№ 9 ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК УЗБЕКСКОЙ ССР 1980 г.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.986

Ш. А. АЮПОВ

НОРМАЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ НА *OJB*-АЛГЕБРАХ

В настоящей статье изучаются состояния на йордановых банаховых алгебрах [1], частичный порядок на которых удовлетворяет дополнительной аксиоме. Будем придерживаться терминологии работ [1, 3].

Необходимые сведения. Пусть $\mathscr{A}$ — йорданова банахова алгебра (JB-алгебра), т. е. йорданова алгебра с единицей над полем вещественных чисел, на которой введена норма, превращающая $\mathscr{A}$ в банахово пространство и удовлетворяющая условиям:

$$\text{i) } \|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|, \ a, b \in \mathscr{A};$$

$$\text{ii) } \|a^2\| = \|a\|^2;$$

$$\text{iii) } \|a^2\| \leqslant \|a^2 + b^2\| \text{ для всех } a, b \in \mathscr{A}.$$

В работе [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Если $\mathscr{A}$ — JB-алгебра, то множество $\mathscr{A}^2$ всех квадратов элементов $\mathscr{A}$ — правильный конус, превращающий $\mathscr{A}$ в нормированное частично упорядоченное векторное пространство, где порядковой единицей является единичный элемент $\mathscr{A}$, и такое, что

$$(-1 \leqslant a \leqslant 1) \Longrightarrow (\Theta \leqslant a^2 \leqslant 1).$$

В дальнейшем будем рассматривать JB-алгебры именно с этим порядком.

Два элемента a, b йордановой алгебры $\mathscr{A}$ назовем совместными (и обозначим $a \longleftrightarrow b$), если они лежат в одной сильно ассоциативной подалгебре [2].

Определение 1 [3]. JB-алгебру $\mathscr{A}$ назовем OJB-алгеброй, если она удовлетворяет следующему условию:

1) для любой возрастающей и ограниченной сверху сети $\{x_\alpha\}$ элементов $\mathscr{A}$ существует $x = \sup x_\alpha$, причем $x \longleftrightarrow y$, если $x_\alpha \longleftrightarrow y$ для всех α.

Можно доказать, что всякая максимальная сильно ассоциативная подалгебра OJB-алгебры является полуполем ограниченных элементов [4] и что множество ∇ всех идемпотентов $\mathscr{A}$ образует логику и полную решетку в индуцированном порядке [3].

Определение 2. Линейный положительный функционал f на JB-алгебре $\mathscr{A}$ называется состоянием, если $f(1) = 1$.

Состояние f назовем нормальным, если $f(x_\alpha) \to 0$ для любой сети x_α, убывающей к Θ. Будем говорить, что JB-алгебра $\mathscr{A}$ обладает полным семейством нормальных состояний, если для любого $a \in \mathscr{A}$, $a \neq \Theta$, существует нормальное состояние f, такое, что $f(a^2) > \Theta$.

Основные результаты. Приводимая ниже теорема раскрывает строение OJB-алгебр с точки зрения существования на них нормальных состояний.

Теорема 1. Пусть $\mathscr{A}$ — OJB-алгебра. Существует единственный центральный идемпотент $e \in \mathscr{A}$, такой, что OJB-алгебра $J_1(e) = e\mathscr{A}$ обладает полным семейством нормальных состояний, а на OJB-алгебре $J_0(e) = (1 - e)\mathscr{A}$ нет ни одного нормального состояния.

Доказательство. Пусть φ — произвольное нормальное состояние на $\mathscr{A}$. Использовав лемму Цорна и нормальность φ, найдем максимальный идемпотент $q \in \nabla$, такой, что $\varphi(q) = 0$. Так как $p \vee r = s(p + r)$ для любых $p, r \in \nabla$ ($s(a)$ — носитель элемента a), то можно показать, что q — наибольший идемпотент со свойством $\varphi(q) = 0$. Положим $s_\varphi = 1 - q$ и назовем s_φ носителем состояния φ. Очевидно, $\varphi(e) > 0$ для любого идемпотента $e \leqslant s_\varphi$ $(e \neq \Theta)$. Из неравенства Шварца вытекает, что $\varphi(xs_\varphi) = \varphi(x)$ для любого $x \in \mathscr{A}$.

