№ 6 ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК УЗБЕКСКОЙ ССР 1980 г.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.966+517.987

Ш. А. АЮПОВ

ТЕОРЕМА ЭРГОДИЧЕСКОГО ТИПА В ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБРАХ

В настоящей статье для одного класса йордановых банаховых алгебр (JBW-алгебр) доказывается эргодическая теорема типа теорем, приведенных в работах [1] и [2] соответственно для алгебр фон Неймана и O^*-алгебр. Как следствие получается теорема о существовании нормального центрозначного следа на JBW-алгебрах.

Определения. Йорданова алгебра $\mathcal{A}$ с единицей над полем действительных чисел называется JB-алгеброй [3, 4], если она является банаховым пространством и $\|a^2\| = \|a\|^2$, $\|a^2\| \leqslant \|a^2+b^2\|$ для любых $a, b \in \mathcal{A}$. JB-алгебра $\mathcal{A}$ называется JBW-алгеброй, если она обладает предсопряженным пространством. Последнее условие эквивалентно следующим двум ([4], теорема 2.3):

1) $\mathcal{A}$ монотонно полна, т. е. если $\{x_\alpha\}$ — монотонно возрастающая и ограниченная сверху сеть элементов $\mathcal{A}$, то в $\mathcal{A}$ существует $\sup\limits_\alpha x_\alpha$;

2) на $\mathcal{A}$ есть разделяющее семейство нормальных состояний.

Всякая JW-алгебра [5], т. е. слабо замкнутая йорданова алгебра ограниченных эрмитовых операторов в гильбертовом пространстве и в частности, эрмитова часть всякой алгебры фон Неймана с симметризованным умножением $a \circ b = {}^1/_2(ab+ba)$, является JBW-алгеброй.

Пример исключительной JBW-алгебры — алгебра M_3^8 эрмитовых 3×3 матриц над числами Кэли.

Пусть $\mathcal{A}$ — JBW-алгебра, N — ее предсопряженное, т. е. пространство всех нормальных линейных функционалов на $\mathcal{A}$ ([4], теорема 2.3). Топологию $\sigma(\mathcal{A}, N)$ назовем *-слабой топологией. Сильной топологией на $\mathcal{A}$([3], §4) называется локально выпуклая топология, порожденная преднормами $x \to \rho(x^2)^{1/2}$, где ρ пробегает все нормальные состояния на $\mathcal{A}$.

Если G — произвольная группа йордановых автоморфизмов $\mathcal{A}$, то положим

$$\mathcal{A}^G = \{a \in \mathcal{A} : ga = a \quad \forall g \in G\}.$$

В частности, если группа $G = G_{in}$ порождена всеми внутренними автоморфизмами $U_s^{*)}$, где s пробегает все симметрии в $\mathcal{A}$ (т. е. $s^2 = 1$,

---

*) Для $b \in \mathcal{A}$ оператор U_b определяется как $U_b a = 2b \circ (b \circ a) - b^2 \circ a$.

$\mathbf{1}$ — единица алгебры $\mathcal{A}$), то $\mathcal{A}^G = \boldsymbol{Z}$ [6] ($\boldsymbol{Z}$ — центр алгебры $\mathcal{A}$).

Состояние μ на $\mathcal{A}$ назовем G-инвариантным, если $\mu(ga) = \mu(a)$ для любых $a \in \mathcal{A}, g \in G$.

Предложение. Пусть $\mathcal{A}$ — JBW-алгебра, μ — состояние на $\mathcal{A}$. Следующие условия эквивалентны:

1) $\mu\left(U_s a\right) = \mu(a)$ для любых a, $s \in \mathcal{A}$, $s^2 = \mathbf{1}$, т. е. μ G_{in}-инвариантно;

2) $\mu(a \circ (b \circ c)) = \mu((a \circ b) \circ c)$ для любых $a, b, c \in \mathcal{A}$, т. е. μ — след.

