda\}$ такое, что $a = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$, и это семейство содержится во всякой максимальной сильно ассоциативной подалгебре, содержащей элемент a. При этом элемент a положителен тогда и только тогда, когда $e_\lambda = \theta$ при $\lambda < 0$; элемент a ограничен тогда и только тогда, когда $e_\lambda = \theta$ при $\lambda \leqslant \alpha$, $e_\lambda = \mathbf{1}$ при $\lambda \geqslant \beta$, где α, β — некоторые действительные числа.

Спектральная теорема позволяет сформулировать несколько эквивалентных определений совместности элементов.

Теорема 2. Пусть A — OJ-алгебра, $a, b \in A$. Следующие условия эквивалентны:

1) a и b совместны, т. е. порождают сильно ассоциативную подалгебру в A;

2) спектральные идемпотенты $\left\{e_\lambda^a\right\}$, $\left\{e_\mu^b\right\}$ элементов a и b совместны;

3) спектральные идемпотенты $\left\{e_\lambda^a\right\}$, $\left\{e_\mu^b\right\}$ операторно коммутируют;

4) a операторно коммутирует с любым e_μ^b, $\mu \in R$;

5) $e_\mu^b\left(e_\mu^b a\right) = e_\mu^b a$ для любого $\mu \in R$.

Приведем краткую схему доказательства. Соотношение $1) <=> 2)$ доказывается вложением рассматриваемых элементов и их спектральных семейств в максимальную сильно ассоциативную подалгебру в A. Соотношение $2) <=> 3)$ вытекает из того, что для идемпотентов совместность и операторная коммутируемость совпадают в любой йордановой алгебре. Импликации $1) => 4) => 5)$ очевидны. Используя пирсовское разложение йордановой алгебры A при помощи идемпотента e_μ^b, из 5) можно вывести соотношение $a <—> e_\mu^b$. Так как это верно для любого μ, то $a <—> b$, т. е. $5) => 1)$.

С л е д с т в и е 1. Пусть x, a, b — элементы OJ-алгебры A. Если $x <—> a$ и $x <—> b$, то $x <—> c$ для любого $c \in J(a, b)$, где $J(a, b)$ — подалгебра, порожденная элементами a и b.

С л е д с т в и е 2. Всякая максимальная сильно ассоциативная подалгебра OJ-алгебры является максимальной ассоциативной подалгеброй.

Определение 2. Центром Z OJ-алгебры A назовем совокупность всех элементов, совместных с любым элементом A, т. е. Z — это пересечение всех максимальных сильно ассоциативных подалгебр в A.

Пусть $a \in A$. Рассмотрим в A линейный оператор U_a, определенный следующим образом: $U_a x = 2a(ax) - a^2 x$, $x \in A$. Из теоремы 2 вытекает результат, дающий эквивалентные описания центра OJ-алгебры.

Теорема 3. Следующие условия эквивалентны:

1) $z \in Z$;

2) z операторно коммутирует с любым идемпотентом из A;

3) $e(ez) = ez$ для любого идемпотента $e \in A$;

4) $U_s z = z$ для любой симметрии $s \in A$.

Замечание. Утверждение 2) $<=>$ 4) в теореме 3 является аналогом предложения 2 для JB-алгебр из работы [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Аюпов Ш. А. ДАН УзССР, 1979, № 8.
2. Сарымсаков Т. А., Рубштейн Б. А., Чилин В. И. ДАН СССР, 1974, *216*, № 6, с. 1226.
3. Stormer E. Acta Phys. Austr., 1976, Suppl. *XVI*, p. 1.

Ташкентский
ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
2. III 1979 г.