Пусть z_φ — центральный носитель s_φ. Отметим, что поскольку $\varphi(1) = 1 \neq 0$, то $s_\varphi \neq \Theta$ и $z_\varphi \neq \Theta$. Покажем, что на $z_\varphi \mathscr{A}$ существует полное семейство нормальных состояний Пусть $x \in z_\varphi \mathscr{A}$, $x \geqslant \Theta$. Существует ненулевой идемпотент $e \in z_\varphi \mathscr{A}$, такой, что $x \geqslant \varepsilon e$, где $\varepsilon > 0$. Так как $e \in z_\varphi \mathscr{A}$, то $e \leqslant z_\varphi$. Нетрудно проверить, что

$$z_\varphi = \sup\{p \in \nabla;\ p \precsim s_\varphi\} \quad (\text{см. [1], § 6}) .$$

Поэтому, применив лемму 6.3 из [1], можно показать, что существуют ненулевые идемпотенты $e_1 \leqslant e$ и $f_1 \leqslant s_\varphi$, которые эквивалентны $(e_1 \sim f_1)$, т. е. есть такие симметрии $s_1, \ldots, s_n$, что

$$f_1 = U_{s_1}, \ldots, U_{s_n} e_1.$$

Положим

$$\psi(a) = \varphi\left(U_{s_1}, \ldots, U_{s_n} a\right), \ a \in \mathscr{A}.$$

Так как все U_{s_i} — автоморфизмы $\mathscr{A}$ и φ нормально, то ψ — также нормальное состояние на $\mathscr{A}$, причем

$$\psi(x) \geqslant \varepsilon\psi(e) \geqslant \varepsilon\psi(e_1) = \varepsilon\varphi\left(U_{s_1}, \ldots, U_{s_n} e_1\right) = \varepsilon\varphi(f_1) > 0 ,$$

так как $f_1 \leqslant s_\varphi$.

Значит, OJB-алгебра $z_\varphi \mathscr{A}$ обладает полным набором нормальных состояний.

Положим $e = \sup z_\varphi$ по всем нормальным состояниям φ на $\mathscr{A}$. Тогда по построению на OJB-алгебре $J_0(e) = (1 - e)\ \mathscr{A}$ нет ни одного нормального состояния. Покажем, что на $J_1(e) = e\mathscr{A}$ есть полное семейство нормальных состояний. Пусть $x \in e\mathscr{A}$, $x \geqslant \Theta$, $x \neq \Theta$. Так как $ex = x$, то существует нормальное состояние φ на $\mathscr{A}$, такое, что $z_\varphi x \neq \Theta$. Как и выше, отсюда следует существование нормального состояния ψ на $z_\varphi \mathscr{A}$, такого, что $\psi(z_\varphi x) \neq 0$. Для $y \in e\mathscr{A}$ положим $\nu(y) = \psi(z_\varphi y)$. Тогда ν — нормальное состояние на $e\mathscr{A}$ и $\nu(x) = \psi(z_\varphi x) > 0$, т. е. $e\mathscr{A}$ обладает полным набором нормальных состояний. Единственность e проверяется стандартно. Теорема 1 доказана.