Доказательство. Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) очевидна. Пусть имеет место 1). В силу спектральной теоремы условие 2) достаточно проверить для случая, когда $b = e$ — идемпотент. Так как элемент $\mathbf{1} - 2e$ является симметрией, то для любого $x \in \mathcal{A}$

$$\mu\left(U_{1-2e} x\right) = \mu(x),$$

т. е.

$$\mu(e \circ (e \circ x) - e \circ x) = 0.$$

Значит, если

$$\mathcal{A} = J_0 \oplus J_{1/2} \oplus J_1$$

—пирсовское разложение алгебры $\mathcal{A}$ по идемпотенту e, то $\mu(J_{1/2}) = \{\Theta\}$. Пусть $a = a_0 + a_{1/2} + a_1$, $c = c_0 + c_{1/2} + c_1$ — пирсовские разложения элементов a и c по e. С учетом соотношений

$$J_0 \, J_1 = \{\Theta\}, \ \left(J_0 + J_1\right) J_{1/2} \subset J_{1/2}$$

легко подсчитать, что

$$\mu((a \circ e) \circ c) = \mu\left(a_1 \circ c_1 + 1/2\, a_{1/2} \circ c_{1/2}\right) = \mu(a \circ (e \circ c)).$$

Предложение доказано.

Если $a \in \mathcal{A}$, то через $\mathcal{K}_0(a, G)$ обозначим выпуклую оболочку орбиты элемента a при действии группы G, через $\mathcal{K}(a, G)$ — сильное замыкание в $\mathcal{A}$ множества $\mathcal{K}_0(a, G)$.

Основные теоремы. Пусть $\mathcal{A}$ — JBW-алгебра, G — группа йордановых автоморфизмов $\mathcal{A}$, μ — точное нормальное G-инвариантное состояние.

Теорема 1. Для любого элемента $a \in \mathcal{A}$ множество $\mathcal{K}(a, G) \cap \mathcal{A}^G$ состоит в точности из одного элемента.

Предварительно докажем две леммы.

Лемма 1. Пусть u — точное нормальное состояние на JBW-алгебре $\mathcal{A}$, $\{x_\alpha\}$ — ограниченная по норме сеть элементов в $\mathcal{A}$, такая, что $u\left(x_\alpha^2\right) \to 0$. Тогда $x_\alpha \to \Theta$ сильно.

Доказательство. Нужно показать, что $\rho\left(x_\alpha^2\right) \to 0$ для произвольного нормального состояния ρ на $\mathcal{A}$. Предположим противное, т. е. существует такое ρ, что $\rho\left(x_\alpha^2\right) \not\to 0$.

Переходя в случае необходимости к подсети, можно считать, что

$$\rho\left(x_\alpha^2\right) \geqslant \varepsilon_0 > 0$$

для всех α. В силу теоремы Банаха — Алаоглу ограниченная по норме сеть $\{x_\alpha^2\}$ *-слабо относительно компактна и, следовательно, существует *-слабая предельная точка $a \in \mathcal{A}$ для сети $\{x_\alpha^2\}$, причем $a \geqslant \Theta$. Согласно *-слабой непрерывности нормальных функционалов $u(a) = 0$, так как $u\{x_\alpha^2\} \to 0$. Вследствие точности u и положительности a отсюда вытекает, что $a = \Theta$. С другой стороны, $\rho(x_\alpha^2) \geqslant \varepsilon_0$ для всех α и, значит,

$$\rho(a) \geqslant \varepsilon_0 > 0.$$

Противоречие показывает, что $\rho(x_\alpha^2) \to 0$. Лемма доказана.

Лемма 2. Единичный шар в JBW-алгебре является полным равномерным пространством относительно сильной топологии.

Доказательство. Пусть $\{x_\alpha\}(\|x_\alpha\| \leqslant 1)$ — сильно фундаментальная сеть. Тогда она *-слабо фундаментальна и, значит, *-слабо сходится к некоторому $a \in \mathcal{A}$, $\|a\| \leqslant 1$ (в силу *-слабой компактности единичного шара в $\mathcal{A}$), т. е. для любого нормального состояния ρ:$\rho(x_\alpha - a) \to 0$. Так как сеть $\{x_\alpha\}$ сильно фундаментальна, то для любого $\varepsilon > 0$ существует α_0, такое, что при $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$ имеем

$$\rho((x_\beta - x_\alpha)^2)^{1/2} < \varepsilon.$$

Тогда при α, β, $\gamma \geqslant \alpha_0$ из неравенства Шварца вытекает

$$|\rho((x_\beta - x_\alpha) \circ (x_\gamma - x_\alpha))| \leqslant \rho((x_\beta - x_\alpha)^2)^{1/2} \rho((x_\gamma - x_\alpha)^2)^{1/2} < \varepsilon^2.$$

