№ 2 ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК УЗБЕКСКОЙ ССР 1980 г.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

# МАТЕМАТИКА

УДК 517.986

Ш. А. АЮПОВ

## $OJ$-АЛГЕБРЫ ОГРАНИЧЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В работах [1, 2] введено понятие частично упорядоченной йордановой алгебры ($OJ$-алгебры) и приведены некоторые свойства. В настоящей статье изучаются $OJ$-алгебры, все элементы которых ограничены. Такие алгебры названы $OJB$-алгебрами. Рассмотрим связь между $OJB$- и $JB$-алгебрами, введенными в [3, 4]. В частности, докажем существование исключительных $OJ$-алгебр.

1. Пусть $\mathscr{A}$ — йорданова алгебра над полем действительных чисел $R$. Элементы $a$, $b \in \mathscr{A}$ назовем совместными и обозначим $a \leftrightarrow b$, если подалгебра $J(a, b) \subset \mathscr{A}$, порожденная этими элементами, сильно ассоциативна [5]. Из предложения 2 § 3 гл. III [5] вытекает, что элементы $a$ и $b$ совместны тогда и только тогда, когда операторно коммутируют элементы $a$, $b$, $a^2$, $b^2$, $ab$.

Определение 1 [3, 4]. Йорданова алгебра $\mathscr{A}$ с единицей называется $JB$-алгеброй, если в $\mathscr{A}$ введена норма, относительно которой $\mathscr{A}$ является банаховым пространством, удовлетворяющая дополнительно условиям

i) $\|ab\| \leqslant \|a\| \|b\|$;

ii) $\|a^2\| = \|a\|^2$;

iii) $\|a^2\| \leqslant \|a^2 + b^2\|$

для любых $a$, $b \in \mathscr{A}$.

Определение 2. Пусть на йордановой алгебре $\mathscr{A}$ задан частичный порядок $\geqslant$. Назовем его согласованным с алгебраическими операциями, если:

1) $a \geqslant b \Longrightarrow a + c \geqslant b + c$ для любого $c \in A$;

2) $a \geqslant b \Longrightarrow \lambda a \geqslant \lambda b$ для любого $\lambda \in R$, $\lambda \geqslant 0$;

3) $a \geqslant \Theta$, $b \geqslant \Theta$, $a \leftrightarrow b \Longrightarrow ab \geqslant \Theta$;

4) $a^2 \geqslant \Theta$ для любого $a \in A$.

Определение 3. Йорданову алгебру $\mathscr{A}$ с единицей назовем $OJ$-алгеброй, если на $\mathscr{A}$ задан частичный порядок, согласованный с алгебраическими операциями и удовлетворяющий следующим условиям:

I) если $\{x_\alpha\}$ — возрастающая ограниченная сверху сеть элементов в $\mathscr{A}$, то существует $x = \sup x_\alpha$, причем $x \leftrightarrow y$, если $x_\alpha \leftrightarrow y$ для всех $\alpha$;

II) всякая максимальная сильно ассоциативная подалгебра $\mathscr{A}_0$ алгебры $\mathscr{A}$ является решеткой относительно индуцированного порядка.

Примеры $OJ$-алгебр рассмотрены в [1]. Элемент $x$ из $OJ$-алгебры $\mathscr{A}$ называется ограниченным, если существует число $\lambda > 0$, такое, что

$$\lambda 1 \geqslant x \geqslant -\lambda 1,$$

где $1$ — единица йордановой алгебры $\mathscr{A}$.

Определение 4. $OJ$-алгебру, все элементы которой ограничены, назовем $OJB$-алгеброй.

Все остальные определения и термины заимствованы из работ [1—5].

2. **Связь между $OJB$-и $JB$-алгебрами.** Пусть $\mathscr{A}$ — произвольная $OJ$-алгебра, $\mathscr{B}$ — множество всех ограниченных элементов $\mathscr{A}$.