Как и в [5], JB-алгебру $\mathscr{A}$ назовем JBW-алгеброй, если она обладает предсопряженным пространством, т. е. существует банахово пространство N, такое, что $\mathscr{A}$ как банахово пространство изоморфно пространству N^* всех непрерывных линейных функционалов на N. В теореме 2.3 [5] доказано, что JB-алгебра является JBW-алгеброй тогда и только тогда, когда она монотонно полна и обладает полным (разделяющим) семейством нормальных состояний. Отсюда из *-слабой, т. е. $\sigma(\mathscr{A}, N)$-непрерывности умножения по каждому аргументу в JBW-алгебре и из того, что для монотонных сетей понятия *-слабой, сильной и порядковой сходимостей совпадают ([1], лемма 4.1), следует, что в JBW-алгебре выполнено условие 1) OJB-алгебры. Из сказанного выше вытекает следующая теорема.

Теорема 2. i) Всякая JBW-алгебра есть OJB-алгебра. ii) Для того чтобы OJB-алгебра была JBW-алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы она обладала полным семейством нормальных состояний. iii) Всякая OJB-алгебра единственным образом разлагается в прямую сумму двух идеалов, один из которых является JBW-алгеброй, а на другом не существует ни одного нормального состояния.

Если учесть, что совокупность ограниченных элементов произвольной OJ-алгебры (см. [3, 6]) образует OJB-алгебру, то из теоремы 3 вытекает следующий результат.

Следствие. Всякая OJ-алгебра есть прямая сумма двух OJ-подалгебр (идеалов) [3], ограниченные элементы одной из которых образуют JBW-алгебру, а на ограниченных элементах второй нет ни одного нормального состояния.

Определение 3. Говорят, что положительный функционал φ на OJB-алгебре $\mathscr{A}$ вполне аддитивен на идемпотентах, если для любого ортогонального семейства $\{q_\alpha\}$ идемпотентов, такого, что $q = \vee q_\alpha$, имеет место равенство

$$\varphi(q) = \sum \varphi(q_\alpha),$$

где сумма понимается в известном смысле (по фильтру дополнений конечных множеств индексов).

Следующая теорема в частном случае, когда $\mathscr{A}$ — эрмитова часть алгебры фон Неймана, доказана, например, в [7], с. 30.

Теорема 3. Пусть $\mathscr{A}$ — JBW-алгебра. Для того чтобы положительный линейный функционал φ был нормален, необходимо и достаточно, чтобы он был вполне аддитивен на идемпотентах.

Приведем набросок доказательства. Необходимость теоремы очевидна. Докажем ее достаточность. Пусть $q \in \nabla$ — произвольный идемпотент. По условию теоремы существует нормальный функционал f на $\mathscr{A}$, такой, что $\varphi(q) < f(q)$. Можно показать, что существует идемпотент $p_1 \leqslant q$, такой, что $\varphi(p) \leqslant f(p)$ для всех $p \leqslant p_1$. Тогда $\varphi(a) \leqslant f(a)$ для любого неотрицательного ступенчатого элемента

$$a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \text{ с } e_i \leqslant p_1 .$$

Так как всякий элемент из $J_1(p_1)$ есть предел по норме ступенчатых элементов из $J_1(p_1)$ и всякий положительный функционал непрерывен по норме, то $\varphi(x) \leqslant f(x)$ для любого $x \in J_1(p_1)$ $x \geqslant \Theta$. Так как функционал f нормален, то и φ нормален на $J_1(p_1)$. Следовательно, существует минорантное семейство $\{p\} \subset \nabla$, такое, что φ нормален на $J_1(p)$. Теперь покажем, что φ нормален на $\mathscr{A}$. Пусть $x_\alpha \downarrow \Theta$. Нужно доказать, что $\varphi(x_\alpha) \to 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\|x_\alpha\| \leqslant 1$. Нетрудно видеть, что если $p_1, \dots, p_n$ — ортогональные идемпотенты, такие, что φ нормален на $J_i(p_i)$, $i = \overline{1, n}$, то φ нормален и на $J_1\left(\bigvee_{i=1}^{n} p_i\right)$. Поэтому существует возрастающая к единице сеть идемпотентов $\{q_\beta\}$, такая, что φ нормален на $J_1(q_\beta)$. Так как φ вполне аддитивен, то $\varphi(\mathbf{1} - q_\beta) \to 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Выберем β так, что

$$\varphi(\mathbf{1} - q_\beta) \leqslant \varepsilon^2/9\|\varphi\|.$$

Рассмотрим тождество

$$\varphi(x_\alpha) = \varphi\left(x_\alpha - U_{q_\beta} x_\alpha\right) + \varphi\left(U_{q_\beta} x_\alpha\right).$$