Так как умножение в JBW-алгебре *-слабо непрерывно по каждому аргументу в отдельности ([3], лемма 4.1) и ρ *-слабо непрерывно, то, переходя в последнем неравенстве к пределу сначала по β, затем по γ, получаем

$$\rho((a - x_\alpha)^2) \leqslant \varepsilon^2, \text{ т. е. } \rho((a - x_\alpha)^2)^{1/2} \leqslant \varepsilon \text{ при } \alpha \geqslant \alpha_0.$$

Это означает, что

$$\rho((a - x_\alpha)^2)^{1/2} \to 0.$$

Из-за произвольности ρ $x_\alpha \to a$ сильно. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. В векторном пространстве $\mathcal{A}$ введем скалярное произведение $(x, y) = \mu(x \circ y)$, $x, y \in \mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}$ — вещественное предгильбертово пространство. Пусть H — пополнение $\mathcal{A}$ по норме $\|x\|_\mu = (x, x)^{1/2}$.

Группа G действует в $\mathcal{A}$ как группа линейных операторов, причем для любых $x \in \mathcal{A}$, $g \in G$

$$\|gx\|_\mu = \mu(gx \circ gx)^{1/2} = \mu(gx^2)^{1/2} = \mu(x^2)^{1/2} = \|x\|_\mu,$$

т. е. $\|g\| = 1$. Следовательно, все операторы из G можно продолжить с сохранением нормы до операторов на всем гильбертовом пространстве H. В силу эргодической теоремы Алаоглу — Биркгофа (см. [7]) существует единственная точка x_a, лежащая в замыкании множества $\mathcal{K}_0(a, G)$ в H, такая, что $gx_a = x_a$ для всех $g \in G$, причем отображение $a \to x_a$ линейно. Теорема 1 будет доказана, если покажем, что

$$x_a \in \mathcal{K}(a, G) \subset \mathcal{A}.$$

Пусть

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{K}_0(a, G).$$

— последовательность, сходящаяся к x_a по норме H, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_a\|_\mu = 0.$$

В частности,

$$\mu\left((x_n - x_m)^2\right) = \|x_n - x_m\|_\mu^2 \to 0$$

при $m, n \to \infty$. Каждое $g \in G$ является йордановым и, значит, порядковым автоморфизмом $\mathcal{A}$. Поэтому так как в JB-алгебре [3, 4, 8, 9]

$$\|a\| = \inf\{\lambda > 0: -\lambda 1 \leqslant a \leqslant \lambda 1\},$$

то $\|ga\| = \|a\|$ для любого $g \in G$. Следовательно, для любого $x \in \mathcal{K}_0(a, G)$,

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i a,\ \lambda_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,\ g_i \in G,\ i = 1, \dots, k,$$

имеем

$$\|x\| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \|g_i a\| = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \|a\| = \|a\|,$$

т. е. $\mathcal{K}_0(a, G)$ — подмножество шара радиуса $\|a\|$. В частности, последовательность

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ и, значит, } \{x_n - x_m\}_{n, m=1}^{\infty}$$

ограничены по норме. Так как μ точно и

$$\mu\left((x_n - x_m)^2\right) \to 0,$$

то по лемме 1 $(x_n - x_m) \to \Theta$ сильно при $n, m \to \infty$, т. е. последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сильно фундаментальна. По лемме 2 она сильно сходится к некоторой точке $y \in \mathcal{K}(a, G)$. В частности,

$$\|x_n - y\|_\mu = \mu\left((x_n - y)^2\right)^{1/2} \to 0,$$

т. е. $y = x_a$. Теорема доказана.

Если вместо эргодической теоремы Алаоглу — Биркгофа воспользоваться статистической эргодической теоремой фон Неймана, то получим следующий результат.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{A}$ — JBW-алгебра, T — автоморфизм $\mathcal{A}$, μ — точное нормальное T-инвариантное состояние на $\mathcal{A}$. Тогда для любого $a \in \mathcal{A}$ существует сильный предел

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} T^k a = \hat{a},$$

причем $T\hat{a} = \hat{a}$, $\mu(\hat{a}) = \mu(a)$.