**Теорема 1.** Множество $\mathscr{B}$ есть подалгебра $\mathscr{A}$ и относительно индуцированного частичного порядка $\mathscr{B}$ является $OJB$-алгеброй.

Доказательство. Легко проверить, что $\mathscr{B}$ — векторное подпространство $\mathscr{A}$. Пусть $a \in \mathscr{B}$, т. е. $\lambda 1 \geqslant a \geqslant -\lambda 1$ при некотором $\lambda > 0$. Тогда $\lambda 1 + a \geqslant \Theta$ и $\lambda 1 - a \geqslant \Theta$. Так как, очевидно, оба эти элемента совместны, то в силу аксиомы 3) $OJ$-алгебры имеем: $(\lambda 1 + a)(\lambda 1 - a) \geqslant \Theta$, т. е. $\lambda^2 1 \geqslant a^2 \geqslant \Theta$. Значит, $a^2 \in \mathscr{B}$. Если $a, b \in \mathscr{B}$, то согласно тождеству

$$ab = 1/2\,[(a+b)^2 - a^2 - b^2]$$

$ab \in \mathscr{B}$, т. е. $\mathscr{B}$ — йорданова подалгебра $\mathscr{A}$.

Покажем, что $\mathscr{B}$ само является $OJ$-алгеброй. Аксиомы 1) — 4) $OJ$-алгебры очевидны, так как порядок $\mathscr{B}$ индуцирован из $\mathscr{A}$. Пусть $\{x_\alpha\}$ — возрастающая и ограниченная сверху элементом $z \in \mathscr{B}$ сеть элементов из $\mathscr{B}$. Так как $\mathscr{A}$ — $OJ$-алгебра, то в силу аксиомы 1) существует $x \in \mathscr{A}$, такой, что $x = \sup x_\alpha$ и $x \leftrightarrow y$, если $x_\alpha \leftrightarrow y$ для всех $\alpha$. Поэтому достаточно показать, что $x \in \mathscr{B}$.

Так как $x_\alpha \leqslant z \in \mathscr{B}$, то $\mu 1 \geqslant z \geqslant -\mu 1$. и, значит, $\mu 1 \geqslant x$. Далее $x \geqslant x_\alpha$ для всех $\alpha$. Следовательно, поскольку $\mu_\alpha 1 \geqslant x_\alpha \geqslant -\mu_\alpha 1$, то $x \geqslant -\mu_\alpha 1$. Положим $\lambda = \max(\mu, \mu_\alpha)$ при фиксированном $\alpha$. Тогда $\lambda 1 \geqslant x \geqslant -\lambda 1$, т. е. $x \in \mathscr{B}$. Значит, аксиома I) для $\mathscr{B}$ выполнена.

Выполнение аксиомы II) для $\mathscr{B}$ вытекает из того, что $\mathscr{A}$ — $OJ$-алгебра и что если $x, y \in \mathscr{B} \cap \mathscr{A}_0$, $\lambda 1 \geqslant x \geqslant -\lambda 1$, $\mu 1 \geqslant y \geqslant -\mu 1$, то

$$(\lambda+\mu) 1 \geqslant x \vee y \geqslant -(\lambda+\mu) 1,\quad (\lambda+\mu) 1 \geqslant x \wedge y \geqslant -(\lambda+\mu) 1.$$

**Теорема 2.** Всякая $OJB$-алгебра является $JB$-алгеброй относительно нормы, определенной как

$$\| x \| = \inf\{\lambda > 0 \colon \lambda 1 \geqslant x \geqslant -\lambda 1\}.$$