Второе слагаемое стремится к нулю по α. Оценим первое слагаемое, которое равно

$$\varphi\{(\mathbf{1} - q_\beta)[(2q_\beta + \mathbf{1})x_\alpha]\}.$$

Из неравенства Шварца следует, что

$$\varphi\left(x_\alpha - U_{q_\beta} x_\alpha\right)^2 \leqslant \varphi(\mathbf{1} - q_\beta)\|\varphi\|\|(2q_\beta + \mathbf{1})x\|^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

т. е.

$$\left|\varphi\left(x_\alpha - U_{q_\beta} x_\alpha\right)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Значит, $\varphi(x_\alpha) \to 0$. Теорема доказана.

Следующая теорема является обобщением теоремы Витали — Хана — Сакса.

Теорема 4. Пусть $\mathscr{A}$ — произвольная *OJB*-алгебра, $\{\varphi_n\}$ — последовательность нормальных состояний на $\mathscr{A}$, поточечно сходящаяся к φ, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(a) = \varphi(a), \ \forall\, a \in \mathscr{A}.$$

Тогда φ — нормальное состояние.

Доказательство. Пусть e — такой центральный идемпотент (теорема 1), что на $J_1(e) = e(\mathscr{A})$ есть полный набор нормальных состояний, на $J_0(e) = (\mathbf{1} - e)\mathscr{A}$ нет ни одного. Тогда, очевидно, $\varphi_n|_{J_0(e)} \equiv 0$ и, значит, $\varphi|_{J_0(e)} \equiv 0$, т. е. φ на $J_0 e$ является нулевым функционалом. Поэтому достаточно показать, что φ — нормальное состояние на $J_1(e)$. Очевидно, φ — состояние. Чтобы показать нормальность φ, возьмем произвольное ортогональное семейство идемпотентов $\{q_\alpha\}$, такое, что $q = \bigvee q_\alpha$. В силу теоремы 3 достаточно показать, что

$$\varphi(q) = \sum_\alpha \varphi(q_\alpha).$$

Так как все q_α ортогональны, то они совместны [3, 8] и, значит, существует максимальная сильно ассоциативная подалгебра $\mathscr{A}_0$, содержащая все $\{q_\alpha\}$, q. Но $\mathscr{A}_0$ — полуполе и в силу теоремы Витали — Хана — Сакса для полуполей $\varphi|\mathscr{A}_0$ нормально. Значит,

$$\varphi(q) = \sum_\alpha \varphi(q_\alpha).$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alfsen E. M., Shultz F. W., Stormer E. Advances in Math., *28,* 1978, N 1, 11.
2. Жевлаков К. А. [и др.]. Кольца, близкие к ассоциативным. М. «Наука», 1978.
3. Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А. ДАН СССР, 249, 1979, № 4, 789.
4. Sarymsakov T. A. Lect. Notes, *550,* 1976, 524.
5. Shultz F. W. J. Funct. Anal., *31,* 1979, N 3, 360.
6. Аюпов Ш. А. «Изв. АН УзССР», серия физ.-мат. наук, 1980, № 2.
7. Sakaî S. C*-algebras and W*-algebras, Berlin, 1971.
8. Аюпов Ш. А. ДАН УзССР, 1979, № 9, 3.

Институт математики
им. В. И. Романовского
АН УзССР

Поступило
14. VI 1979 г.