Пусть $a \in \mathcal{A}$ — произвольный элемент. В условиях теоремы 1 единственный элемент из $\mathcal{K}(a, G) \cap \mathcal{A}^G$ обозначим $\varphi(a)$. Очевидно, $\varphi: \mathcal{A} \to \mathcal{A}^G$.

Теорема 3. В условиях теоремы 1 отображение $\varphi: \mathcal{A} \to \mathcal{A}^G$ обладает следующими свойствами:

i) $\mu(\varphi(a)) = \mu(a)$ для любого $a \in \mathcal{A}$;

ii) φ линейно и строго положительно;

iii) если $a \in \mathcal{A}^G$, $b \in \mathcal{A}$, то $\varphi(a \circ b) = a \circ \varphi(b)$;

iV) φ нормально;

V) если $a \in \mathcal{A}^G$, то $\varphi(a) = a$;

Vi) $\varphi(ga) = \varphi(a)$ для любых $a \in \mathcal{A}$, $g \in G$.

Доказательство. i) Легко проверить, что $\mu(x) = \mu(a)$ для любого $x \in \mathcal{K}_0(a, G)$. Так как μ нормально, а значит, *-слабо непрерывно, то $\mu(x) = \mu(a)$ для всех $x \in \mathcal{K}(a, G)$. В частности,

$$\mu(\varphi(a)) = \mu(a),$$

так как $\varphi(a) \in \mathcal{K}(a, G)$.

ii) Линейность отображения $\varphi: a \to x_a$ утверждается в теореме Алаоглу — Биркгофа. Если $a \geqslant \Theta$, то так как все g сохраняют порядок и для любого $x \in \mathcal{K}_0(a, G)$

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i a, \ \lambda_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,$$

то $x \geqslant \Theta$. Следовательно, $x \geqslant \Theta$ для любого $x \in \mathcal{K}(a, G)$ и в частности, $\varphi(a) \geqslant \Theta$.

Если $a \geqslant \Theta$, $a \neq \Theta$, то $\mu(a) > 0$ в силу точности μ. С учетом *i*)

$$\mu(\varphi(a)) = \mu(a) > 0.$$

Значит, $\varphi(a) \neq \Theta$.

iii) Пусть $a \in \mathcal{A}^G$, $b \in \mathcal{A}$. Нетрудно проверить, что в этом случае

$$a \circ \mathcal{K}_0(b, G) = \mathcal{K}_0(a \circ b, G).$$

Вследствие *-слабой непрерывности умножения

$$a \circ \mathcal{K}(b, G) = \mathcal{K}(a \circ b, G).$$

Так как

$$a \circ \varphi(b) \in \mathcal{K}(a \circ b, G) \cap \mathcal{A}^G,$$

то согласно единственности в теореме 1

$$a \circ \varphi(b) = \varphi(a \circ b).$$

iV) Пусть $a_\alpha \uparrow a$, a_α, $a \in \mathcal{A}$. Нужно показать, что $\varphi(a_\alpha) \uparrow \varphi(a)$. В силу ii) $\{\varphi(a_\alpha)\}$ возрастает и $\varphi(a_\alpha) \leqslant \varphi(a)$ для всех α. Так как *JBW*-алгебра $\mathcal{A}$ монотонно полна, то существует

$$y = \sup_\alpha \varphi(a_\alpha) \leqslant \varphi(a).$$

Так как состояние μ нормально, то

$$\mu(y) = \lim \mu(\varphi(a_\alpha)) = \lim \mu(a_\alpha) = \mu(a) = \mu(\varphi(a)),$$

$$\text{т. е. } \mu(\varphi(a) - y) = 0 \text{ и } \varphi(a) - y \geqslant \Theta.$$

В силу точности μ

$$\varphi(a) = y = \sup_{\alpha} \varphi(a_{\alpha}).$$

V) Если $a \in \mathscr{A}^G$, то

$$\mathscr{K}_0(a, G) = \mathscr{K}(a, G) = \{a\}.$$

Поэтому $\varphi(a) = a$.

Vi) Если $a \in \mathscr{A}$, $g \in G$, то из очевидного равенства

$$\mathscr{K}_0(ga, G) = \mathscr{K}_0(a, G)$$

(так как G — группа) имеем

$$\mathscr{K}(ga, G) = \mathscr{K}(a, G).$$

Следовательно,

$$\varphi(ga) = \mathscr{K}(ga, G) \cap \mathscr{A}^G = \mathscr{K}(a, G) \cap \mathscr{A}^G = \varphi(a).$$

Теорема доказана.