Доказательство. Из архимедовости порядка в полуполе и того, что всякая максимальная сильно ассоциативная подалгебра в $OJ$-алгебре есть полуполе [1], легко следует, что

$$\| x \| 1 \geqslant x \geqslant -\| x \| 1.$$

Отсюда очевидно, что $\| x \| = 0 \Longleftrightarrow x = \Theta$. Стандартным образом проверяется, что $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$, $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$. Значит, $(\mathscr{B}, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство. Покажем полноту $\mathscr{B}$. Для этого докажем, что если $\{x_n\}$ — последовательность элементов $\mathscr{B}$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится в $\mathscr{B}$. Каждый элемент $x_n$ принадлежит некоторому полуполю и, следовательно, $x_n = u_n - v_n$, где $u_n = x_n^+$, $v_n = x_n^-$ — соответственно положительная и отрицательная части $x_n$. Достаточно показать, что сходятся по норме ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} v_n .$$

Например, рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Так как $x_n \leqslant \|x_n\| \mathbf{1}$ и $\Theta \leqslant \|x_n\| \mathbf{1}$, то $\Theta \leqslant u_n = x_n \vee \Theta \leqslant \|x_n\| \mathbf{1}$, т. е. $\|u_n\| \leqslant \|x_n\|$. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|u_n\|$ также сходится.

Пусть $U_k = \sum\limits_{n=1}^{k} u_n$. Так как все $u_n$ положительны, то $U_{k+1} \geqslant U_k$. Если $\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|u_n\|$, то ясно, что

$$U_k = u_1 + \cdots + u_k \leqslant (\|u_1\| + \cdots + \|u_k\|) \mathbf{1} \leqslant \mu \mathbf{1}.$$

Следовательно, последовательность $\{U_k\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху. В силу аксиомы 1) $OJ$-алгебры существует $U = \sup U_k$. Легко видеть, что

$$\Theta \leqslant U - U_k \leqslant \left( \sum_{n=k+1}^{\infty} \|u_n\| \right) \mathbf{1}.$$

Отсюда по определению нормы в $\mathscr{B}$ имеем:

$$\|U - U_k\| \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} \|u_n\| \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

т. е. $U_k = \sum\limits_{n=1}^{k} u_n$ сходится по норме к $U$. Аналогично доказывается сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = V$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = U - V.$$

Итак, $\mathscr{B}$ — банахово пространство. Проверим аксиомы *i*), *ii*), *iii*) $JB$-алгебры. Начнем с *iii*). Если $a, b \in \mathscr{B}$, то в силу аксиомы 4) $OJ$-алгебры

$$\Theta \leqslant a^2 \leqslant a^2 + b^2 \leqslant \| a^2 + b^2 \| 1.$$

Отсюда по определению нормы в $\mathscr{B}$

$$\| a^2 \| \leqslant \| a^2 + b^2 \|.$$

Докажем свойство $ii$). Пусть $a \in \mathscr{B}$. Так как $\|a\|1 \geqslant a \geqslant - \|a\|1$, то $\|a\| 1 + a \geqslant \Theta$, $\|a\| 1 - a \geqslant \Theta$, а согласно совместности этих элементов и аксиоме 3) $OJ$-алгебры

$$(\|a\| 1 + a)(\|a\| 1 - a) = \|a\|^2 1 - a^2 \geqslant \Theta, \text{ т. е. } \|a^2\| \leqslant \|a\|^2.$$

Далее так как $(a \pm \sqrt{\|a^2\|}\, 1)^2 \geqslant \Theta$, то

$$a^2 \pm 2a\sqrt{\|a^2\|}\, 1 + \|a^2\| 1 \geqslant \Theta,$$

т. е. $$\pm a \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\|a^2\|}} (a^2 + \|a^2\| 1) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\|a^2\|}} (2\|a^2\| 1) = \sqrt{\|a^2\|} 1,$$