В частном случае, когда $G = G_{in}$, μ — точный нормальный след на $\mathscr{A}$, из теоремы 3 вытекает следующий результат.

Следствие: Пусть $\mathscr{A}$ — JBW-алгебра с точным нормальным следом. Тогда на $\mathscr{A}$ существует точный нормальный центрозначный след [5], т.е. отображение $\psi: \mathscr{A} \to Z$ такое, что

1) ψ линейно и строго положительно;
2) ψ нормально;
3) $\psi(z \circ x) = z \circ \psi(x)$ для любых $z \in Z$, $x \in \mathscr{A}$;
4) $\psi(\mathbf{1}) = 1$;
5) $\psi(U_s x) = \psi(x)$ для любого $x \in \mathscr{A}$ и любой симметрии $s \in \mathscr{A}$.

Отметим еще одно следствие из теоремы 3.

Теорема 4. В условиях теоремы 1 всякое нормальное состояние ν_0 на $\mathscr{A}^G$ можно единственным образом продолжить до нормального G-инвариантного состояния ν на $\mathscr{A}$. Если ν_0 точно, то ν точно.

Доказательство. В обозначениях теоремы 3 положим $\nu(a) = \nu_0(\varphi(a))$ для любого $a \in \mathscr{A}$. В силу ii) и iV) ν — нормальное состояние на $\mathscr{A}$. Согласно Vi)

$$\nu(ga) = \nu_0(\varphi(ga)) = \nu_0(\varphi(a)) = \nu(a),$$

т. е. ν G-инвариантно. Если ν_0 точно, то с учетом ii) ν также точно.

Покажем единственность продолжения. Пусть ν_1 — другое G-инвариантное нормальное продолжение ν_0 на $\mathscr{A}$. Для любого $x \in \mathscr{K}_0(a, G)$, $a \in \mathscr{A}$, так как

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i a, \ \lambda_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \ g_i \in G, \ i = 1, \ldots, k,$$

имеем

$$\nu(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nu(g_i a) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nu(a) = \nu(a).$$

Аналогично

$$\nu_1(x) = \nu_1(a) \text{ для всех } x \in \mathcal{K}_0(a, G).$$

Вследствие *-слабой непрерывности ν и ν_1

$$\nu(x) = \nu(a), \ \nu_1(x) = \nu_1(a) \text{ для любого } x \in \mathcal{K}(a, G).$$

В частности,

$$\nu(\varphi(a)) = \nu(a), \ \nu_1(\varphi(a)) = \nu_1(a).$$

Но $\varphi(a) \in \mathcal{A}^G$. Значит,

$$\nu(a) = \nu_1(a) = \nu_0(\varphi(a)).$$

В силу произвольности $a \in \mathcal{A}$ $\nu \equiv \nu_1$. Теорема доказана.

Замечание. Во всех приведенных результатах вместо JBW-алгебр можно рассмотреть более общую OJB-алгебру [8, 9]. Это будет лишь формальным обобщением, поскольку согласно теореме 2.3[4], если на OJB-алгебре существует точное нормальное состояние, эта алгебра является JBW-алгеброй, так как OJB-алгебра монотонно полна [8—10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Kovacs J., Szucs J. Acta Sci Math., *27*, 1966, No 3—4, 237.
2. Аюпов Ш. А. ДАН УзССР, 1977, № 3, 3.
3. Alfsen E. M., Shults F. W., Stormer E. Adv. in Math., *28*, 1978, No 1, 11.
4. Shultz F. W. J. of Funct. Anal., *31*, 1979, No 3, 360.
5. Topping D. Mem. Amer. Math. Soc., *53*, 1965, 1.
6. Аюпов Ш. А. ДАН УзССР, 1979, № 9, 3.
7. Jacobs K. Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie. Berlin—Gottingen — Heidelberg, 1960.
8. Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А. ДАН СССР, *249*, 1979, № 4, 789.
9. Аюпов Ш. А. «Изв. АН УзССР», серия физ.-мат. наук, 1980, № 2, 5.
10. Аюпов Ш. А. «Изв. АН УзССР», серия физ.-мат. наук, 1980, № 3, 9.

Институт математики
им. В. И. Романовского
АН УзССР

Поступило
19. X 1979 г.