т. е. $$\sqrt{\|a^2\|} 1 \geqslant a \geqslant - \sqrt{\|a^2\|} 1.$$

Отсюда $\|a\| \leqslant \sqrt{\|a^2\|}$, т. е. $\|a\|^2 \leqslant \|a^2\|$. Значит, $\|a^2\| = \|a\|^2$. Наконец, покажем, что имеет место неравенство $i$). Не ограничивая общности, можно считать, что $\|a\| = \|b\| = 1$, т.к. если $a = \Theta$ либо $b = \Theta$, то все очевидно. В силу аксиомы 4) $OJ$-алгебры

$$(a \pm b)^2 \geqslant \Theta, \text{ т. е. } \pm 2ab \leqslant a^2 + b^2.$$

Учитывая $ii$), имеем:

$$\pm 2ab \leqslant \|a^2 + b^2\| 1 \leqslant (\|a^2\| + \|b^2\|) 1 = 2 \cdot 1,$$

т. е. $$\pm ab \leqslant 1, \text{ или } 1 \geqslant ab \geqslant -1.$$

Отсюда $\|ab\| \leqslant 1 = \|a\| \|b\|$. Теорема доказана.

**Следствие.** Ограниченная часть всякой $OJ$-алгебры есть $JB$-алгебра.

Теперь рассмотрим обратную задачу: когда $JB$-алгебра является $OJB$-алгеброй? В работе [3] показано, что если за конус положительных элементов принять множество всех квадратов элементов, то относительно такого частичного порядка $JB$-алгебра $\mathscr{A}$ представляет собой частично упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей 1, причем

$$\|a\| = \inf \{ \lambda > 0 : \lambda 1 \geqslant a \geqslant -\lambda 1 \}$$

и из соотношения $1 \geqslant a \geqslant -1$ вытекает $1 \geqslant a^2 \geqslant \Theta$.

Пусть $\mathscr{A}_0$ — максимальная сильно ассоциативная подалгебра $\mathscr{A}$. Из аксиом $JB$-алгебры следует непрерывность операций сложения и возведения в квадрат, а значит, и умножения, так как $ab = \frac{1}{2}\Big[(a+b)^2 - a^2 - b^2\Big]$. Отсюда и из максимальности $\mathscr{A}_0$ вытекает, что $\mathscr{A}_0$ замкнута в $\mathscr{A}$ и, следовательно, полна. Таким образом, $\mathscr{A}_0$ является ассоциативной алгеброй Сигала [6]. В силу теоремы Сигала $\mathscr{A}_0$ алгебраически и метрически изоморфна алгебре $C(\Gamma)$ всех действительных непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве $\Gamma$ с поточечными алгебраическими операциями и нормой, задаваемой как

$$\|x\| = \sup_{\Gamma} |x(\gamma)|.$$

Значит, всякая максимальная сильно ассоциативная подалгебра $\mathscr{A}_0$ $JB$-алгебры $\mathscr{A}$ есть решетка. Наконец, если $a \geqslant \Theta$, $b \geqslant \Theta$, $a \leftrightarrow b$, то $a$ и $b$ лежат в некоторой максимальной сильно ассоциативной подалгебре, изоморфной $C(\Gamma)$, и, таким образом, $ab \geqslant \Theta$. Итак, во всякой $JB$-алгебре выполнены все аксиомы $OJ$-алгебры, кроме, возможно, аксиомы I), если за конус положительных элементов принять множество всех квадратов (что естественно в силу следствия теоремы 4 из [1]). Наконец, из неравенства $\|x\| 1 \geqslant x \geqslant -\|x\| 1$ вытекает, что все элементы $\mathscr{A}$ ограничены. Итак, доказана следующая теорема.

**Теорема 3.** Пусть $\mathscr{A}$ — $JB$-алгебра с введенным выше порядком. Если в $\mathscr{A}$ выполнена аксиома I) $OJ$-алгебры, то $\mathscr{A}$ является $OJB$-алгеброй.

**Следствие.** Всякая $JW$-алгебра есть $OJB$-алгебра.

Доказательство. Напомним, что $JW$-алгебра — это слабо замкнутая йорданова алгебра ограниченных эрмитовых операторов в гильбертовом пространстве [7], причем умножение в ней симметризованное, т. е.

$$ab = \frac{1}{2}(a \cdot b + b \cdot a),$$

где $a \cdot b$ — обычное ассоциативное умножение операторов.

Пусть $\{x_\alpha\}$ — возрастающая ограниченная сверху сеть операторов из $JW$-алгебры $\mathscr{A}$. В силу леммы 1.7.4 [8], с. 15, $\{x_\alpha\}$ слабо сходится к $x = \sup x_\alpha \in \mathscr{A}$, причем $x \cdot y = y \cdot x$, если $x_\alpha \cdot y = y \cdot x_\alpha$ для любого $\alpha$. Отсюда и из теоремы 1 [1] следует, что $x \leftrightarrow y$, если $x_\alpha \leftrightarrow y$ для всех $\alpha$.

**Теорема 4.** Всякая конечномерная $JB$-алгебра является $OJB$-алгеброй.

Доказательство. Отметим, что так как во всякой $JB$-алгебре $\mathscr{A}$ конус положительных элементов замкнут, то на $\mathscr{A}$ достаточно много положительных непрерывных функционалов. В частности, если $f(a) \geqslant 0$ для любого положительного непрерывного функционала, то $a \geqslant \Theta$. Далее из аксиомы *iii*) легко следует нормальность конуса в $\mathscr{A}$. Тогда из леммы 1 гл. 5 § 3 [9] вытекает, что во всякой $JB$-алгебре любой непрерывный линейный функционал есть разность положительных.

Пусть $\mathscr{A}$ — конечномерная $JB$-алгебра, $\{x_\alpha\}$ — возрастающая ограниченная сверху сеть элементов $\mathscr{A}$. Для произвольного положительного линейного функционала $f$ числовая сеть $\{f(x_\alpha)\}$ возрастает и ограничена сверху и, следовательно, фундаментальна. Значит, $\{x_\alpha\}$ — слабо фундаментальная сеть в $\mathscr{A}$. В силу полноты и конечномерности $\mathscr{A}$ сеть сходится по норме к $x_0 \in \mathscr{A}$, причем $f(x_\alpha) \uparrow f(x_0)$ для любого положительного непрерывного линейного функционала $f$, т. е. $f(x_0 - x_\alpha) \geqslant 0$, и если $x \geqslant x_\alpha$ для любого $\alpha$, то $f(x - x_0) \geqslant 0$. Отсюда следует, что $x_0 \geqslant x_\alpha$, и если $x \geqslant x_\alpha$ для любого $\alpha$, то $x \geqslant x_0$, т. е. $x_0 = \sup x_\alpha$. Из непрерывности по норме умножения в $JB$-алгебре и того, что $x_\alpha \to x_0$ по норме, вытекает, что если $x_\alpha \leftrightarrow y$ для любого $\alpha$, то $x_0 \leftrightarrow y$. Итак, в $\mathscr{A}$ выполнена аксиома I) $OJ$-алгебры, т. е. $\mathscr{A}$ — $OJB$-алгебра.

**Следствие.** Исключительная алгебра $M_3^8$ эрмитовых $3 \times 3$ матриц над числами Кэли является *OJB*-алгеброй.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Аюпов Ш. А. ДАН УзССР, 1979, № 8, 6.
2. Аюпов Ш. А. ДАН УзССР, 1979, № 9, 3.
3. Alfsen E. M., Shults F. W., Stormer E. Advances in Math., *28,* 1978, No 1, 11.
4. Stormer E. Acta Phys. Austr., 1976, No 16, 1.
5. Жевлаков К. А. [и др.]. Кольца, близкие к ассоциативным. М., «Наука», 1978.
6. Segal I. Ann. Math., *48,* 1947, 930.
7. Topping D. Memoirs of Amer. Math. Soc., *53,* 1965, 1.
8. Sakai S. C*-algebras and W*-algebras. Berlin, 1971.
9. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М., «Мир», 1971.


Институт математики
им. В. И. Романовского
АН УзССР

Поступило
5. IV 1979 г.